2024 北京西城高二（上）期末

数　　学

2024.1

本试卷共 5 页，共 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效.

第一部分（选择题共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.直线 $3x-4y+1=0$ 不经过（　）

A.第一象限　B.第二象限

C.第三象限　D.第四象限

2.抛物线 $x^2=6y$ 的焦点到其准线的距离等于（　）

A.$\frac{3}{2}$　B.3　C.6　D.8

3.在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，点 $A(4,-2,8)$ 到平面 xOz 的距离与其到平面 yOz 的距离的比值等于（　）

A.$\frac{1}{4}$　B.$\frac{1}{2}$　C.2　D.4

4.在 $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^3$ 的展开式中，x 的系数为（　）

A.3　B.6　C.9　D.12

5.在正四面体 $ABCD$ 中，棱 AB 与底面 BCD 所成角的正弦值为（　）

A.$\frac{\sqrt{3}}{3}$　B.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6.已知直线 a,b 和平面 α，且 $b\subset\alpha$，则“直线 a // 直线 b”是“直线 a // 平面 α”的（　）

A.充分而不必要条件　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　D.既不充分也不必要条件

7.设 A,B 为双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点，M 为双曲线 E 上一点，且 $\triangle AMB$ 为等腰三角形，顶角为 120°，则双曲线 E 的一条渐近线方程是（　）

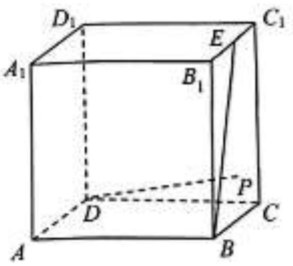
A.$y=x$　B.$y=2x$

C.$y=\sqrt{2}x$　D.$y=\sqrt{3}x$

8.在正方体的 8 个顶点中任选 3 个，则这 3 个顶点恰好不在同一个表面正方形中的选法有（　）

A.12 种　B.24 种　C.32 种　D.36 种

9.如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=3,BC=CC_1=4,E$ 为棱 B_1C_1 的中点，P 为四边形 BCC_1B_1 内（含边界）的一个动点.且 $DP\perp BE$，则动点 P 的轨迹长度为（　）



A.5　B. $2\sqrt{5}$　C. $4\sqrt{2}$　D. $\sqrt{13}$

10.在直角坐标系 xOy 内，圆 $C:(x-2)^2+(y-2)^2=1$，若直线 $l:x+y+m=0$ 绕原点 O 顺时针旋转 90° 后与圆 C 存在公共点，则实数 m 的取值范围是（　）

A. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　B. $\left[-4-\sqrt{2},-4+\sqrt{2}\right]$　C. $\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$　D. $\left[-2+\sqrt{2},2+\sqrt{2}\right]$

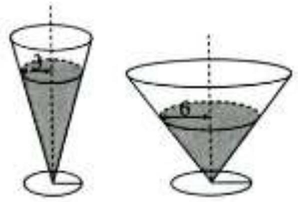
第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.过点 $A(2,-3)$ 且与直线 $x+y+3=0$ 平行的直线方程为__________.

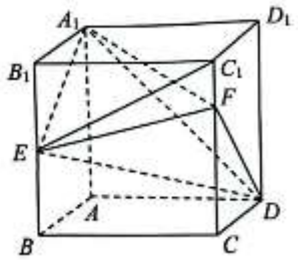
12.在 $(2x+1)^4$ 的展开式中，所有项的系数和等于__________.（用数字作答）

13.两个顶点朝下竖直放置的圆锥形容器盛有体积相同的同种液体（示意图如图所示），液体表面圆的半径分别为 3，6，则窄口容器与宽口容器的液体高度的比值等于__________.



14.若方程 $\dfrac{x^2}{m+2}+\dfrac{y^2}{4-m}=1$ 表示的曲线为双曲线，则实数 m 的取值范围是__________；若此方程表示的曲线为椭圆，则实数 m 的取值范围是__________.

15.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2,E$ 为棱 BB_1 的中点， F 为棱 CC_1（含端点）上的一个动点.给出下列四个结论：



①存在符合条件的点 F，使得 B_1F // 平面 A_1ED；

②不存在符合条件的点 F，使得 $BF\perp DE$；

③异面直线 A_1D 与 EC_1 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

④三棱锥 $F-A_1DE$ 的体积的取值范围是 $\left[\dfrac{2}{3},2\right]$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题 10 分）

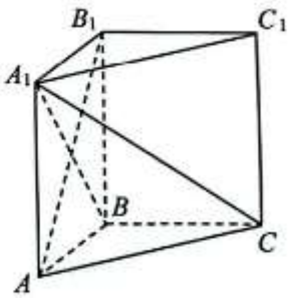
从 6 男 4 女共 10 名志愿者中，选出 3 人参加社会实践活动.

（1）共有多少种不同的选择方法？

（2）若要求选出的 3 名志愿者中有 2 男 1 女，且他们分别从事经济、文化和民生方面的问卷调查工作，求共有多少种不同的选派方法？

17.（本小题 15 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $BA\perp BC, BC=3, AB=AA_1=4$.



（1）证明：直线 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC；

（2）求二面角 $B-CA_1-A$ 的余弦值.

18.（本小题 15 分）

已知 $\odot C$ 经过点 $A(1,3)$ 和 $B(5,1)$，且圆心 C 在直线 $x-y+1=0$ 上.

（1）求 $\odot C$ 的方程；

（2）设动直线 l 与 $\odot C$ 相切于点 M，点 $N(8,0)$.若点 P 在直线 l 上，且 $|PM|=|PN|$，求动点 P 的轨迹方程.

19.（本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个焦点为 $(\sqrt{5},0)$，四个顶点构成的四边形面积等于 12.设圆 $(x-1)^2+y^2=25$ 的圆心为 M，P 为此圆上一点.

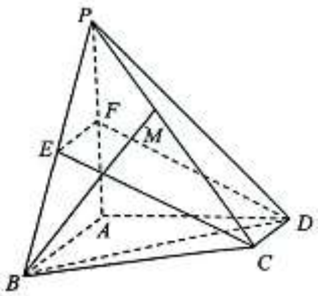
（1）求椭圆 C 的离心率；

（2）记线段 MP 与椭圆 C 的交点为 Q，求 $|PQ|$ 的取值范围.

20.（本小题 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AD\perp$ 平面 $PAB, AB\ /\!/\ DC, E$ 为棱 PB 的中点，平面 DCE 与棱 PA 相交于点 F，且 $PA=AB=AD=2CD=2$，再从下列两个条件中选择一个作为已知.

条件①： $PB=BD$；条件②： $PA\perp BC$.



（1）求证： $AB\ /\!/\ EF$；

（2）求点 P 到平面 $DCEF$ 的距离；

（3）已知点M在棱PC上，直线BM与平面$DCEF$所成角的正弦值为$\frac{2}{3}$，求$\frac{PM}{PC}$的值.

21.（本小题15分）

设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$左、右焦点分别为$F_1,F_2$，过$F_1$的直线与椭圆$C$相交于$A,B$两点.已知椭圆$C$的离心率为$\frac{1}{2}$,$\triangle ABF_2$的周长为8.

（1）求椭圆C的方程；

（2）判断x轴上是否存在一点M，对于任一条与两坐标轴都不垂直的弦AB，使得MF_1为$\triangle AMB$的一条内角平分线？若存在，求点M的坐标；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分

1.D　2.B　3.B　4.D　5.B
6.D　7.A　8.C　9.B　10.A

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

11. $x+y+1=0$　12.81　13.4

14. $(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$；$(-2,1)\cup(1,4)$　15.①②④

注：第 14 题第一问 3 分，第二问 2 分；第 15 题全部选对得 5 分，有两个选对且无错选得 3 分，有一个选对且无错选得 2 分，其他得 0 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分.其他正确解答过程，请参照评分标准给分.

16.（本小题 10 分）

解：（1）从 6 男 4 女共 10 名志愿者中，选出 3 人参加社会实践活动，

选择方法数为 $\mathrm{C}_{10}^{3}=120$ 种.

（2）从 10 名志愿者中选 2 男 1 女，选择方法数共有 $\mathrm{C}_{6}^{2}\mathrm{C}_{4}^{1}=60$ 种，

故从 10 名志愿者中选 2 男 1 女，且分别从事经济、文化和民生方面的问卷调查工作的选派方法数为

$\mathrm{C}_{6}^{2}\mathrm{C}_{4}^{1}\mathrm{A}_{3}^{3}=360$ 种.

17.（本小题 15 分）

解：（1）在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

因为 $AA_1\perp$.平面 $ABC, BC\subset$ 平面 ABC，

所以 $AA_1\perp BC$.

又因为 $BA\perp BC, BA\cap AA_1=A$，

所以 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，

所以 $BC\perp AB_1$.

由 $AB=AA_1=4$，得四边形 AA_1B_1B 为正方形.

所以 $AB_1\perp A_1B$.

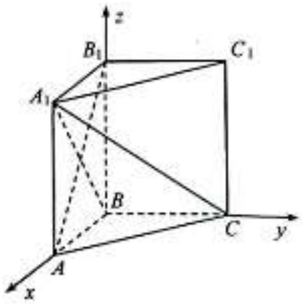
又因为 $BC\cap A_1B=B$，

所以 $AB_1\perp$ 平面 A_1BC.

（2）因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABC, BA\perp BC$，

所以 BA, BC, BB_1 两两互相垂直，

故以 B 为原点，$\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}$ 的方向分别为 x 轴、y .轴、z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $A(4,0,0),C(0,3,0),A_1(4,0,4),B_1(0,0,4)$.

所以 $\overrightarrow{AC}=(-4,3,0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$.

设平面 A_1AC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-4x+3y=0,\\ 4z=0.\end{cases}$

令 $x=3$，则 $y=4,z=0$.

于是 $\vec{m}=(3,4,0)$.

由（1）可知：$\overrightarrow{AB_1}=(-4,0,4)$ 是平面 A_1BC 的一个法向量.

因为 $\cos\left\langle\overrightarrow{AB_1},\vec{m}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{m}}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right||\vec{m}|}=\dfrac{-12}{4\sqrt{2}\times5}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$，

由图可知二面角 $B-CA_1-A$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $B-CA_1-A$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

18.（本小题 15 分）

解：（1）由题意，设 $\odot C$ 的圆心 $C(a,a+1)$，半径为 r，

则 $\begin{cases}(1-a)^2+(3-a-1)^2=r^2,\\ (5-a)^2+(1-a-1)^2=r^2.\end{cases}$

解得：$\begin{cases}a=5,\\ r=5.\end{cases}$

所以 $\odot C$ 的方程为 $(x-5)^2+(y-6)^2=25$.

（2）由平面几何，知 $\triangle PMC$ 为直角三角形，且 $PM\perp MC$，

所以 $|PM|^2+|MC|^2=|PC|^2$.

由 $|PM|=|PN|$，得 $|PN|^2+|MC|^2=|PC|^2$.

设 $P(x,y)$，则 $(x-8)^2+y^2+25=(x-5)^2+(y-6)^2$.

即 $3x-6y-14=0$，经检验符合题意.

所以动点 P 的轨迹方程为 $3x-6y-14=0$.

19.（本小题 15 分）

解：（1）由题意，得 $c=\sqrt{5},2ab=12,a^2=b^2+c^2$，

所以 $a=3,b=2$，

所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

（2）由题意，得 $|PQ|=|MP|-|MQ|=5-|MQ|$.

设 $Q(x_1,y_1)$，则 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1$.

所以 $|MQ|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+\left(4-\frac{4}{9}x_1^2\right)}=\sqrt{\frac{5}{9}\left(x_1-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{16}{5}}$，.

因为 $x_1\in[-3,3]$，

所以当 $x_1=\frac{9}{5}$ 时，$|MQ|_{\min}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$；当 $x_1=-3$ 时，$|MQ|_{\max}=4$.

所以 $|PQ|$ 的取值范围为 $\left[1,5-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right]$.

20.（本小题 15 分）

解：选择条件①：

（1）因为 $AB\ /\!/\ DC, AB\not\subset$ 平面 $DCEF, DC\subset$ 平面 $DCEF$，

所以 $AB\ /\!/$ 平面 $DCEF$.

又因为 $AB\subset$ 平面 PAB，平面 $PAB\cap$ 平面 $DCEF=EF$，

所以 $AB\ /\!/\ EF$.

（2）因为 $AD\perp$ 平面 PAB，

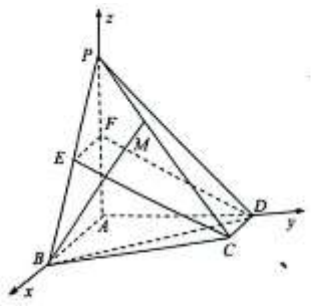
所以 $AD\perp PA, AD\perp AB$.

又因为 $PB=BD, PA=AB=AD=2CD=2$，

所以 $\triangle PAB\cong\triangle DAB$.

因此 $\angle PAB=\angle DAB=90^\circ$，即 AB, AD, AP 两两垂直.

如图，以 A 为原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立空间直角坐标系，



所以 $D(0,2,0), C(1,2,0), P(0,0,2), B(2,0,0)$.

由（1），得 $AB\ /\!/\ EF$，且 E 为棱 PB 的中点，

所以点 F 为棱 PA 的中点. $E(1,0,1), F(0,0,1)$，

故 $\overrightarrow{FP}=(0,0,1), \overrightarrow{DF}=(0,-2,1), \overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$.

设平面 $DCEF$ 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}=-2y+z=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot\vec{n}=-x=0,\end{cases}$

取 $y=1$，则 $x=0, z=2$，即 $\vec{n}=(0,1,2)$.

所以点 P 到平面 $DCEF$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{FP}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（3）设 $\dfrac{PM}{PC}=\lambda, \lambda\in[0,1]$，

则 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}=\lambda(1,2,-2)=(\lambda,2\lambda,-2\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PM}=(\lambda-2,2\lambda,2-2\lambda)$.

设直线 BM 与平面 $DCEF$ 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{BM},\vec{n}>|=\dfrac{|\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{BM}||\vec{n}|}=$

$$\frac{|0+2\lambda+4-4\lambda|}{\sqrt{(\lambda-2)^2+(2\lambda)^2+(2-2\lambda)^2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{3}.$$

化简，得 $9\lambda^2-6\lambda+1=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，

即 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{1}{3}$.

选择条件②：

（1）与上述解法相同，略.

（2）因为 $AD\perp$ 平面 PAB，

所以 $AD\perp PA, AD\perp AB$，

又因为 $PA\perp BC, BC$ 与 AD 相交，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $PA\perp AB$.

即 AB, AD, AP 两两垂直.

以下与上述解法相同，略.

21.（本小题 15 分）

解：（1）由题意，得 $\begin{cases}4a=8,\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1.\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

（2）假设 x 轴上存在一点 $M(x_0,0)$ 符合题意.

由题意，设直线 $AB: y=k(x+1)(k\neq0), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$.

联立方程$\begin{cases} y=k(x+1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$消去$y$，

得$\left(3+4k^2\right)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$.

所以$x_1+x_2=-\dfrac{8k^2}{3+4k^2}, x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$.

由题意，知直线AM的斜率存在，且为$k_{AM}=\dfrac{y_1-0}{x_1-x_0}=\dfrac{k(x_1+1)}{x_1-x_0}$，

同理，直线BM的斜率为$k_{BM}=\dfrac{y_2-0}{x_2-x_0}=\dfrac{k(x_2+1)}{x_2-x_0}$.

所以$k_{AM}+k_{BM}=\dfrac{k(x_1+1)}{x_1-x_0}+\dfrac{k(x_2+1)}{x_2-x_0}$

$=\dfrac{k\left[2x_1x_2+(x_1+x_2)-x_0(x_1+x_2)-2x_0\right]}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}$.

因为MF_1为$\triangle AMB$的一条内角平分线，

所以$k_{AM}+k_{BM}=0$.

所以$k\left[2x_1x_2+(x_1+x_2)-x_0(x_1+x_2)-2x_0\right]=0$.

因为上式要对任意非零的实数k都成立，

所以$2\times\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}-\dfrac{8k^2}{3+4k^2}+x_0\times\dfrac{8k^2}{3+4k^2}-2x_0=0$，

解得$x_0=-4$.

故x轴上存在一点$M(-4,0)$，对于任一条与两坐标轴都不垂直的弦AB，使得MF_1为$\triangle AMB$的一条内角平分线.