2022 北京丰台初二（上）期末

数　　学

一、选择题（本题共24分，每小题3分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

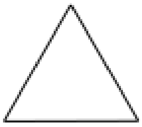
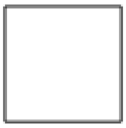
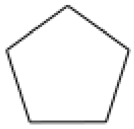
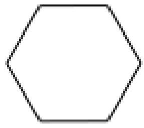
1. 钢架雪车是2022年北京冬奥会的比赛项目之一．下面这些钢架雪车运动标志是轴对称图形的是（　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

2. 在物联网时代的所有芯片中，14 nm 芯片正在成为需求的焦点. 已知nm即纳米，是长度的度量单位，$1\ \text{nm} = 1\times10^{-9}\ \text{m}$．将14 nm用科学记数法表示正确的是（　）

A. $1.4\times10^{-8}\ \text{m}$　　B. $1.4\times10^{-9}\ \text{m}$　　C. $14\times10^{-9}\ \text{m}$　　D. $1.4\times10^{-10}\ \text{m}$

3. 下列图形中，内角和等于外角和的是（　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

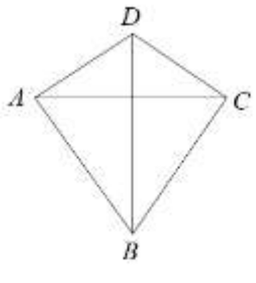
4. 下列计算正确的是（　）

A. $a^2+a^3=a^5$　　B. $a^2\cdot a^3=a^6$　　C. $a^9\div a^3=a^3$　　D. $(-a^2)^3=-a^6$

5. 将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架具有稳定性.解释这个现象的数学原理是（　）

A. SSS　　B. SAS　　C. ASA　　D. AAS

6. 如图，四边形$ABCD$中，$AD=CD$，$AB=CB$，我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”．下列关于筝形的结论正确的是（　）



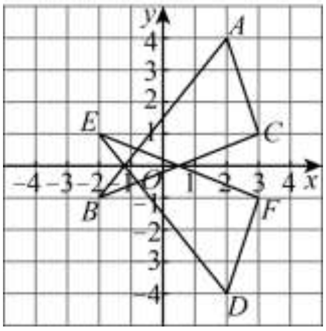
A. 对角线AC，BD互相垂直平分

B. 对角线BD平分$\angle ABC$，$\angle ADC$

C. 直线AC，BD是筝形的两条对称轴

D. 筝形的面积等于对角线AC与BD的乘积

7. 如图，在平面直角坐标系xOy中，$\triangle DEF$可以看作是$\triangle ABC$经过若干次图形　变化（平移、轴对称）得到的，下列由$\triangle ABC$得到$\triangle DEF$的变化过程错误的是（　）



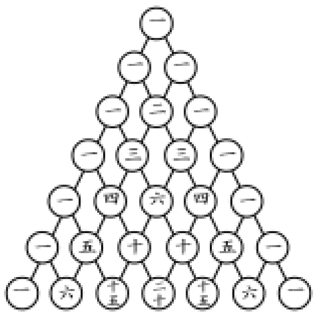
A. 将△ ABC 沿 x 轴翻折得到△ DEF

B. 将△ ABC 沿直线 $y=1$ 翻折，再向下平移 2 个单位得到△ DEF

C. 将△ ABC 向下平移 2 个单位，再沿直线 $y=1$ 翻折得到△ DEF

D. 将△ ABC 向下平移 4 个单位，再沿直线 $y=-2$ 翻折得到△ DEF

8. “杨辉三角”（如图），也叫“贾宪三角”，是中国古代数学无比睿智的成就之一，被后世广泛运用．用“杨辉三角”可以解释 $(a+b)^n$（$n=1$，2，3，4，5，6）的展开式的系数规律．例如，在“杨辉三角”中第 3 行的 3 个数 1，2，1，恰好对应着 $(a+b)^2$ 展开式 $a^2+2ab+b^2$ 中各项的系数；第 4 行的 4 个数 1，3，3，1，恰好对应着 $(a+b)^3$ 展开式 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 中各项的系数，等等．当 n 是大于 6 的自然数时，上述规律仍然成立，那么 $(a-\frac{1}{a})^9$ 展开式中 a^7 的系数是（ ）

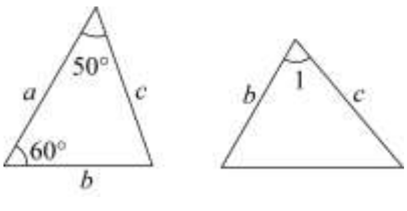


A. 9　　B. -9　　C. 36　　D. -36

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

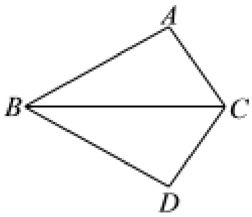
9. 分式 $\frac{1}{m-2}$ 有意义，则 m 的取值范围是__________.

10. 如图是两个全等的三角形，图中字母表示三角形的边长，则∠1 的度数为________°.



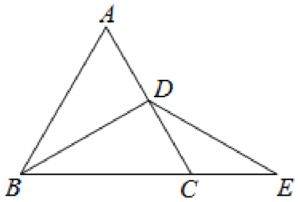
11. 分解因式：$3x^2-3y^2=$____.

12. 如图，在△ABC 和△DBC，$BA=BD$ 中，请你添加一个条件使得△ABC ≌△DBC，这个条件可以是________（写出一个即可）.



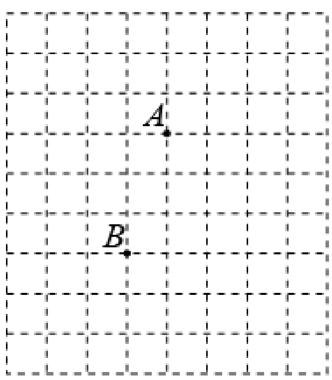
13. 等腰三角形的两边长分别是 4 和 9，则它的周长为________.

14. 如图，在等边三角形 ABC 中， $AB=2$， BD 是 AC 边的高线，延长 BC 至点 E，使 $CE=CD$，则 BE 的长为__________.



15. 当 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$ 时，式子 $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}-2b\right)\cdot\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$ 的值为________.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，横、纵坐标都是整数的点叫做整点．如图，点 A 的坐标为（2，4），点 B 的坐标为（1，1），点 C 为第一象限内的整点，不共线的 A， B， C 三点构成轴对称图形，则点 C 的坐标可以是______（写出一个即可），满足题意的点 C 的个数为________.



三、解答题（本大题共 60 分，第 17－19 题每小题 4 分，第 20－26 题每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 6 分）

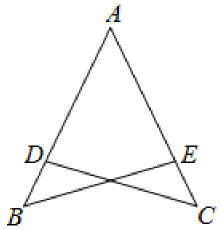
17. 计算：$(x+2)(x-3)$.

18. 计算：$\sqrt{4}+2^{-2}-(2-\pi)^0$.

19. 计算：$\dfrac{a}{a^2-ab}-\dfrac{1}{a+b}$.

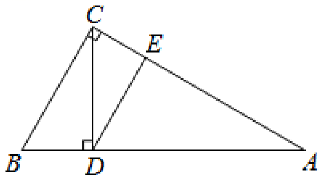
20. 先化简，再求值：$(2x+1)^2-(2x+1)(2x-1)$，其中 $x=-\dfrac{1}{4}$.

21. 如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上， $AB=AC$， $\angle B=\angle C$．求证： $AD=AE$.



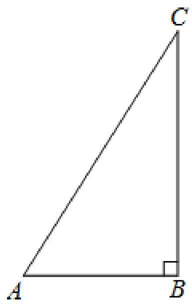
22. 解方程：$\dfrac{2x}{3x+3}+1=\dfrac{x}{x+1}$.

23. 如图，在△ABC中，∠$ACB=90°$，∠$A=30°$，$CD\perp AB$于点D，$DE \parallel BC$交AC于点E，如果$BD=2$，求DE的长.



24. 下面是小东设计的尺规作图过程.

已知：如图，　Rt△ABC中，$\angle ABC=90°$.



求作：点D，使得点D在BC边上，且到AB和AC的距离相等.

作法：①如图，以点A为圆心，任意长为半径画弧，分别交AB，AC于点M，N；

②分别以点M，N为圆心，大于$\dfrac{1}{2}MN$为半径画弧，两弧交于点P；

③画射线AP，交BC于点D.

所以点D即为所求.

根据小东设计　尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明.

证明：过点D作$DE\perp AC$于点E，连接MP，NP.

在△AMP和△ANP中，

∵ $AM=AN$，$MP=NP$，$AP=AP$，

∴ △$AMP\cong$△ANP（SSS）.

∴∠__=∠____.

∵∠ABC=90°，

∴ $DB\perp AB$.

$\because DE\perp AC$，

$\therefore DB=DE$（____）．

25. 北京市以2022年冬奥会和冬残奥会为契机，大力提升城市服务保障能力，在永定河沿岸，紧邻北京冬奥组委和首钢滑雪大跳台建成冬奥公园．冬奥公园最大的亮点是拥有一条长42km全封闭的马拉松跑道．马拉松线路设计很有创意，分为智慧跑、公园跑、滨水跑和堤上跑．小明先进行了2km智慧跑，接着进行了4km堤上跑，共用时40分钟．已知小明在堤上跑路段的平均速度是他在智慧跑路段的平均速度的1.5倍，求小明在进行智慧跑和堤上跑时的平均速度．

26. 在“整式乘法与因式分解”这一章的学习过程中，我们常采用构造几何图形的方法对代数式的变形加以说明．例如，利用图1中边长分别为 a，b 的正方形，以及长为 a，宽为 b 的长方形卡片若干张拼成图 2（卡片间不重叠、无缝隙），可以用来解释完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．

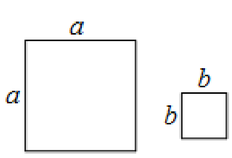


图 1

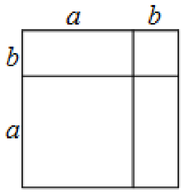


图 2

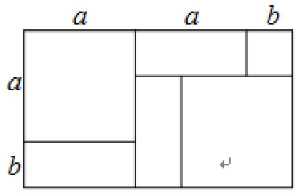


图 3

请你解答下面的问题：

（1）利用图 1 中　三种卡片若干张拼成图3，可以解释等式：____________；

（2）利用图 1 中三种卡片若干张拼出一个面积为 $2a^2+5ab+2b^2$ 的长方形 $ABCD$，请你分析这个长方形的长和宽．

27. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle ABC=\alpha$，点 D 是直线 BC 上一点，点 C 关于射线 AD 　对称点为点 E．作直线 BE 交射线 AD 于点 F，连接 CF．

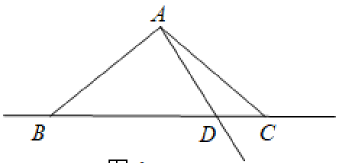


图 1

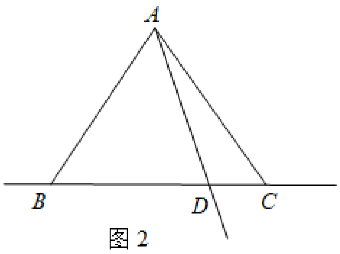


图 2

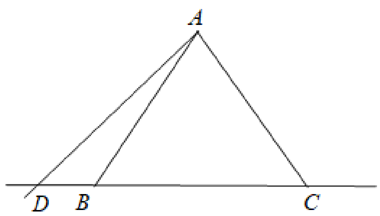


图 3

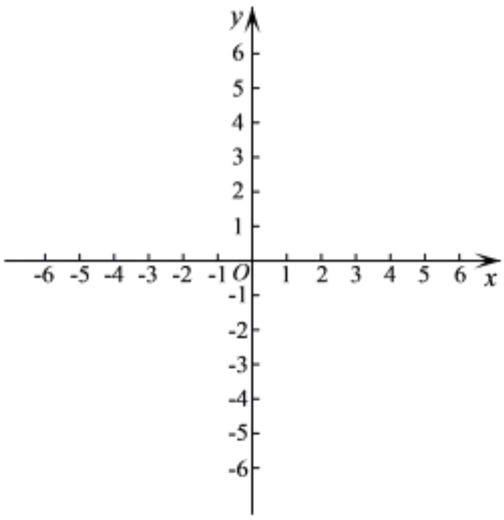
（1）如图1，点 D 在线段 BC 上，补全图形，求 $\angle AFB$ 的大小（用含 α 的代数式表示）；

（2）如果 $\angle\alpha=60°$．

①如图2，当点 D 在线段 BC 上时，用等式表示线段 AF，CF，BF 之间的数量关系，并证明；

②如图3，当点 D 在线段 CB 的延长线上（不与点 C 重合）时，直接写出线段 AF，CF，BF 之间的数量关系．

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，作直线 l 垂直 x 轴于点 P（a，0），已知点A（1，1），点 B（1，5），以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABC，点 C 在第一象限．$\triangle ABC$ 关于直线 l 的对称图形是 $\triangle A'B'C'$．给出如下定义：如果点 M 在 $\triangle A'B'C'$ 上或内部，那么称点 M 是 $\triangle ABC$ 关于直线 l 的“称心点”．



（1）当 $a=0$ 时，在点 D（$-\dfrac{3}{2}$，3），E（-2，2），F（-3，4）中，$\triangle ABC$ 关于直线 l 的“称心点”是___；

（2）当 $\triangle ABC$ 上只有 1 个点是 $\triangle ABC$ 关于直线 l 的“称心点”时，直接写出 a 的值；

（3）点 H 是 $\triangle ABC$ 关于直线 l 的“称心点”，且总有 $\triangle HBC$ 的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积，求 a 的取值范围．

参考答案

一、选择题（本题共24分，每小题3分）第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 钢架雪车是2022年北京冬奥会的比赛项目之一．下面这些钢架雪车运动标志是轴对称图形的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义（在平面内沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形）依次判断即可.

【详解】解：根据轴对称图形的定义可得：只有D选项符合题意，其余选项的均不符合题意，

故选：D.

【点睛】题目主要考查轴对称图形的判定，深刻理解轴对称图形的定义是解题关键.

2. 在物联网时代　所有芯片中，14 nm芯片正在成为需求的焦点. 已知nm即纳米，是长度的度量单位，$1\ \text{nm} = 1\times10^{-9}\ \text{m}$．将14 nm用科学记数法表示正确的是（　）

A. 1.4×10^{-8} m　B. 1.4×10^{-9} m　C. 14×10^{-9} m　D. 1.4×10^{-10} m

【答案】A

【解析】

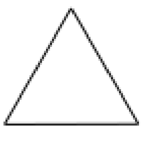
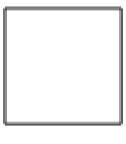
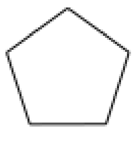
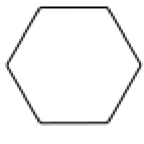
【分析】绝对值小于1的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为$a\times10^{-n}$，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定.

【详解】解: $14\ \text{nm} = 14\times10^{-9}\ \text{m} = 1.4\times10^{-8}\ \text{m}$

故选：A

【点睛】本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为$a\times10^{-n}$，其中$1\le|a|<10$，n为由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定.

3. 下列图形中，内角和等于外角和的是（　）

A. 　B. 　C. 　D. 

【答案】B

【解析】

【分析】设n边形的内角和等于外角和，计算$(n-2)\times180°=360°$即可得出答案；

【详解】解:设n边形的内角和等于外角和

$(n-2)\times180°=360°$

解得:$n=4$

故答案选：B

【点睛】本题考查了多边形内角和与外角和，熟练掌握多边形内角和计算公式是解题的关键.

4. 下列计算正确的是（　）

A. $a^2+a^3=a^5$　　B. $a^2\cdot a^3=a^6$　　C. $a^9\div a^3=a^3$　　D. $(-a^2)^3=-a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项、同底数幂的乘法、同底数幂的除法、积的乘方分别计算即可.

【详解】A、a^2 与 a^3 不是同类项，不能合并，故计算错误；

B、$a^2\cdot a^3=a^5\neq a^6$，故计算错误；

C、$a^9\div a^3=a^6$，故计算错误；

D、$(-a^2)^3=(-1)^3\times(a^2)^3=-a^6$，故计算正确.

故选：D

【点睛】本题主要考查了幂的运算：同底数幂的乘法，同底数幂的除法，积的乘方等知识，掌握这些知识是解答本题的关键.

5. 将三根木条钉成一个三角形木架，这个三角形木架具有稳定性.解释这个现象的数学原理是（　）

A. SSS　　B. SAS　　C. ASA　　D. AAS

【答案】A

【解析】

【分析】根据三根木条即为三角形的三边长，利用全等三角形判定定理确定唯一三角形即可得.

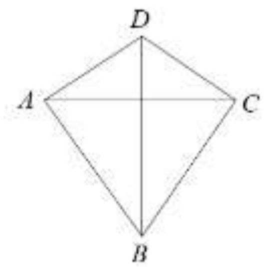
【详解】解：三根木条即为三角形的三边长，

即为利用 SSS 确定三角形，

故选：A.

【点睛】题目主要考查利用全等三角形判定确定唯一三角形，熟练掌握全等三角形的判定是解题关键.

6. 如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$AB=CB$，我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”．下列关于筝形的结论正确的是（　）



A. 对角线 AC，BD 互相垂直平分

B. 对角线 BD 平分 $\angle ABC$，$\angle ADC$

C. 直线 AC，BD 是筝形的两条对称轴

D. 筝形的面积等于对角线 AC 与 BD 的乘积

【答案】B

【解析】

【分析】先判定 BD 是 AC 的垂直平分线，可判断 A，再证明 $\triangle ABD\cong\triangle CBD,$ 可判断 B，C，再利用面积公式可判断 D，从而可得答案.

【详解】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$AB=CB$，

$\therefore BD$ 是 AC 的垂直平分线，

而 AC 不一定是 BD 的垂直平分线，故 A 不符合题意；

$\because$ $AD=CD$，$AB=CB$，$BD=BD,$

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CBD,$

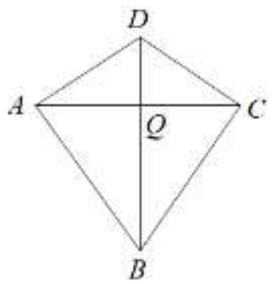
$\therefore \angle ADB=\angle CDB, \angle ABD=\angle CBD,$

$\therefore$ 对角线 BD 平分 $\angle ABC$，$\angle ADC$，故 B 符合题意；

$\because\triangle ABD\cong\triangle CBD,$

$\therefore$ 直线 BD 是筝形的两条对称轴，故 C 不符合题意；

如图，记对角线的交点为 $Q,$



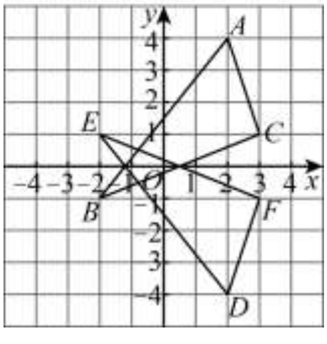
$\therefore S_{筝形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\bullet AQ+\frac{1}{2}BD\bullet CQ=\frac{1}{2}BD\bullet AC,$

$\therefore$ 筝形的面积等于对角线 AC 与 BD 的乘积的一半，故 D 不符合题意；

故选 B

【点睛】本题考查的是垂直平分线的判定与性质，全等三角形的判定与性质，轴对称图形的定义，判定 BD 是 AC 的垂直平分线是解本题的关键.

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle DEF$ 可以看作是$\triangle ABC$ 经过若干次图形的变化（平移、轴对称）得到的，下列由$\triangle ABC$ 得到$\triangle DEF$ 的变化过程错误的是（　）



A. 将$\triangle ABC$ 沿 x 轴翻折得到$\triangle DEF$

B. 将$\triangle ABC$ 沿直线 $y=1$ 翻折，再向下平移 2 个单位得到$\triangle DEF$

C. 将$\triangle ABC$ 向下平移 2 个单位，再沿直线 $y=1$ 翻折得到$\triangle DEF$

D. 将△ABC向下平移4个单位，再沿直线$y=-2$翻折得到△DEF

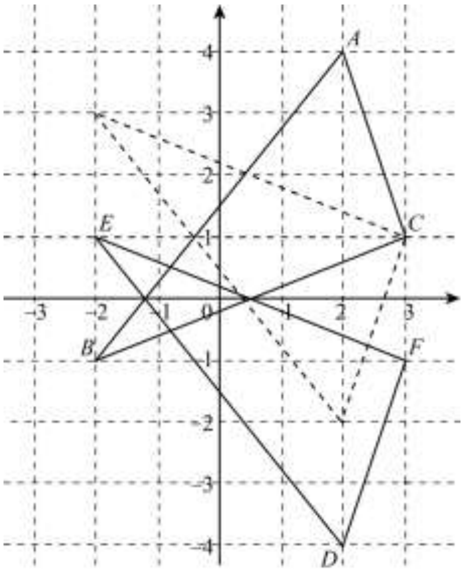
【答案】C

【解析】

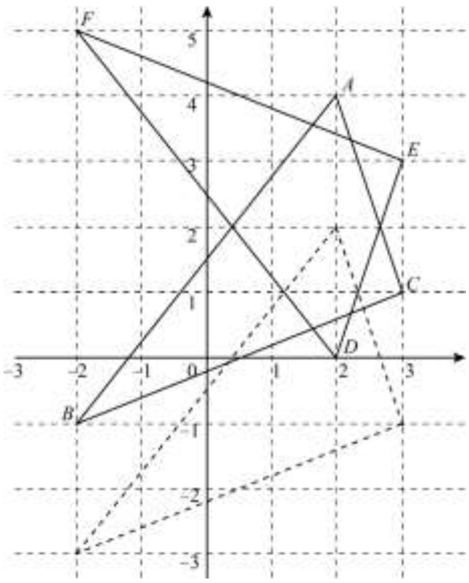
【分析】根据坐标系中平移、轴对称的作法，依次判断四个选项即可得.

【详解】解：A、根据图象可得：将△ABC沿x轴翻折得到△DEF，作图正确；

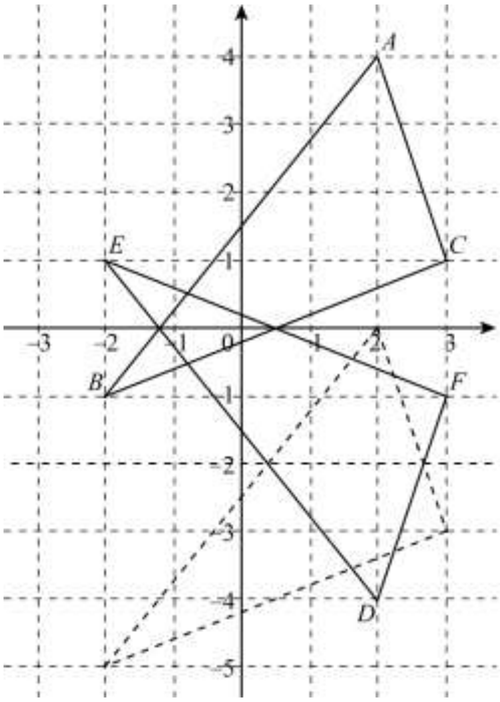
B、作图过程如图所示，作图正确；



C、如下图所示为作图过程，作图错误；



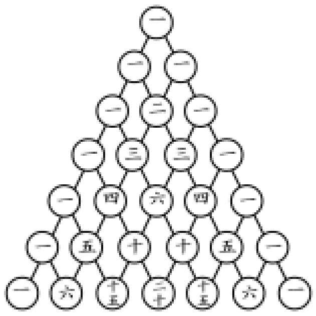
D、如图所示为作图过程，作图正确；



故选：C．

【点睛】题目主要考查坐标系中图形的平移和轴对称，熟练掌握平移和轴对称的作法是解题关键．

8. “杨辉三角”（如图），也叫“贾宪三角”，是中国古代数学无比睿智的成就之一，被后世广泛运用．用“杨辉三角”可以解释$(a+b)^n$（$n=1$，2，3，4，5，6）的展开式的系数规律．例如，在“杨辉三角”中第3行的3个数1，2，1，恰好对应着$(a+b)^2$展开式$a^2+2ab+b^2$中各项的系数；第4行的4个数1，3，3，1，恰好对应着$(a+b)^3$展开式$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$中各项的系数，等等．当n是大于6的自然数时，上述规律仍然成立，那么$(a-\frac{1}{a})^9$展开式中a^7的系数是（　）



A. 9　　B. -9　　C. 36　　D. -36

【答案】B

【解析】

【分析】结合“杨辉三角”得出$\left(a-\frac{1}{a}\right)^9$的各项系数，然后考虑符号计算即可．

【详解】解：结合“杨辉三角”可得$\left(a-\frac{1}{a}\right)^9$的各项系数（不考虑符号）为：

1，9，36，84，126，126，84，36，9，1，

a^7 由 $a^8\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)$ 可得，符号为负号，系数为倒数第二个系数 9，

$\therefore a^7$ 的系数为 -9，

故选：B.

【点睛】题目主要考查整式的乘法运算规律，理解题意中的“杨辉三角”是解题关键.

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 分式 $\frac{1}{m-2}$ 有意义，则 m 的取值范围是__________.

【答案】$m\neq 2$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件，分母不为 0，进而即可求得 m 的取值范围.

【详解】解：$\because$ 分式 $\frac{1}{m-2}$ 有意义，

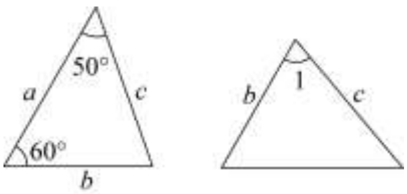
$\therefore m-2\neq 0$

$\therefore m\neq 2$

故答案为：$m\neq 2$

【点睛】本题考查了分式有意义的条件，理解分母不为 0 是解题的关键.

10. 如图是两个全等的三角形，图中字母表示三角形的边长，则 $\angle 1$ 的度数为________º.



【答案】70

【解析】

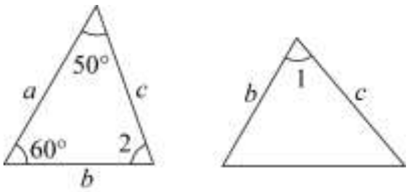
【分析】如图（见解析），先根据三角形的内角和定理可得 $\angle 2=70°$，再根据全等三角形的性质即可得.

【详解】解：如图，由三角形的内角和定理得：$\angle 2=180°-50°-60°=70°$，

$\because$ 图中的两个三角形是全等三角形，在它们中，边长为 b 和 c 的两边的夹角分别为 $\angle 2$ 和 $\angle 1$，

$\therefore \angle 1=\angle 2=70°$，

故答案为：70.



【点睛】本题考查了三角形的内角和定理、全等三角形的性质，熟练掌握全等三角形的性质是解题关键.

11. 分解因式：$3x^2-3y^2=$____.

【答案】$3(x+y)(x-y)$

【解析】

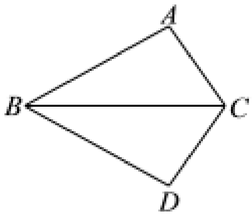
【分析】先提取公因式 3，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解.

【详解】解：$3x^2-3y^2=3\left(x^2-y^2\right)=3\left(x+y\right)\left(x-y\right)$，

故答案为：$3(x+y)(x-y)$.

【点睛】本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解，一个多项式有公因式首先要提取公因式，然后再用其他方法进行因式分解，同时因式分解要彻底，直到不能分解为止.

12. 如图，在△*ABC* 和△*DBC*，*BA*=*BD* 中，请你添加一个条件使得△*ABC* ≌△*DBC*，这个条件可以是________（写出一个即可）.



【答案】$CA=CD$（答案不唯一）

【解析】

【分析】由已知有 *BA*=*BD*，*BC* 边公共，由三角形全等的判定定理，可以添加这两边的夹角相等或第三边相等，均可使得△*ABC* ≌△*DBC*.

【详解】添加 *CA*=*CD*，则由边边边的判定定理即可得△*ABC* ≌△*DBC*

故答案为：*CA*=*CD*（答案不唯一）

【点睛】本题考查了全等三角形的判定，熟悉全等三角形的几个判定定理是解题的关键.

13. 等腰三角形　两边长分别是 4 和 9，则它的周长为________.

【答案】22

【解析】

【分析】分两种情况讨论：当腰长为 4 时，　当腰长为 9 时，再结合三角形的三边关系，从而可得答案.

【详解】解：∵ 等腰三角形的两边长分别是 4 和 9，

∴ 当腰长为 4 时，此时 $4+4<9$, 不符合题意，舍去，

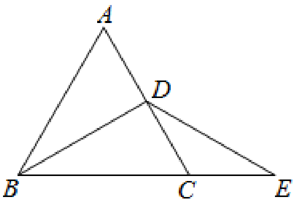
当腰长为 9 时，此时 $4+9>9$, 符合题意，

所以三角形的周长为：$4+9+9=22$,

故答案为：22

【点睛】本题考查的是等腰三角形的定义，三角形的三边关系，掌握“等腰三角形的两腰相等，再分情况讨论”是解本题的关键.

14. 如图，在等边三角形 ABC 中，$AB=2$，BD 是 AC 边的高线，延长 BC 至点 E，使 $CE=CD$，则 BE 的长为__________.



【答案】3

【解析】

【分析】由等腰三角形三线合一的性质，得到 $AD=DC=1$，由 $BE=BC+CE$ 不难求解.

【详解】解：∵三角形 ABC 是等边三角形，

$\therefore BC=AC=2$，

又∵ BD 是 AC 边的高线，

$\therefore DC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times 2=1$，

$\therefore CE=CD=1$，

$\therefore BE=BC+CE=2+1=3$，

故答案为：3.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，掌握等腰三角形三线合一的性质是解本题的关键.

15. 当 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$ 时，式子 $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}-2b\right)\cdot\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$ 值为________.

【答案】-1

【解析】

分析】先将原式括号内通分计算，再将两因式分子、分母因式分解，约分后代入求值即可.

【详解】解：$\left(\dfrac{a^2+b^2}{a}-2b\right)\cdot\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

$=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a}\cdot\dfrac{a+b}{a^2-b^2}$

$=\dfrac{(a-b)^2}{a}\cdot\dfrac{a+b}{(a+b)(a-b)}$

$=\dfrac{a-b}{a}$

$=1-\dfrac{b}{a}$

$\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$

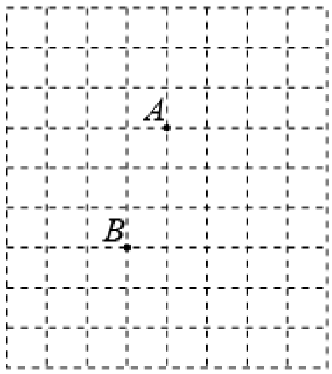
$\therefore \dfrac{b}{a}=2$

∴原式=1-2=-1

故答案为：-1.

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解答本题的关键.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，横、纵坐标都是整数的点叫做整点．如图，点A 的坐标为（2，4），点 B 的坐标为（1，1），点 C 为第一象限内的整点，不共线的A，B，C 三点构成轴对称图形，则点 C 的坐标可以是______（写出一个即可），满足题意的点 C 的个数为________.

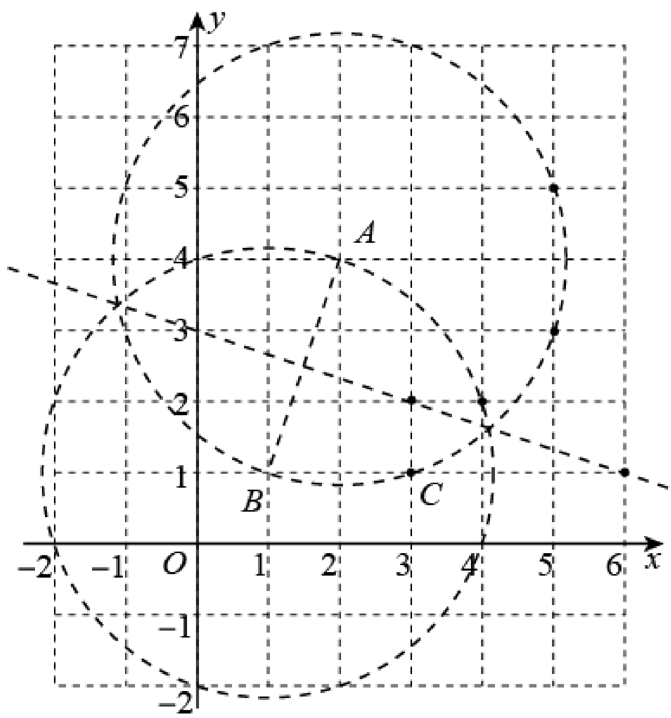


【答案】 ①.（3，1）（答案不唯一） ②. 7

【解析】

【分析】根据题意建立平面直角坐标系，进而根据题意找等腰三角形即可

【详解】建立如下坐标系，如图，则点 $C\left(3,1\right)$



如图，根据题意不共线的A，B，C 三点构成轴对称图形，则$\triangle ABC$ 是等腰三角形，根据等腰三角形的性质可得这样的 C 点有 7 个，分别为：

$\left(1,7\right),\left(3,1\right),\left(3,2\right),\left(4,2\right),\left(5,3\right),\left(5,5\right),\left(6,1\right)$

故答案为：（3,1）；7

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定，轴对称的性质，将题目转化为找等腰三角形是解题的关键．

三、解答题（本大题共 60 分，第 $17-19$ 题每小题 4 分，第 $20-26$ 题每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 6 分）

17. 计算：$\left(x+2\right)\left(x-3\right)$.

【答案】x^2-x-6

【解析】

【分析】先计算多项式乘以多项式，然后合并同类项即可.

【详解】解：$(x+2)(x-3)$

$=x^2-3x+2x-6$

$=x^2-x-6$.

【点睛】题目主要考查多项式乘以多项式，合并同类项，熟练掌握计算法则是解题关键.

18. 计算：$\sqrt{4}+2^{-2}-(2-\pi)^0$.

【答案】$\frac{5}{4}$

【解析】

【分析】根据求一个数的算术平方根，负整数指数幂，0 次幂进行计算即可

【详解】原式$=2+\frac{1}{4}-1$

$=\frac{5}{4}$.

【点睛】本题考查了求一个数的算术平方根，负整数指数幂，0 次幂，正确的计算是解题的关键.

19. 计算：$\frac{a}{a^2-ab}-\frac{1}{a+b}$.

【答案】$\frac{2b}{a^2-b^2}$

【解析】

【分析】先根据分式的性质化简分式，再根据异分母分式的加减进行计算即可

【详解】原式$=\frac{a}{a(a-b)}-\frac{1}{a+b}$

$=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$

$=\frac{a+b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a-b}{(a-b)(a+b)}$

$=\frac{a+b-a+b}{(a-b)(a+b)}$

$=\frac{2b}{a^2-b^2}$.

【点睛】本题考查了分式的加减，掌握异分母分式的加减是解题的关键.

20. 先化简，再求值：$(2x+1)^2-(2x+1)(2x-1)$，其中 $x=-\frac{1}{4}$.

【答案】$4x+2$，1

【解析】

【分析】先根据完全平方公式和平方差公式将整式展开，进而合并同类项，最后将 x 的值代入求解即可

【详解】原式 $=4x^2+4x+1-\left(4x^2-1\right)$

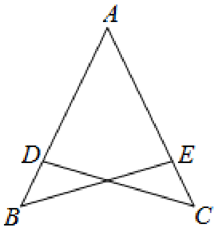
$=4x^2+4x+1-4x^2+1$

$=4x+2.$

当 $x=-\dfrac{1}{4}$ 时，原式 $=-1+2=1.$

【点睛】本题考查了整式的乘法运算，化简求值，掌握乘法公式是解题的关键.

21. 如图，点 D 在 AB 上，点 E 在 AC 上，$AB=AC$，$\angle B=\angle C$．求证：$AD=AE$．



【答案】见解析

【解析】

【分析】根据已知条件和公共角 $\angle A=\angle A$，直接根据角边角证明 $\triangle ABE\cong\triangle ACD$，进而即可证明 $AD=AE$

【详解】在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases}\angle A=\angle A\\ AB=AC\\ \angle B=\angle C\end{cases}$$

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACD$．

$\therefore AD=AE$．

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

22. 解方程：$\dfrac{2x}{3x+3}+1=\dfrac{x}{x+1}$．

【答案】$x=-1.5$

【解析】

【分析】根据解分式方程的步骤先去分母，等式两边同时乘以最简公分母 3(x+1),将分式方程化为整式方程再求解即可.

【详解】解：方程两边同乘 3（x+1）得：

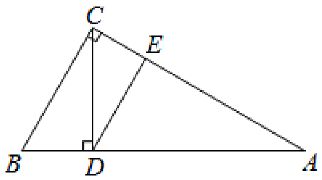
2x+3（x+1）＝3x，

解得：x＝﹣1.5，

经检验 x＝﹣1.5 是分式方程的解.

【点睛】本题考查的知识点是解分式方程，步骤如下：①去分母方程两边同时乘以最简公分母,将分式方程化为整式方程;若遇到互为相反数时.不要忘了改变符号.②按解整式方程的步骤移项,若有括号应去括号,注意变号,合并同类项,把系数化为 1 求出未知数的值;③验根求出未知数的值后必须验根.

23. 如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$CD\perp AB$于点D，$DE\parallel BC$交AC于点E，如果$BD=2$，求DE的长.



【答案】$DE=3$.

【解析】

【分析】先根据直角三角形的性质可得$\angle B=60°$，$AB=2BC$，再根据垂直的定义可得$\angle CDB=\angle CDA=90°$，从而可得$\angle BCD=30°$，$BC=4$，$AB=8$，然后根据线段和差可得$AD=6$，根据平行线的性质可得$\angle DEA=\angle ACB=90°$，最后在$Rt\triangle ADE$中，利用直角三角形的性质即可得.

【详解】解：$\because \angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

$\therefore \angle B=60°$，$AB=2BC$，

$\because CD\perp AB$于点D，

$\therefore \angle CDB=\angle CDA=90°$，

$\therefore \angle BCD=30°$，

$\therefore BC=2BD$，

$\because BD=2$，

$\therefore BC=4$，

$\therefore AB=2BC=8$，

$\therefore AD=AB-BD=6$，

$\because DE\parallel BC$，

$\therefore \angle DEA=\angle ACB=90°$，

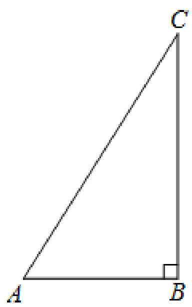
$\because$在$Rt\triangle ADE$中，$\angle A=30°$，

$\therefore DE=\frac{1}{2}AD=3$.

【点睛】本题考查了平行线的性质、含$30°$角的直角三角形的性质等知识点，熟练掌握含$30°$角的直角三角形的性质是解题关键.

24. 下面是小东设计的尺规作图过程.

已知：如图，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$.



求作：点D，使得点D在BC边上，且到AB和AC的距离相等.

作法：①如图，以点A为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AB， AC 于点 M， N；

②分别以点 M， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 为半径画弧，两弧交于点 P；

③画射线 AP，交 BC 于点 D.

所以点 D 即为所求.

根据小东设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形；（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明.

证明：过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，连接 MP，NP .

在 $\triangle AMP$ 和 $\triangle ANP$ 中，

$\because$ $AM=AN$， $MP=NP$， $AP=AP$，

$\therefore$ $\triangle AMP\cong\triangle ANP$ （SSS）.

$\therefore$ ∠__=∠ ____.

$\because$ ∠ ABC =90°，

$\therefore$ $DB\perp AB$.

$\because$ $DE\perp AC$，

$\therefore$ $DB=DE$ （_____）.

【答案】（1）补全图形见解析

（2）$\angle PAM$，$\angle PAN$，角的平分线上的点到角的两边的距离相等

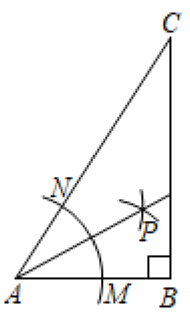
【解析】

【分析】（1）按照要求补全图形即可；

（2）读懂证明中的每一个步骤及推理的依据，即可完成.

【小问1详解】

补全的图形如下：



【小问2详解】

过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，连接 MP，NP .

在 $\triangle AMP$ 和 $\triangle ANP$ 中，

$\because$ $AM=AN$， $MP=NP$， $AP=AP$，

$\therefore$ $\triangle AMP\cong\triangle ANP$ （SSS）.

$\therefore$ $\angle PAM=\angle PAN$.

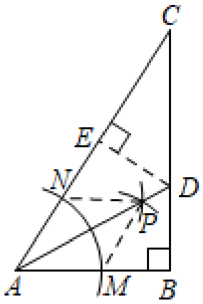
$\therefore \angle ABC=90°$，

$\therefore DB \perp AB$．

$\because DE \perp AC$，

$\therefore DB = DE$（角的平分线上的点到角的两边的距离相等）．

故答案为：$\angle PAM$，$\angle PAN$，角的平分线上的点到角的两边的距离相等



【点睛】本题考查了用尺规作角平分线，三角形全等的判定与性质，角平分线的性质定理等知识，灵活运用它们是关键．

25. 北京市以2022年冬奥会和冬残奥会为契机，大力提升城市服务保障能力，在永定河沿岸，紧邻北京冬奥组委和首钢滑雪大跳台建成冬奥公园．冬奥公园最大的亮点是拥有一条长42km全封闭的马拉松跑道．马拉松线路设计很有创意，分为智慧跑、公园跑、滨水跑和堤上跑．小明先进行了2km智慧跑，接着进行了4km堤上跑，共用时40分钟．已知小明在堤上跑路段的平均速度是他在智慧跑路段的平均速度的1.5倍，求小明在进行智慧跑和堤上跑时的平均速度．

【答案】小明进行智慧跑的平均速度为7km/h，进行堤上跑的平均速度为10.5km/h．

【解析】

【分析】设小明进行智慧跑的平均速度为$x$km/h，则小明进行堤上跑的平均速度为1.5$x$km/h. 根据题意，列出分式方程，解方程求解即可，注意要检验

【详解】设小明进行智慧跑的平均速度为$x$km/h，则小明进行堤上跑的平均速度为1.5$x$km/h.

根据题意，列出方程：$\frac{2}{x}+\frac{4}{1.5x}=\frac{40}{60}$．

解方程，得$x=7$．

经检验，$x=7$是原方程的解且符合实际意义．

$\therefore 1.5x=10.5$．

答：小明进行智慧跑的平均速度为7km/h，进行堤上跑的平均速度为10.5km/h．

【点睛】本题考查了分式方程的应用，根据题意找到等量关系列出方程是解题的关键．

26. 在“整式乘法与因式分解”这一章的学习过程中，我们常采用构造几何图形的方法对代数式的变形加以说明．例如，利用图1中边长分别为 a，b 的正方形，以及长为 a，宽为 b 的长方形卡片若干张拼成图 2（卡片间不重叠、无缝隙），可以用来解释完全平方公式：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$．

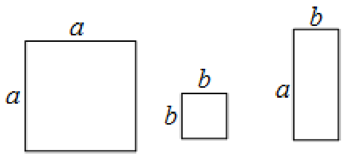


图 1

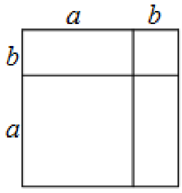


图 2

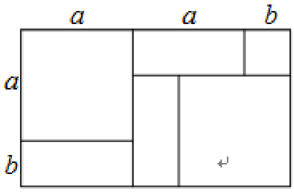


图 3

请你解答下面的问题：

（1）利用图 1 中的三种卡片若干张拼成图3，可以解释等式：_____________；

（2）利用图 1 中三种卡片若干张拼出一个面积为 $2a^2+5ab+2b^2$ 的长方形 $ABCD$，请你分析这个长方形的长和宽．

【答案】（1）$(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$

（2）长为 $2a+b$，宽为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$．

【解析】

【分析】（1）根据图形，有直接求和间接求两种方法，列出等式即可；

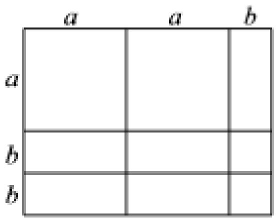
（2）根据已知等式画出相应的图形，然后根据图形写出等式即可．

【小问 1 详解】

解: $(2a+b)(a+b)=2a^2+3ab+b^2$

【小问 2 详解】

解: $2a^2+5ab+2b^2=(2a+b)(a+2b)$



答：由图形可知，长为 $2a+b$，宽为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$．

【点睛】此题考查了因式分解的应用，面积与代数式恒等式的关系，熟练掌握运算法则是解本题的关键．

27. 在△ABC 中，$AB=AC$，$\angle ABC=\alpha$，点 D 是直线 BC 上一点，点 C 关于射线 AD 的对称点为点 E．作直线 BE 交射线 AD 于点 F，连接 CF.

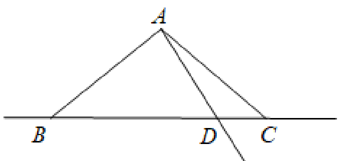


图 1

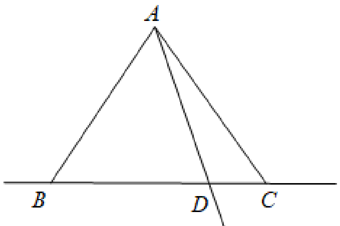


图 2

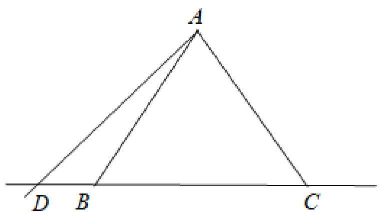


图 3

（1）如图1，点D在线段BC上，补全图形，求$\angle AFB$的大小（用含α的代数式表示）；

（2）如果$\angle\alpha=60°$.

①如图2，当点D在线段BC上时，用等式表示线段AF，CF，BF之间的数量关系，并证明；

②如图3，当点D在线段CB的延长线上（不与点C重合）时，直接写出线段AF，CF，BF之间的数量关系.

【答案】（1）补全图形见解析；$\angle AFB=\alpha$

（2）①$AF=BF+CF$，证明见解析；②$CF=AF+BF$.

【解析】

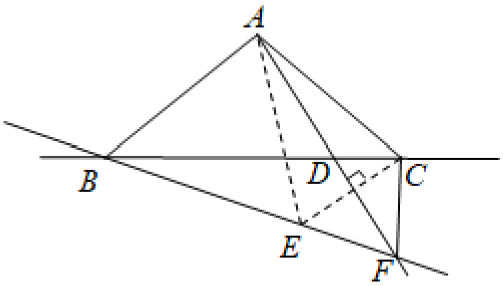
【分析】（1）根据题意画图，由点E为点C关于AD的对称点，得到$AE=AC$，$\angle EAD=\angle CAD$，设$\angle EAD=\angle CAD=x$，解得$\angle ABE+\angle AEB=2x+2\alpha$，继而得到$\angle ABE=\angle AEB=x+\alpha$，据此解题；

（2）①延长FB至点G，使$FG=FA$，连接AG，证明$\triangle ABG\cong\triangle ACF$（$SAS$），由全等三角形对应边相等得到$BG=CF$，据此解题；

②连接AE，由对称的性质，解得$\angle AFE=60°$，继而证明$\triangle AGE\cong\triangle AFB$（$SAS$），由全等三角形对应边相等得到$BF=EG$，$EF=EG+FG=BF+AF$即可解题.

【小问1详解】

解：补全图形；



连接AE，

∵点E为点C关于AD的对称点，

∴$AE=AC$，$\angle EAD=\angle CAD$

设$\angle EAD=\angle CAD=x$

∴$\angle CAE=2x$

∵$AB=AC$

∴$\angle ACB=\angle ABC=\alpha$

∴$\angle BAE=180°-2x-2\alpha$

∴$\angle ABE+\angle AEB=2x+2\alpha$

∵$AE=AB$，

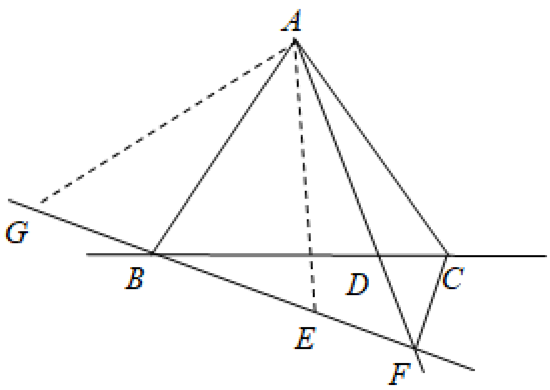
∴$\angle ABE=\angle AEB=x+\alpha$

∴$\angle AFB=\angle AEB-\angle EAD=\alpha$

【小问2详解】

①$AF=BF+CF$

证明：延长FB至点G，使$FG=FA$，连接AG



$\because AB = AC$

$\therefore \angle ABC = \alpha = 60°$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三形，$\angle BAC = 60°$

由（1）知 $\angle AFB = \alpha = 60°$

$\therefore \triangle AFG$ 为等边三角形

$\therefore AG = AF$，$\angle GAF = 60°$

$\therefore \angle GAB = \angle FAC$

在$\triangle ABG$ 与$\triangle ACF$ 中，

$$\begin{cases} AG = AF \\ \angle GAB = \angle FAC \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ACF$（$SAS$）

$\therefore BG = CF$

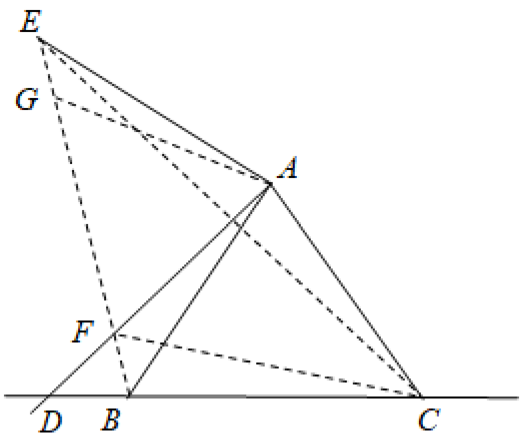
$\therefore CF + BF = BG + BF = GF$

$\because GF = AF$

$\therefore AF = BF + CF$

②结论 ：$CF = AF + BF$.

连接 AE，



$\because$点 E 为点 C 关于 AD 的对称点，

$\therefore AE=AC$，$EF=FC, \angle EAD=\angle CAD$

设 $\angle EAD=\angle CAD=x$

$\therefore \angle CAE=2x$

$\because AB=AC=AE$

$\therefore \angle ACB=\angle ABC=\angle BAC=60°$

$\therefore \angle DAB=x-60°$

$\therefore \angle EAB=x+x-60°=2x-60°$

$\because AE=AB$，

$$\therefore \angle ABE=\angle AEB=\frac{180°-2x+60°}{2}=120°-x$$

$\therefore \angle AFE=\angle DAB+\angle ABE=x-60°+120°-x=60°$

在 BE 上取点 G,使得 $FG=FA$, 连接 AG

$\therefore \triangle AFG$ 为等边三角形

$\therefore AG=AF$，$\angle GAF=60°$

$\therefore \angle GAE=\angle FAB=x-60°$

在$\triangle AGE$ 与$\triangle AFB$ 中，

$$\begin{cases} AG=AF \\ \angle GAE=\angle FAB \\ AE=AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle AFB$（$SAS$）

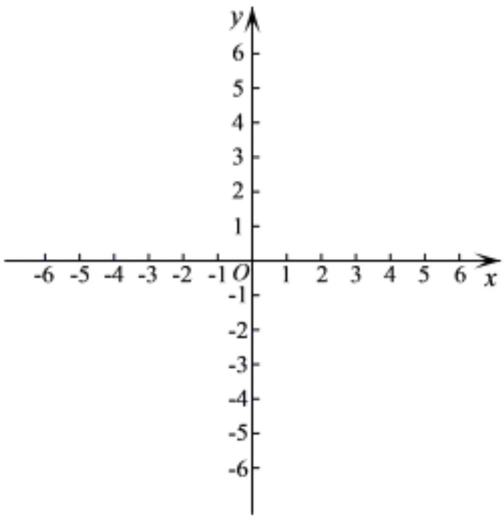
$\therefore BF=EG$

$\therefore EF=EG+FG=BF+AF$

$\therefore CF=EF=BF+AF$

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质等知识，是重要考点，难度一般，掌握相关知识是解题关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，作直线 l 垂直 x 轴于点 P（a，0），已知点A（1，1），点 B（1，5），以 AB 为斜边作等腰直角三角形 ABC，点 C 在第一象限．$\triangle ABC$ 关于直线 l 的对称图形是$\triangle A'B'C'$．给出如下定义：如果点 M 在$\triangle A'B'C'$ 上或内部，那么称点 M 是$\triangle ABC$ 关于直线 l 的“称心点”.



（1）当$a=0$时，在点D（$-\dfrac{3}{2}$，3），E（-2，2），F（-3，4）中，$\triangle ABC$关于直线l的“称心点”是___；

（2）当$\triangle ABC$上只有1个点是$\triangle ABC$关于直线l的“称心点”时, 直接写出a的值；

（3）点H是$\triangle ABC$关于直线l的“称心点”，且总有$\triangle HBC$的面积大于$\triangle ABC$的面积，求a的取值范围.

【答案】（1）点D，点E

（2）$a=3$

（3）①$a<-1$；②$a<-1$或$a>5$

【解析】

【分析】(1)由题意确定C点坐标,从而确定$A'(-1,1)$，$B'(-1,5)$，$C'(-3,3)$，即可判断$\triangle ABC$关于直线l的“称心点”；

(2)由图形的轴对称判定即可；

(3) 过点A作直线$m\,//\,BC$，延长AC至点M，使$CM=AC$，过点M作$n\,//\,BC$．分别计算当点B'在直线m上，$S_{\triangle B'BC}=S_{\triangle ABC}$时；当点$C''$在直线$n$上，$S_{\triangle C''BC}=S_{\triangle ABC}$时$a$的值，在结合$S_{\triangle HBC}>S_{\triangle ABC}$得出$a$的取值范围；

【小问1详解】

解：(1)由题意可确定C(3，3)，

当$a=0$时，$A'(-1,1)$，$B'(-1,5)$，$C'(-3,3)$

$\triangle ABC$关于直线l的“称心点”是点D，点E；

故答案为：点D，点E

【小问2详解】

解：当$\triangle ABC$上只有1个点是$\triangle ABC$关于直线l的“称心点”时，

点C在直线l上，

所以$a=3$

故答案为：$a=3$

【小问3详解】

解：过点A作直线$m\,//\,BC$，延长AC至点M，使$CM=AC$，过点M作$n\,//\,BC$.

①当点 B'在直线 m 上时，$S_{\triangle B'BC}=S_{\triangle ABC}$.

如图，此时 $BB'=AB=4$，

∴点 B'的坐标为（$-3,5$）.

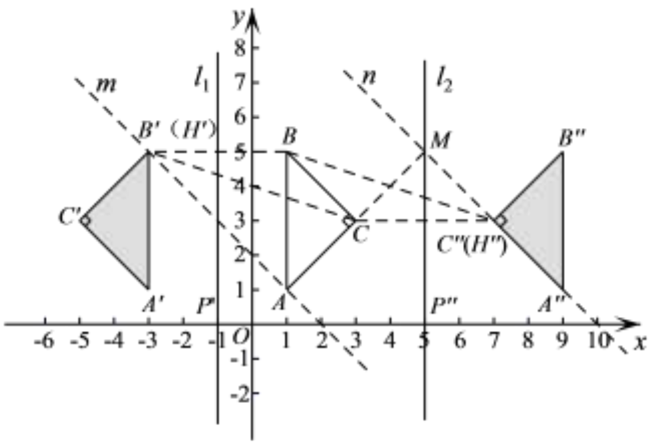
∴ $a=-1$.

∵$S_{\triangle HBC}>S_{\triangle ABC}$,

∴ $a<-1$.

②当点 C''在直线 n 上时，$S_{\triangle C''BC}=S_{\triangle ABC}$.

如图，此时 $CC''=AB=4$，



∴点 C''的坐标为（$7,3$）.

∴ $a=5$.

∵$S_{\triangle HBC}>S_{\triangle ABC}$.

∴ $a>5$.

综上所述，$a<-1$或$a>5$.

【点睛】本题考查了图形在平面直角坐标系中的轴对称，掌握图像轴对称的性质是解题的关键.