2023 北京顺义一中高一（上）期中

数　　学

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分，四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A=\{x|\ x<3x-1\},B=\{x|-1<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $(-1,+\infty)$　　B. $\left(\frac{1}{2},3\right)$　　C. $(-\infty,3)$　　D. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

2. 下列函数是偶函数且在 $(0,+\infty)$ 单调递减的是（　）

A. $y=x^2$　　B. $y=x$

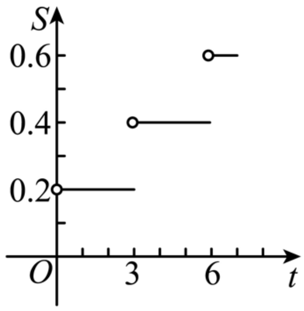
C. $y=\frac{1}{x}$　　D. $y=-x^2+1$

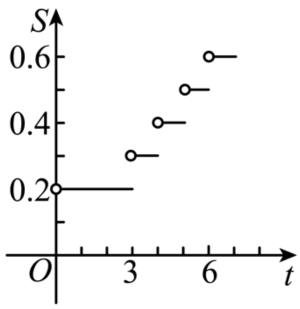
3. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数，且 $f(x)=x$，则 $g(x)$ 可以是（　）

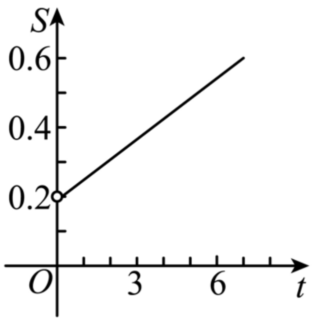
A. $g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$　　C. $g(x)=\sqrt{x^2}$　　D. $g(x)=\frac{x^2}{x}$

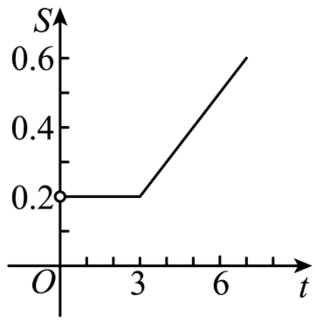
故选：B

4. 电讯资费调整后，市话费标准为：通话时间不超过 3 分钟收费 0.2 元；超过 3 分钟后，每增加 1 分钟收费 0.1 元，不足 1 分钟按 1 分钟计费.通话收费 S(元)与通话时间 t(分钟)的函数图像可表示为下图中的(　　)

A.


B.


C.


D.


5. 已知幂函数 $f(x)=x^a$ 图像经过点 $\left(3,\frac{1}{9}\right)$，则下列命题正确的有（　）

A. 函数 $f(x)$ 为偶函数

B. 函数 $f(x)$ 为增函数

C. 若 $x>1$，则 $f(x)>1$

D. 若 $0<x_1<x_2$，则 $\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

6. 已知 $p: x \geqslant k, q:(2-x)(x+1)<0$，如果 p 是 q 的充分不必要条件，则 k 的取值范围是（　）

A. $[2, \infty)$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

7. 奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=0$，则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}>0$ 的解集为（　）

A. $(-1,0) \cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1) \cup(0,1)$

C. $(-1,0) \cup(0,1)$　　D. $(-\infty,-1) \cup(1,+\infty)$

8. 已知函数 $f(x)=m x^2-m x-1$，“$\exists x \in \mathrm{R}, f(x) \geq 0$”为假命题，则实数 m 的取值范围是（　）

A. $(-4,0]$　　B. $(-4,0)$

C. $(-\infty,-4) \cup(0,+\infty)$　　D. $(-\infty,-4) \cup[0,+\infty)$

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-a x-7, x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, \quad x>1\end{cases}$，在 R 上单调递增，则实数 a 的取值范围是（　）

A. $[-4,0)$　　B. $(-\infty,-2]$　　C. $(-\infty, 0)$　　D. $[-4,-2]$

10. 定义新运算 $\oplus$ ：当 $a \geq b$ 时，$a \oplus b=a$；当 $a<b$ 时，$a \oplus b=b^2$，则函数 $f(x)=(1 \oplus x) x-(2 \oplus x), x \in[-2,2]$ 的最大值等于（　）

A. -1　　B. 1　　C. 6　　D. 12

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 $f(x)=\frac{2}{x-1}+\sqrt{2+x}$ 的定义域为__________.

12. $\sqrt{(-3)^2}+(\pi-3)^0-8^{\frac{2}{3}}+(\sqrt[3]{-4})^3=$__________.

13. 已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=x^2+\frac{1}{x}$，则 $f(-1)=$____.

14. 若偶函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减且 $f(1)=0$，则不等式 $f(x-3) \geq 0$ 的解集是_____.

15. 1859 年，我国清朝数学家李善兰将“*function*”一词译成“函数”，并给出定义：“凡此变数中函彼变数，则此为彼之函数”.

①若 $f(-2)=f(2)$，则函数 $f(x)$ 是偶函数

②若定义在 R 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增，在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则函数 $f(x)$ 在 R 上是增函数

③函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\left[a,b\right]$，$a<c<b$，若 $f(x)$ 在 $\left[a,c\right)$ 上是增函数，在 $\left[c,b\right]$ 上是减函数，则 $f(x)_{\max}=f\left(c\right)$

④对于任意的 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 满足 $\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}\le f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

上面关于函数性质的说法正确的序号是__________.（请写出所有正确答案的序号）

三、解答题（共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 已知集合 $A=\{x|2\le x\le 8\}$，$B=\{x|1<x<6\}$，$C=\{x|x>a\}$，$U=R$.

（1）求 $A\cup B$，$(\complement_U A)\cap B$；

（2）若 $A\cap C\neq\varnothing$，求 a 的取值范围.

17. 设函数 $f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{x}$.

（1）判断函数 $f\left(x\right)$ 奇偶性；

（2）当 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的最小值；

（3）直接写出函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间（不需证明过程）.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-2ax+1$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，求实数 a 的值；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,4\right]$ 上是减函数，求实数 a 的取值范围；

（3）求函数 $f\left(x\right)$ 在 $[1,2]$ 上的最小值.

19. 已知定义在区间 $\left(-1,1\right)$ 上的函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{x^2+1}$ 为奇函数.

（1）求实数 a 的值；

（2）判断函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-1,1\right)$ 上的单调性并用定义证明；

（3）解关于 t 的不等式 $f(2t-1)+f(t)<0$.

20. 2021 年 3 月 1 日，国务院新闻办公室举行新闻发布会，工业和信息化部提出了芯片发展的五项措施，进一步激励国内科技巨头加大了科技研发投入的力度．根据市场调查某数码产品公司生产某款运动手环的年固定成本为 50 万元，每生产 1 万只还需另投入 20 万元．若该公司一年内共生产该款运动手环 x 万只并能全部销售完，平均每万只的销售投入为 $R\left(x\right)$ 万元，且 $R\left(x\right)=\begin{cases}100-kx,0<x\le 20\\ \dfrac{2100}{x}-\dfrac{9000k}{x^2},x>20\end{cases}$．当该公司一年内共生产该款运动手环 5 万只并全部销售完时，年利润为 300 万元.

（1）求出 k 的值并写出年利润 W（万元）关于年产量 x（万部）的函数解析式 $W(x)$；

（2）当年产量为多少万只时，公司在该款运动手环的生产中所获得的利润最大？并求出最大利润.

21. 对于正整数集合 A，记 $A-\{a\}=\{x|x\in A, x\neq a\}$，记集合 X 所有元素之和为 $S(X)$，$S(\varnothing)=0$．若 $\exists x\in A$，存在非空集合 A_1、A_2，满足：① $A_1\cap A_2=\varnothing$；② $A_1\cup A_2=A-\{x\}$；③ $S(A_1)=S(A_2)$，则称 A 存在“双拆”．若 $\forall x\in A$，A 均存在“双拆”，称 A 可以“任意双拆”．

（1）判断集合 $\{1,2,3,4\}$ 和 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 是否存在“双拆”？如果是，继续判断可否“任意双拆”？（不必写过程，直接写出判断结果）;

（2）$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，证明：A 不能“任意双拆”；

（3）若 A 可以“任意双拆”，求 A 中元素个数的最小值．

参考答案

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分，四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1.【答案】B

【分析】化简结合 A，再应用交集的运算即可.

【详解】集合 $A\equiv\{x|\ x<3x-1\}=\{x\,|\,x>\frac{1}{2}\},B=\{x|-1<x<3\}$,则 $A\cap B=\left(\frac{1}{2},3\right)$.

故选：B

2.【答案】D

【分析】由函数的单调性与奇偶性直接判断.

【详解】对于 A，$y=x^2$ 是偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意；

对于 B，$y=x$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不符合题意；

对于 C，$y=\frac{1}{x}$ 是奇函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；

对于 D，$y=-x^2+1$ 是偶函数，在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，符合题意；

故选：D.

3.【答案】B

【分析】根据相同函数的判断法则，定义域和对应法则要相同去判断 A、D 选项函数的定义域与已知函数不同，C 选项函数的对应法则和已知函数不一样，B 选项对应法则和定义域和已知函数都一样，即可得出答案.

【详解】解：$f(x)=x$ 的定义域为 R.

A 选项：$g(x)=(\sqrt{x})^2$ 定义域为 $[0,+\infty)$，与 $f(x)=x$ 的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数，A 错误；

B 选项：$g(x)=\sqrt[3]{x^3}=x$，其定义域为 R，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数，B 正确；

C 选项：$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，与 $f(x)=x$ 对应法则不一样，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数，C 错误；

D 选项：$g(x)=\frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，与 $f(x)=x$ 的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数，D 错误.

故选：B

4.【答案】B

【详解】

【分析】由题意知，当 $0<t\le3$ 时，S=0.2.

当 $3<t\le4$ 时，S=0.2+0.1=0.3.

当 $4<t\le5$ 时，S=0.3+0.1=0.4.

……

所以对应的函数图像为B.

故选B.

5.【答案】A

【分析】代点求出解析式，即可判断A，B，C，作差法判断D.

【详解】将点$\left(3,\dfrac{1}{9}\right)$代入函数$f\left(x\right)=x^{a}$，得$\dfrac{1}{9}=3^{a}$，则$\alpha=-2$，

即$f(x)=x^{-2}$，所以是偶函数，且在$(0,+\infty)$单调递减，A正确，B错误；

当$x>1$时，$\dfrac{1}{x^{2}}<1$，即$f\left(x\right)<1$，C错误；

当$0<x_1<x_2$时，$\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}-f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}\right)-\dfrac{4}{\left(x_1+x_2\right)^2}$，

若$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}\right)-\dfrac{4}{\left(x_1+x_2\right)^2}>0$，整理得$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}>\dfrac{8}{\left(x_1+x_2\right)^2}$，

化简得$\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1^2}+\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_2^2}>8$，

即证明$\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1^2}+\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_2^2}=1+\dfrac{2x_2}{x_1}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}+\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{2x_1}{x_2}+1>8$成立，

利用基本不等式，$1+\dfrac{2x_2}{x_1}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}+\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{2x_1}{x_2}+1\geq 2+2\sqrt{4}+2=8$，

因为$0<x_1<x_2$，故等号不成立，$\therefore 1+\dfrac{2x_2}{x_1}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}+\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{2x_1}{x_2}+1>8$，

即$\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$，D错误.

故选：A

6.【答案】D

【分析】先将q化简，再根据充分不必要条件可判断得解.

【详解】$\because\left(2-x\right)\left(x+1\right)<0$，解得$x<-1$或$x>2$，

$\therefore q:x<-1$或$x>2$，

因为p是q的充分不必要条件，即p对应的集合是q对应集合的真子集，

$\therefore k>2$.

故选：D.

7.【答案】D

【分析】

本题首先可根据奇函数的性质将不等式转化为$\frac{2f\left(x\right)}{x}>0$，然后分为$x>1$、$0<x<1$、$-1<x<0$、$x<-1$以及$x=1$、$-1$五种情况进行讨论，根据函数单调性和奇偶性判断出函数值的大小，即可得出结果.

【详解】因为函数$f\left(x\right)$是奇函数，

所以$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，不等式$\frac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{x}>0$即$\frac{2f\left(x\right)}{x}>0$，

因为奇函数$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，且$f\left(1\right)=0$，

所以当$x>1$时，$f\left(x\right)>0$，此时$\frac{2f\left(x\right)}{x}>0$，

当$0<x<1$时，$f\left(x\right)<0$，此时$\frac{2f\left(x\right)}{x}<0$；

当$-1<x<0$时，$f\left(x\right)>0$，此时$\frac{2f\left(x\right)}{x}<0$；

当$x<-1$时，$f\left(x\right)<0$，此时$\frac{2f\left(x\right)}{x}>0$，

当$x=1$、-1时，$\frac{2f\quad x}{x}=0$，

综上所述，不等式$\frac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{x}>0$的解集为$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，

故选：D.

【点睛】解抽象函数解不等式方法：（1）化简不等式；（2）确定函数的单调性；（3）画出函数的草图，或求出函数的零点；（4）根据图象或单调性，求出不等式的解.

8.【答案】A

【分析】由“$\exists x\in \mathrm{R},mx^2-mx-1\geq 0$”为假命题，得到“$\forall x\in \mathrm{R},mx^2-mx-1<0$”为真命题，利用判别式法求解.

【详解】因为“$\exists x\in \mathrm{R},mx^2-mx-1\geq 0$”为假命题，

所以“$\forall x\in \mathrm{R},mx^2-mx-1<0$”为真命题，

当$m=0$时，$-1<0$成立；

当$m\neq 0$时，$\begin{cases} m<0 \\ \Delta=\left(-m\right)^2+4m<0 \end{cases}$，解得$-4<m<0$，

综上：$-4<m\leq 0$，

所以实数m的取值范围是$\left(-4,0\right]$.

故选：A.

9.【答案】D

【分析】根据分段函数的单调性的判定方法，列出不等式组，即可求解.

【详解】由函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}-x^{2}-ax-7, x\le 1\\ \dfrac{a}{x}, \quad x>1\end{cases}$ 在R上单调递增函数，

则满足 $\begin{cases}-\dfrac{a}{2}\ge 1\\ a<0\\ -1^{2}-a-7\le a\end{cases}$，解得 $-4\le a\le -2$，即实数 a 的取值范围为 $\left[-4,-2\right]$.

故选：D.

10.【答案】C

【分析】当 $-2\le x\le 1$ 和 $1<x\le 2$ 时，分别求出函数 $f\left(x\right)$ 的表达式，然后利用函数单调性或导数求出函数 $f\left(x\right)$ 的最大值.

【详解】解：由题意知

当-2≤x≤1时，f（x）=x-2，当1＜x≤2时，f（x）= x^{3}-2，

又∵f（x）=x-2，f（x）=x3-2在定义域上都为增函数，∴f（x）的最大值为f（2）= 2^{3}-2=6.

故选C.

【点睛】该题考查的是有关新定义运算以及函数最值的求解问题，在解题的过程中，需要对题中所给的条件正确转化，再者就是对函数最值的求解方法要灵活掌握.

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

11.【答案】$[-2,1)\cup(1,+\infty)$

【分析】根据函数的解析式，列出函数解析式满足的不等式组，即可求得答案.

【详解】要使 $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x-1}+\sqrt{2+x}$ 有意义，

则 $\begin{cases}x-1\ne 0\\ 2+x\ge 0\end{cases}$，解得 $x\ge -2$ 且 $x\ne 1$，

则其定义域为：$[-2,1)\cup(1,+\infty)$.

故答案为：$[-2,1)\cup(1,+\infty)$

12.【答案】-4

【分析】根据指数幂的运算性质求解即可.

【详解】$\sqrt{\left(-3\right)^{2}}+\left(\pi-3\right)^{0}-8^{\frac{2}{3}}+\left(\sqrt[3]{-4}\right)^{3}$

$=\sqrt{9}+1-\left(2^{3}\right)^{\frac{2}{3}}-4$

$=3+1-2^{3\times\frac{2}{3}}-4=-2^{2}=-4$.

故答案为：-4.

13.【答案】-2

【分析】利用奇函数的定义即可求解.

【详解】当$x>0$时，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$，故$f(1)=1+1=2$.

$\because f(x)$为奇函数，$\therefore f(-1)=-f(1)=-2$.

故答案为: -2.

14.【答案】$[2,4]$

【分析】先对$f(x-3)\geq 0$化简为$f(x-3)\geq f(1)$，然后利用函数$f(x)$为偶函数并结合其单调性质从而求解.

【详解】由题意知函数$f(x)$为偶函数，且$f(1)=0$，$f(x-3)\geq 0$,

所以得：$f(x-3)\geq f(1)$,

又因为函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，所以得：$|x-3|\leq 1$,

解之得：$2\leq x\leq 4$，即解集为：$[2,4]$.

故答案为：$[2,4]$.

15.【答案】②④

【分析】结合函数的奇偶性，单调性，最值和基本不等式应用对选项一一判断即可.

【详解】对①，偶函数是对定义域内任意x，都有$f(-x)=f(x)$，仅取$x=2$时成立，不能确定是偶函数，故①错误；

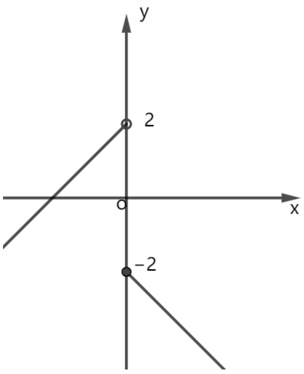
对②，定义在R上的函数$f(x)$在区间上$(-\infty,0]$单调递增，在区间$[0,+\infty)$上单调递增，其中$x=0$时两段函数图像相接，

故函数在R上是增函数，所以②正确；

对③，函数$y=f(x)$的定义域为$[a,b]$，$a<c<b$，若$f(x)$在$[a,c)$上是增函数，在$[c,b]$上是减函数，

不一定有$f(x)_{\max}=f(c)$，如当$f(x)=\begin{cases}x+2,x<0\\-x-2,x\geq 0\end{cases}$,

如图所示时，



故③错误；

对④，由基本不等式可得 $a^2+b^2\ge 2ab$，即 $2\left(a^2+b^2\right)\ge\left(a+b\right)^2$，进一步可得 $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\ge\dfrac{a+b}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，

对任意 $x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，则 $\sqrt{\dfrac{x_1+x_2}{2}}\ge\dfrac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}{2}$，当且仅当 $x_1=x_2$ 时等号成立，

由 $f\left(x\right)=\sqrt{x}$，则 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\dfrac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，故④正确

故答案为：②④.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 【答案】（1）$A\cup B=\{x|1<x\le 8\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{x|1<x<2\}$

（2）$\{a|a<8\}$

【分析】（1）根据集合的交并补的定义，即可求解；

（2）利用运算结果，结合数轴，即可求解.

【小问 1 详解】

$A\cup B=\{x|2\le x\le 8\}\cup\{x|1<x<6\}=\{x|1<x\le 8\}$.

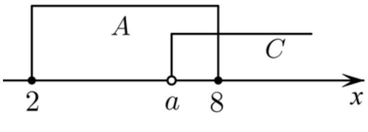
$\because \complement_U A=\{x|x<2$ 或 $x>8\}$，

$\therefore \left(\complement_U A\right)\cap B=\{x|1<x<2\}$.

【小问 2 详解】

$\because A\cap C\ne\varnothing$，作图易知，只要 a 在 8 的左边即可，

$\therefore a<8$.



$\therefore a$ 的取值范围为 $\{a|a<8\}$.

17. 【答案】（1）奇函数　（2） 4

（3） $\left(-\infty,-2\right)$ 和 $\left(2,+\infty\right)$

【分析】（1）根据函数奇偶性定义可判断；

（2）利用基本不等式可得解；

（3）根据对勾型函数的图像可得解.

【小问 1 详解】

因为函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，

又 $f\left(-x\right)=-x-\dfrac{4}{x}=-f\left(x\right)$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 是奇函数.

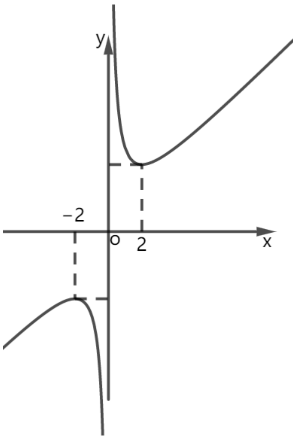
【小问 2 详解】

$\because x>0$，

$\therefore f\left(x\right)=x+\dfrac{4}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\dfrac{4}{x}$，即 $x=2$ 时等号成立，

所以 $x\in\left(0,+\infty\right)$ 时， $f\left(x\right)$ 的最小值为 4.

【小问 3 详解】



函数 $f\left(x\right)$ 的增区间为 $\left(-\infty,-2\right)$ 和 $\left(2,+\infty\right)$.

18.【答案】（1） $a=0$

（2） $\left[4,+\infty\right)$

（3） $f\left(x\right)_{\min}=\begin{cases}2-2a,a\leq 1\\1-a^2,1<a<2\\5-4a,a\geq 2\end{cases}$

【分析】（1）由偶函数定义可直接构造方程求得 a 的值；

（2）由二次函数的单调性可确定对称轴位置，由此可得 a 的取值范围；

（3）分别在 $a\leq 1$， $1<a<2$ 和 $a\geq 2$ 的情况下，根据二次函数的单调性确定最小值点，进而得到最小值.

【小问 1 详解】

$\because f\left(x\right)$ 为偶函数，$\therefore f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，即 $x^2+2ax+1=x^2-2ax+1$，

$\therefore 2a=-2a$，解得：$a=0$.

【小问 2 详解】

$\because f\left(x\right)$的对称轴为$x=a$，$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,4\right]$上是减函数，$\therefore a\geq 4$，

即实数a的取值范围为$\left[4,+\infty\right)$.

【小问 3 详解】

由题意知：$f\left(x\right)$开口方向向上，对称轴为$x=a$，

当$a\leq 1$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,2\right]$上单调递增，$\therefore f\left(x\right)_{\min}=f\left(1\right)=2-2a$；

当$1<a<2$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,a\right)$上单调递减，在$\left(a,2\right]$上单调递增，$\therefore f\left(x\right)_{\min}=f\left(a\right)=1-a^2$；

当$a\geq 2$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,2\right]$上单调递减，$\therefore f\left(x\right)_{\min}=f\left(2\right)=5-4a$；

综上所述：$f\left(x\right)_{\min}=\begin{cases}2-2a,a\leq 1\\1-a^2,1<a<2\\5-4a,a\geq 2\end{cases}$.

19.【答案】(1) $a=0$

(2) 单调递增，证明见解析

(3) $(0,\dfrac{1}{3})$

【分析】(1) 由题意$f\left(0\right)=a=0$，由此即可得解.

(2) 由定义法证之即可.

(3) 结合奇函数的单调性即可求.

【小问 1 详解】

因为定义在区间$\left(-1,1\right)$上的函数$f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{x^2+1}$为奇函数，

则$f\left(0\right)=a=0$，经验证满足题意，则$a=0$；

【小问 2 详解】

由（1）知$f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$，$f\left(x\right)$在$(-1,1)$上单调递增，

证明如下：设$-1<x_1<x_2<1$，则$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}=\dfrac{\left(x_1x_2-1\right)\left(x_2-x_1\right)}{\left(x_1^2+1\right)\left(x_2^2+1\right)}$，

其中$x_1x_2-1<0$，$x_2-x_1>0$，

所以$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$，即$f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$，

故函数$f\left(x\right)$在$(-1,1)$上单调递增.

【小问 3 详解】

由 $f(2t-1)+f(t)<0$，又 $f(x)$ 为奇函数，

即 $f(2t-1)<-f(t)=f(-t)$，

又 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，

则 $\begin{cases}2t-1<-t\\2t-1>-1\\-t<1\end{cases}$，解得 $0<t<\dfrac{1}{3}$.

则解集为 $(0,\dfrac{1}{3})$.

20.【答案】（1）$k=2$，$W(x)=\begin{cases}-2x^2+80x-50,0<x\le 20\\2050-20x-\dfrac{18000}{x},x>20\end{cases}$

（2）当年产量为 30 万只时，公司在该款运动手环的生产中所获得的利润最大，最大利润为 850 万元.

【分析】（1）由题意可得 $W(x)=xR(x)-20x-50$，由 $W(5)=300$ 可求出 k，然后可得 $W(x)$ 的解析式;

（2）利用二次函数的知识求出当 $0<x\le 20$ 时 $W(x)$ 的最大值，利用基本不等式求出当 $x>20$ 时 $W(x)$ 的最大值，然后作比较可得答案.

【小问 1 详解】

由题意可得 $W(x)=xR(x)-20x-50$

当 $x=5$ 时 $R(5)=100-5k$，所以 $W(5)=5R(5)-20\cdot 5-50=500-25k-150=300$

解得 $k=2$

所以 $W(x)=xR(x)-20x-50=\begin{cases}-2x^2+80x-50,0<x\le 20\\2050-20x-\dfrac{18000}{x},x>20\end{cases}$

【小问 2 详解】

当 $0<x\le 20$ 时，$W(x)=-2x^2+80x-50$，其对称轴为 $x=20$

所以当 $x=20$ 时 $W(x)$ 取得最大值 750 万元

当 $x>20$ 时，$W(x)=2050-20x-\dfrac{18000}{x}=2050-20\left(x+\dfrac{900}{x}\right)\le 2050-20\cdot 2\sqrt{x\cdot\dfrac{900}{x}}=850$ 万元

当且仅当 $x=\dfrac{900}{x}$ 即 $x=30$ 时等号成立

因为 $850>750$

所以当年产量为 30 万只时，公司在该款运动手环的生产中所获得的利润最大，最大利润为 850 万元.

21.【答案】（1）答案见解析

（2）证明见解析　（3）7

【分析】（1）根据题中定义判断可得出结论；

（2）不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$，利用反证法，通过讨论集合 A 中去掉的元素，结合“任意双拆”的定义得出等式，推出矛盾，即可证得原结论成立；

（3）分析可知集合 A 中每个元素均为奇数，且集合 A 中所有元素都为奇数，分析可知 $n \geq 7$，当 $n = 7$ 时，$A = \{1,3,5,7,9,11,13\}$，根据“任意分拆”的定义可判断集合 A 可“任意分拆”，即可得出结论.

【小问 1 详解】

解：对于集合 $\{1,2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\} - \{4\} = \{1,2,3\}$，且 $1+2=3$，

所以，集合 $\{1,2,3,4\}$ 可双拆，

若在集合中去掉元素 1，因为 $2+3 \neq 4$，$2+4 \neq 3$，$3+4 \neq 2$，故集合 $\{1,2,3,4\}$ 不可“任意分拆”；

若集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 可以“双拆”，则在集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 去除任意一个元素形成新集合 B，

若存在集合 B_1、B_2 使得 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$，$B_1 \cup B_2 = B$，$S(B_1) = S(B_2)$，则

$S(B) = S(B_1) + S(B_2) = 2S(B_1)$，

即集合 B 中所有元素之和为偶数，

事实上，集合 B 中的元素为 5 个奇数，这 5 个奇数的和为奇数，不合乎题意，

故集合 $\{1,3,5,7,9,11\}$ 不可“双拆”.

【小问 2 详解】

证明：不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$.

反证法：如果集合 A 可以“任意双拆”，

若去掉的元素为 a_1，将集合 $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$，①，或 $a_5 = a_2 + a_3 + a_4$，②，

若去掉的元素为 a_2，将集合 $\{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$，③，或 $a_5 = a_1 + a_3 + a_4$，④，

由①−③可得 $a_1 = a_2$，矛盾；

由②−③可得 $a_1 = -a_2$，矛盾；

由①−④可得 $a_1 = -a_2$，矛盾；

由②−④可得 $a_1 = a_2$，矛盾.

因此，当 $n = 5$ 时，集合 A 一定不能“任意双拆”.

【小问 3 详解】

解：设集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

由题意可知 $S(A) - a_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为偶数，因此 $a_i \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ 均为奇数或偶数.

如果$S\left(A\right)$为奇数，则$a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$也均为奇数，由于$S\left(A\right)=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则$n$为奇数；

如果$S\left(A\right)$为偶数，则$a_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$也均为偶数.

此时设$a_i=2b_i$，则$\left\{b_1,b_2,\cdots,b_n\right\}$也是可“任意分拆”的，

重复上述操作有限次，便可得各项均为奇数的“任意分拆”集，此时各项之和也为奇数，

则集合A中元素个数n为奇数，

综上所述，集合A中的元素个数为奇数，

当$n=3$时，显然集合$A=\left\{a_1,a_2,a_3\right\}$不可“任意分拆”；

当$n=5$时，由（2）可知，$A=\left\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\right\}$不可“任意分拆”，故$n\geq 7$.

当$n=7$时，取集合$A=\left\{1,3,5,7,9,11,13\right\}$，

因为$3+5+7+9=11+13$，$1+9+13=5+7+11$，$1+3+5+11=7+13$,$1+3+7+11=9+13$，

$1+9+11=3+5+13$，$3+7+9=1+5+13$，$1+3+5+9=7+11$，

则集合A可“任意分拆”，

所以，集合A中元素个数n的最小值为7.

【点睛】方法点睛：处理集合有关的新定义问题时，关键在于审清题意，合理将所给定义转化为元素与集合、集合与集合之间的关系来处理，本题在证明（2）中的结论时，要充分利用题中定义，结合反证法推出矛盾，进而得出结论成立.