2022 北京北师大实验中学初三 12 月月考

数　　学

一、选择题（本题共 8 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项最符合题意。每小题 2 分，共 16 分）

1．下列事件中，随机事件是（　　）

A．随意翻到一本书的某页，这页的页码是偶数

B．每年的一月份都有 31 天

C．通常温度降到 0℃以下，纯净的水结冰

D．三角形的内角和是 360°

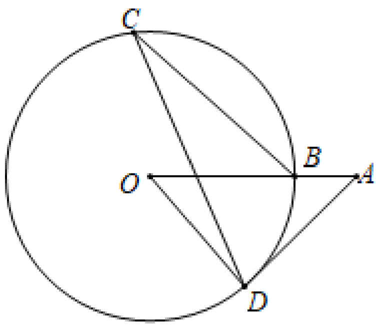
2．如果关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx-1=0$ 的一个解是 $x=1$，则 $2021-a-b$ 的值为（　　）

A．2022　　B．2021　　C．2020　　D．2019

3．不透明的袋子中有三个小球，上面分别写着数字“1”，“2”，“3”，除数字外三个小球无其他差别．从中随机摸出一个小球，记录其数字，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，记录其数字，那么两次记录的数字之和为 4 的概率是（　　）

A．$\frac{1}{4}$　　B．$\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{2}{3}$

4．如图，OA 交⊙O 于点 B，AD 切⊙O 于点 D，点 C 在⊙O 上．若 $\angle A=40°$，则 $\angle C$ 为（　　）



A．20°　　B．25°　　C．30°　　D．35°

5．若扇形的半径为 2，圆心角为 90°，则这个扇形的面积为（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　　B．3π　　C．2π　　D．π

6．抛物线 $y=ax^2-2ax-3$ 与 x 轴交于两点，分别是（m，0），（n，0），则 $m+n$ 的值为（　　）

A．2　　B．1

C．-2　　D．和 a 的大小有关

7．下列选项中，能够被半径为 1 的圆及其内部所覆盖的图形是（　　）

A．长度为 3.2 的线段

B．斜边为 3 的直角三角形

C．面积为 4 的菱形

D．半径为 1.4，圆心角为 90° 的扇形

8．在平面直角坐标系 xOy 中，点（－1，y_1），（2，y_2），（4，y_3）在抛物线 $y=ax^2-2ax+c$ 上，当 $a>0$ 时，下列说法一定正确的是（　　）

A．若 $y_1y_2<0$，则 $y_3>0$　　　　B．若 $y_2y_3>0$，则 $y_1<0$

C．若 $y_1y_3<0$，则 $y_2>0$　　　　D．若 $y_1y_2y_3=0$，则 $y_2=0$

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

9．点（2，－3）关于原点成中心对称的点坐标是 ________．

10．写出一个二次函数，其图象满足：（1）有最低点；（2）与 y 轴交于原点；（3）对称轴：直线 $x=2$，这个二次函数的解析式可以是 ________．

11．为响应国家号召打赢脱贫攻坚战，小明利用信息技术开了一家网络商店，将家乡的土特产销往全国，今年 6 月份盈利 24000 元，8 月份盈利 34560 元，求 6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率．设 6 月份到 8 月份盈利的月平均增长率为 x，根据题意，可列方程为____________．

12．某地区林业局要考察一种树苗移植的成活率，对该地区这种树苗移植成活情况进行调查统计，并绘制了统计表．

树苗数	2000	4000	6000	8000	10000	12000	14000
成活树苗数	1862	3487	5343	7234	9108	10931	12752
成活频率	0.931	0.8718	0.8905	0.9043	0.9108	0.9109	0.9109

根据统计表提供的信息解决下列问题：

（1）请估计树苗成活的概率是________（精确到小数点后第 3 位）；

（2）该地区已经移植这种树苗 5 万棵，估计这种树苗能成活________万棵．

13．筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，彰显了我国古代劳动人民的智慧，如图 1，点 P 表示筒车的一个盛水桶．如图 2，当筒车工作时，盛水桶的运行路径是以轴心 O 为圆心，5m 为半径的圆，且圆心在水面上方．若圆被水面截得的弦 AB 长为 8m，则筒车工作时，盛水桶在水面以下的最大深度为_____m．

图1

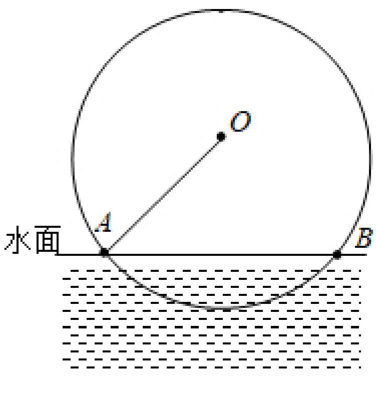
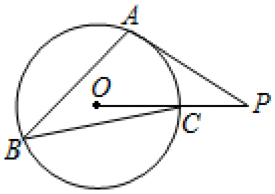
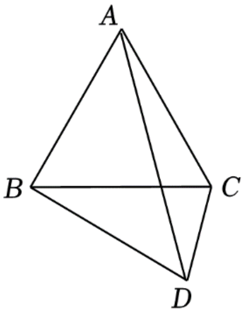


图2

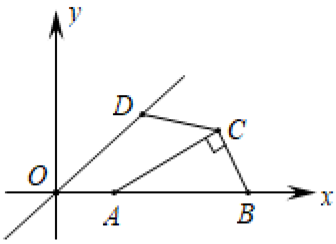
14．如图，已知⊙O 上三点 A，B，C，半径 $OC=1$，$\angle ABC=30°$，切线 PA 交 OC 延长线于点 P，则 PA 的长为__________．



15．如图，△ABC 为等边三角形，将 BC 边绕点 B 顺时针旋转 30°，得到线段 BD，连接 AD，CD，则∠ADC 的度数为 ______．



16．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A（1，0），B（3，0），C 为平面内的动点，且满足∠ACB＝90°，D 为直线 $y=x$ 上的动点，则线段 CD 长的最小值为__________．



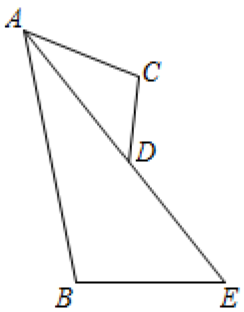
三、解答题（本题共 12 小题，第 17，18 题每题 4 分，第 19 题 7 分，第 20，22 题 5 分，第 21，23，24，25，26，27 题 6 分，第 28 题 7 分，共 68 分）

17．（4 分）解方程：$2x^2-5x+1=0$．

18．（4 分）如图，AE 平分∠BAC，D 为 AE 上一点，∠B＝∠C．

（1）求证：△ABE∽△ACD；

（2）若 D 为 AE 中点，BE＝4，求 CD 的长．



19．（7 分）二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a\neq0$）的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	…	-1	0	1	2.5	3	…
$y=ax^2+bx+c$	…	m	1	-2	n	-2	…

根据以上列表，回答下列问题：

（1）直接写出 c 的值和该二次函数图象的对称轴；

（2）求此二次函数的解析式；

（3）在（2）条件下，求当 $-1 \leqslant x \leqslant 3.8$ 时，函数值 y 的取值范围．

20．（5 分）关于 x 的一元二次方程 $x^2-mx+2m-4=0$．

（1）求证：方程总有两个实数根；

（2）若方程有一个根小于 1，求 m 的取值范围．

21．（6 分）北京世界园艺博览会（以下简称“世园会”）于 2019 年 4 月 29 日至 10 月 7 日在北京市延庆区举行．世园会为满足大家的游览需求，倾情打造了 4 条各具特色的游玩路线，如表：

A	B	C	D
漫步世园会	爱家乡•爱园艺	清新园艺之旅	车览之旅

小美和小红都计划去世园会游玩，她们各自在这 4 条路线中任意选择一条，每条路线被选择的可能性相同．

（1）求小美选择路线“清新园艺之旅”的概率；

（2）用画树状图或列表的方法，求小美和小红恰好选择同一条路线的概率．

22．（5 分）下面是小石设计的“过圆上一点作圆的切线”的尺规作图的过程．

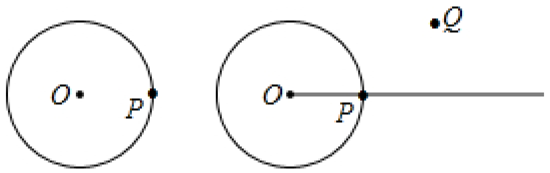


图1　图2

已知：如图 1，⊙O 及⊙O 上一点 P．

求作：直线 PN，使得 PN 与⊙O 相切．

作法：如图 2，

①作射线 OP；

②在⊙O 外取一点 Q（点 Q 不在射线 OP 上），以 Q 为圆心，QP 为半径作圆，⊙Q 与射线 OP 交于另一点 M；

③连接 MQ 并延长交⊙Q 于点 N；

④作直线 PN．

所以直线 PN 即为所求作直线．

根据小石设计的尺规作图的过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：∵MN 是⊙Q 的直径，

∴$\angle MPN=$______° ____________（填推理的依据）．

∴$OP \perp PN$．

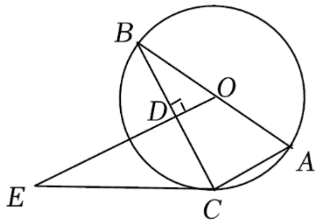
又∵OP 是⊙O 的半径，

∴PN是⊙O的切线____________（填推理的依据）.

23.（6分）如图，AB为⊙O的直径，点C在⊙O上，连接AC，BC，过点O作$OD\perp BC$于点D，过点C作⊙O的切线交OD的延长线于点E.

（1）求证：$\angle E=\angle B$；

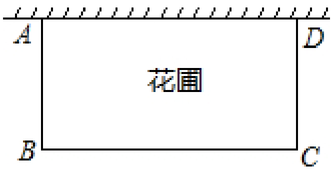
（2）连接AD，若$CE=4\sqrt{5}$，$BC=8$，求AD的长.



24.（6分）学校要围一个矩形花圃，花圃的一边利用足够长的墙，另三边用总长为36米的篱笆恰好围成（如图所示）. 设矩形的一边AB的长为x米（要求$AB<AD$），矩形$ABCD$的面积为S平方米.

（1）求S与x之间的函数关系式，并直接写出自变量x的取值范围；

（2）要想使花圃的面积最大，AB边的长应为多少米？



25.（6分）已知等边△ABC，点D为BC上一点，连接AD.

（1）若点E是AC上一点，且$CE=BD$，连接BE，BE与AD的交点为点P，在图（1）中根据题意补全图形，直接写出$\angle APE$的大小；

（2）将AD绕点A逆时针旋转120°，得到AF，连接BF交AC于点Q，在图（2）中根据题意补全图形，用等式表示线段AQ和CD的数量关系，并证明.

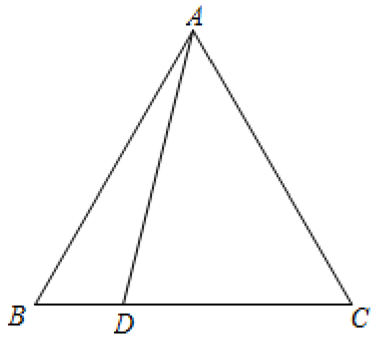


图1

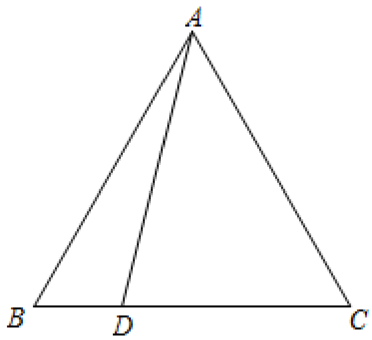


图2

26.（6分）已知抛物线$y=ax^2+bx+c$经过A（2，0），B（$3n-4$，y_1），C（$5n+6$，y_2）三点，对称轴是直线$x=1$. 关于x的方程$ax^2+bx+c=x$有两个相等的实数根.

（1）求抛物线的解析式；

（2）若$n<-5$，试比较y_1与y_2的大小；

（3）若B，C两点在直线$x=1$的两侧，且$y_1>y_2$，求n的取值范围.

27.（6分）在等腰Rt△ABC中，$AB\perp AC$，点D为AC边上一点，连结DB.

（1）如图1，若$\angle ABD=15°$，$BD=2$，求线段AD的长度；

（2）如图2，将线段DB绕点D顺时针旋转$90°$得到线段DE，连结BE、CE，将线段DC绕点D逆时针旋转$90°$得到线段DF，连结BF，线段CE、BF交于点G，连结AG，猜想线段AG、BG、CG的数量关系并证明你的结论；

（3）如图3，将线段DB绕点D顺时针旋转$60°$得到线段DE，连结AE，直接写出$\frac{AE}{AB}$的最小值．

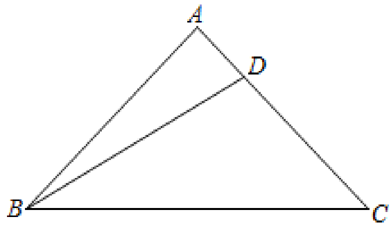


图1

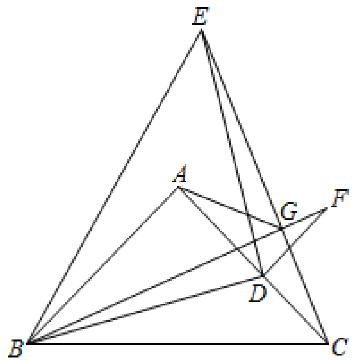


图2

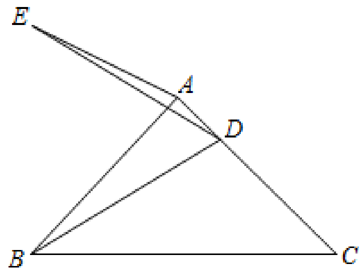


图3

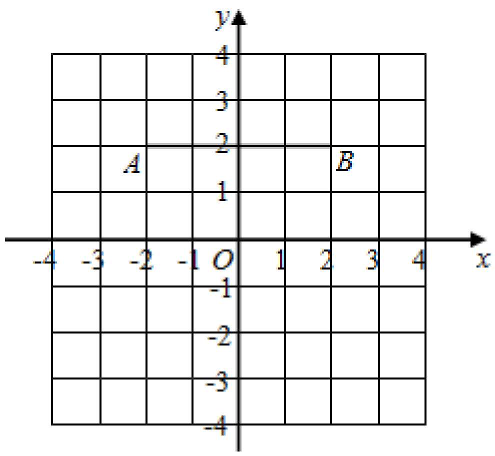
28．（7分）对于平面直角坐标系xOy中的点P和图形M，给出如下定义：若在图形M上存在点Q，使得$OQ=kOP$，k为正数，则称点P为图形M的k倍等距点．

已知点A（﹣2，2），B（2，2）．

（1）在点C（1，0），D（0，﹣2），E（1，1）中，线段AB的2倍等距点是________；

（2）画出线段AB的所有2倍等距点形成的图形（用阴影表示），并求该图形的面积；

（3）已知直线$y=-x+b$与x轴，y轴的交点分别为点F，G，若线段FG上存在线段AB的2倍等距点，直接写出b的取值范围．



参考答案

一、选择题（本题共 8 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项最符合题意。每小题 2 分，共 16 分）

1．【答案】A

【分析】根据随机事件的定义得出结论即可．

【解答】解：A 选项，随意翻到一本书的某页，这页的页码是偶数，是随机事件，故 A 选项符合题意；

B 选项，每年的一月份都有 31 天，是必然事件，故 B 选项不符合题意；

C 选项，通常温度降到 0℃以下，纯净的水结冰，是必然事件，故 C 选项不符合题意；

D 选项，三角形的内角和是 360°，是必然事件，故 D 选项不符合题意；

故选：A．

2．【答案】C

【分析】利用一元二次方程解的定义得到 $a+b=5$，然后把 $2021-a-b$ 变形为 $2021-(a+b)$，再利用整体代入的方法计算．

【解答】解：把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+bx-1=0$ 得 $a+b-1=0$，

所以 $a+b=1$，

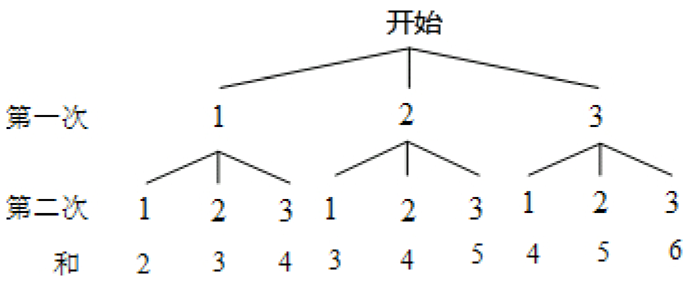
所以 $2021-a-b=2021-(a+b)=2021-1=2020$．

故选：C．

3．【答案】B

【分析】利用树状图展示所有 9 种等可能的结果数，再找出两次摸出的小球所标数字之和为 4 的结果数，然后根据概率公式求解．

【解答】解：画树状图如下：



由树状图知，共有 9 种等可能结果，其中两次摸出的小球所标数字之和为 4 的有 3 种结果，

所以两次记录的数字之和为 4 的概率是 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，

故选：B．

4．【答案】B

【分析】根据切线的性质得到 $\angle ODA=90°$，根据直角三角形的性质求出 $\angle DOA$，根据圆周角定理计算即可．

【解答】解：$\because AD$ 切⊙O 于点 D，

$\therefore OD\perp AD$，

$\therefore \angle ODA=90°$，

∵$\angle A=40^\circ$，

∴$\angle DOA=90^\circ-40^\circ=50^\circ$，

由圆周角定理得，$\angle BCD=\frac{1}{2}\angle DOA=25^\circ$，

故选：B.

5.【答案】D

【分析】直接利用扇形的面积公式计算.

【解答】解：这个扇形的面积$=\frac{90\cdot\pi\cdot 2^2}{360}=\pi$.

故选：D.

6.【答案】A

【分析】令 $ax^2-2ax-3=0$，则 m，n 为方程 $ax^2-2ax-3=0$ 的两个根，由一元二次方程的根与系数的关系求解.

【解答】解：令 $ax^2-2ax-3=0$，

则 m，n 为方程 $ax^2-2ax-3=0$ 的两个根，

∴$m+n=-\frac{-2a}{a}=2$，

故选：A.

7.【答案】D

【分析】根据半径为 1 的圆得出直径为 2，根据圆的面积、扇形面积求出圆的面积为 π，扇形面积为 0.49π，选出正确答案.

【解答】解：∵半径为 1 的圆的直径为 2，

∴半径为 1 的圆及其内部所覆盖的线段最长为 2，

∴A、B 不合题意；

∵圆的面积为 $\pi<4$，

∴C 不合题意；

扇形的面积$=\frac{90\pi\cdot 1.4^2}{360}=0.49\pi<\pi$，

∴D 符合题意；

故选：D.

8.【答案】A

【分析】根据二次函数解析式可得抛物线对称轴及开口方向，根据各点横坐标可判断 $y_3>y_1>y_2$，进而求解.

【解答】解：∵$y=ax^2-2ax+c$ 中 $a>0$，

∴抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$，

$\because 4-1>1-(-1)>2-1$，

$\therefore y_3>y_1>y_2$，

当 $y_1y_2<0$ 时，y_1，y_2 异号，

$\therefore y_1>0$，$y_2<0$，

$\therefore y_3>y_1>0$，选项 A 正确．

当 $y_3>y_1>y_2>0$ 时，$y_2y_3>0$，

∴选项 B 错误，

当 $y_1y_3<0$ 时，$y_3>0$，$y_1<0$，

$\therefore y_2<y_1<0$，选项 C 错误．

当 $y_1y_2y_3=0$ 时，y_1，y_2，y_3 中有 1 个值为 0 即可，

∴选项 D 错误．

故选：A．

二、填空题（本题共 8 小题，每小题 2 分，共 16 分）

9．**【答案】**（﹣2，3）．

【分析】根据“关于原点对称的点，横坐标与纵坐标都互为相反数”解答．

【解答】解：点 M（2，﹣3）关于原点成中心对称的点的坐标是（﹣2，3）．

故答案为：（﹣2，3）．

10．**【答案】**$y=x^2-4x$．（答案不唯一）

【分析】由抛物线经过原点可设抛物线解析为 $y=ax^2+bx$，由抛物线有最低点可得 $a>0$，由抛物线的对称轴可得 a 与 b 的数量关系，进而求解．

【解答】解：由抛物线经过原点可设抛物线解析为 $y=ax^2+bx$，

由抛物线有最低点可得 $a>0$，

由抛物线对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=2$ 可得 $b=-4a$，

$\therefore y=x^2-4x$ 符合题意，

故答案为：$y=x^2-4x$．（答案不唯一）

11．**【答案】**$24000(1+x)^2=34560$．

【分析】设月平均增长率为 x，根据 6 月及 8 月的盈利，即可得出关于 x 的一元二次方程，此题得解．

【解答】解：设月平均增长率为 x，

根据题意得：$24000(1+x)^2=34560$．

故答案为：$24000(1+x)^2=34560$．

12．**【答案】**（1）0.911；

（2）4.555．

【分析】（1）根据表格中的数据和概率的含义，可以估计出树苗成活的概率；

（2）根据题目中的数据和（1）中的概率，可以估计这种树苗能成活多少万棵．

【解答】解：（1）由表格中的数据可得，

计树苗成活的概率是 0.911，

故答案为：0.911；

（2）由题意可得，

估计这种树苗能成活：$5\times0.911=4.555$（万棵），

故答案为：4.555．

13．【答案】见试题解答内容

【分析】过O点作半径$OD\perp AB$于E，如图，由垂径定理得到$AE=BE=4$，再利用勾股定理计算出OE，然后即可计算出DE的长．

【解答】解：过O点作半径$OD\perp AB$于E，如图，

$\therefore AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times8=4$，

在 Rt△AEO中，$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

$\therefore ED=OD-OE=5-3=2$（$m$），

答：筒车工作时，盛水桶在水面以下的最大深度为 $2m$．

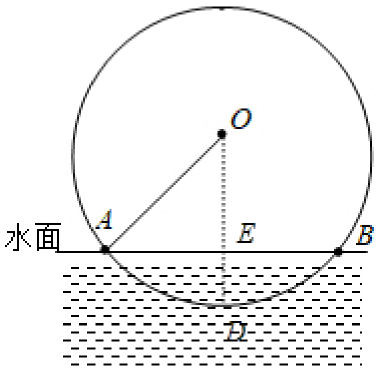


图2

14．【答案】见试题解答内容

【分析】连接 OA，根据圆周角定理求出$\angle AOP$，根据切线的性质求出$\angle OAP=90°$，解直角三角形求出AP即可．

【解答】解：连接OA，

$\because\angle ABC=30°$，

$\therefore\angle AOC=2\angle ABC=60°$，

$\because$过点A作⊙O的切线交OC的延长线于点P，

$\therefore\angle OAP=90°$，

$\because OA=OC=1$，

$\therefore AP=OA\tan60°=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{3}$．

15．【答案】30°．

【分析】由旋转的性质可得$\angle CBD=30°$，$BC=BD$，由等腰三角形的性质可求$\angle BDC=75°$，$\angle ADB=45°$，即可求解.

【解答】解：∵$\triangle ABC$是等边三角形，

∴$AB=BC=AC$，$\angle ABC=60°$，

∵将BC边绕点B顺时针旋转30°，得到线段BD，

∴$\angle CBD=30°$，$BC=BD$，

∴$\angle ABD=90°$，$BC=BD=AB$，$\angle BDC=75°$，

∴$\angle ADB=45°$，

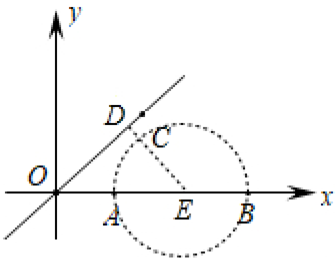
∴$\angle ADC=30°$，

故答案为：30°.

16.【答案】见试题解答内容

【分析】取AB的中点E，过点E作直线$y=x$的垂线，垂足为D，求出DE长即可求出答案.

【解答】解：取AB的中点E，过点E作直线$y=x$的垂线，垂足为D，



∵点A（1，0），B（3，0），

∴$OA=1$，$OB=3$，

∴$OE=2$，

∴$ED=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$，

∵$\angle ACB=90°$，

∴点C在以AB为直径的圆上，

∴线段CD长的最小值为$\sqrt{2}-1$.

故答案为：$\sqrt{2}-1$.

三、解答题（本题共12小题，第17，18题每题4分，第19题7分，第20，22题5分，第21，23，24，25，26，27题6分，第28题7分，共68分）

17.【答案】见试题解答内容

【分析】先观察再确定方法解方程，此题采用公式法比较简单.

【解答】解：∵$a=2$，$b=-5$，$c=1$，

∴$b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=17>0$，

∴$x=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$，

$\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$，$x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

18.【答案】（1）证明过程见解答；

（2）2.

【分析】（1）根据角平分线定义可得$\angle BAE=\angle CAD$，进而可以证明结论；

（2）结合（1），根据相似三角形的性质即可求解.

【解答】（1）证明：$\because AE$平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAE=\angle CAD$，

$\because \angle B=\angle C$.

$\therefore \triangle ABE\backsim\triangle ACD$；

（2）解：$\because D$为AE中点，$BE=4$，

$\therefore AE=2AD$，

$\because \triangle ABE\backsim\triangle ACD$，

$\therefore \frac{BE}{CD}=\frac{AE}{AD}$，

$\therefore \frac{4}{CD}=\frac{2AD}{AD}$，

$\therefore CD=2$.

19.【答案】（1）$c=1$，对称轴为直线$x=2$；

（2）$y=x^2-4x+1$；

（3）当$-1\leqslant x\leqslant 3.8$时，函数值$y$的取值范围是$-3\leqslant y\leqslant 6$.

【分析】（1）根据表格中对应值可知对称轴的值和抛物线与y轴的交点，即可求得c的值；

（2）根据待定系数法求得即可；

（3）根据二次函数的性质以及图象上点的坐标特征即可求解.

【解答】解：（1）根据图表可知：$x=0$时，$y=1$，

$\therefore c=1$，

二次函数$y=ax^2+bx+c$的图象过点（1，-2），（3，-2），

$\therefore$对称轴为直线$x=\frac{1+3}{2}=2$；

（2）$\because$抛物线经过点（0，1），（1，-2），（3，-2），

代入$y=ax^2+bx+c$得$\begin{cases}c=1\\a+b+c=-2\\9a+3b+c=-2\end{cases}$，

解得$\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=1\end{cases}$，

$\therefore$此二次函数的解析式为$y=x^2-4x+1$；

（3）函数 $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$，，

∴抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=2$，

∴函数的最小值为 -3，

∵$x=-1$ 时，$y=x^2-4x+1=6$，

∴当 $-1\leqslant x\leqslant 3.8$ 时，函数值 y 的取值范围是 $-3\leqslant y\leqslant 6$．

20.【答案】（1）见解答；

（2）$m<3$．

【分析】（1）计算判别式的值，利用配方法得到 $\Delta=(m-4)^2$，根据非负数的性质得到 $\triangle\geqslant 0$，然后根据判别式的意义得到结论．

（2）利用求根公式得到 $x_1=m-2$，$x_2=2$．根据题意得到 $m-2<1$．即可求得 $m<3$．

【解答】（1）证明：∵$a=1$，$b=-m$，$c=2m-4$，

∴ $\Delta=b^2-4ac$

$=(-m)^2-4(2m-4)$

$=m^2-8m+16$

$=(m-4)^2\geqslant 0$，

∴此方程总有两个实数根．

（2）解：∵ $\Delta=(m-4)^2\geqslant 0$，

∴$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{m\pm|m-4|}{2}$．

∴$x_1=m-2$，$x_2=2$．

∵此方程有一个根小于 1．

∴$m-2<1$．

∴$m<3$．

21.【答案】见试题解答内容

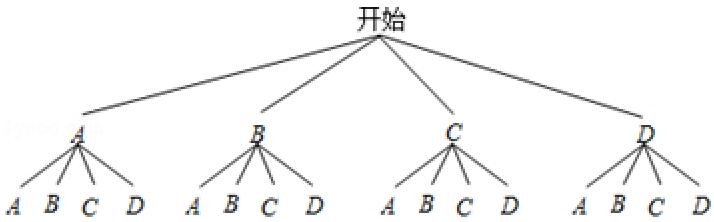
【分析】（1）由概率公式即可得出结果；

（2）画出树状图，共有 16 种等可能的结果，小美和小红恰好选择同一线路游览的结果有 4 种，由概率公式即可得出结果．

【解答】解：（1）在这四条线路任选一条，每条被选中的可能性相同，

∴在四条线路中，小美选择路线“清新园艺之旅”的概率$\dfrac{1}{4}$；

（2）画树状图如下：



共有 16 种等可能的结果，小美和小红恰好选择同一线路游览的结果有 4 种，

则小美和小红恰好选择同一线路游览的概率为$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

22.【答案】(1) 作图见解析部分.

(2) 90，直径所对的圆周角是直角，经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

【分析】(1) 根据要求画出图形即可.

(2) 证明 $OP\perp PN$ 即可解决问题.

【解答】解：(1) 补全图形如图：

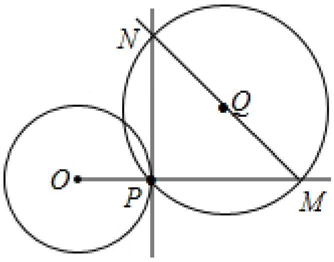


图2

(2) ∵MN 是⊙Q 的直径，

∴$\angle MPN=90°$ （直径所对的圆周角是直角），

∴$OP\perp PN$，

又∵OP 是⊙O 的半径，

∴PN 是⊙O 的切线（经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线）(填推理的依据).

故答案为：90，直径所对的圆周角是直角，经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

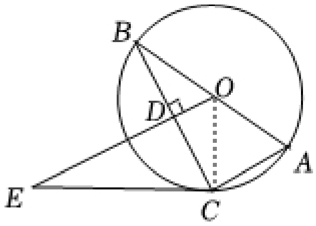
23.【答案】(1) 证明过程见解答；

(2) $4\sqrt{2}$.

【分析】(1) 连接 OC，根据切线的性质和等腰三角形的性质即可解决问题；

(2) 根据垂径定理可得 $BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$，由勾股定理可得 DE 的长，然后证明$\triangle ACB\cong\triangle CDE$，进而可以解决问题.

【解答】(1) 证明：如图，连接 OC，



∵EC是⊙O的切线，

∴$\angle OCE=90°$，

∵$OD\perp BC$，

∴$\angle EDC=90°$，

∴$\angle OCD+\angle ECD=\angle E+\angle ECD=90°$，

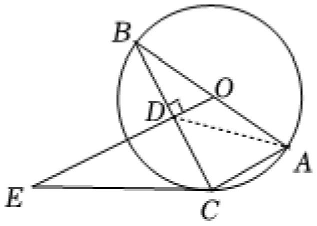
∴$\angle OCD=\angle E$，

∵$OB=OC$，

∴$\angle OCD=\angle B$，

∴$\angle E=\angle B$；

（2）解：如图，连接AD，



∵$OD\perp BC$，

∴$BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$，

∴$DE=\sqrt{EC^2-CD^2}=\sqrt{(4\sqrt{5})^2-4^2}=8$，

∴$BC=DE=8$，

∵AB为⊙O的直径，

∴$\angle ACB=90°$，

∴$\angle ACB=\angle CDE=90°$，

∵$\angle B=\angle E$，

∴$\triangle ACB\cong\triangle CDE$（$ASA$），

∴$AC=CD=4$，

∴$AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=4\sqrt{2}$.

24.【答案】见试题解答内容

【分析】（1）因为$AB=x$米，所以BC为（$36-2x$）米，由长方形的面积列式即可；

（2）将（1）中的二次函数进行配方即可化为顶点式．$y=a(x-h)^2+k$，因为$a=-2<0$抛物线开口向下，函数有最大值，即当$x=h$时，取得最大值．

【解答】解：（1）∵四边形$ABCD$是矩形，AB的长为x米，

∴$CD=AB=x$（米）．

∵矩形除AD边外的三边总长为36米，

∴$BC=36-2x$（米）．…（1分）

∴$S=x(36-2x)=-2x^2+36x$．…（3分）

自变量 x 的取值范围是 $0<x<12$．…（4 分）

（说明：由 $0<x<36-2x$ 可得 $0<x<12$．）

（2）∵$S=-2x^2+36x=-2(x-9)^2+162$，且 $x=9$ 在 $0<x<12$ 的范围内，

∴当 $x=9$ 时，S 取最大值．

即 AB 边的长为 9 米时，花圃的面积最大．…（5 分）

25.【答案】见试题解答内容

【分析】（1）根据全等三角形性质和三角形外角的性质即可得到结论；

（2）根据全等三角形的性质得到 $\angle BAD=\angle CBE$，根据三角形的外角的性质得到 $\angle APE=\angle BAD+\angle ABP=\angle CBE+\angle ABP=\angle ABC=60°$．根据旋转的性质得到 $AF=AD$，$\angle DAF=120°$．根据全等三角形的性质得到 $AQ=QE$，于是得到结论．

【解答】（1）补全图形图 1，

证明：在△ABD 和△BEC 中，$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABD=\angle C=60°\\ BD=CE\end{cases}$

∴△ABD≌△BEC（SAS）

∴$\angle BAD=\angle CBE$．

∵$\angle APE$ 是△ABP 的一个外角，

∴$\angle APE=\angle BAD+\angle ABP=\angle CBE+\angle ABP=\angle ABC=60°$；

（2）补全图形图 2，$AQ=\dfrac{1}{2}CD$，

证明：在△ABD 和△BEC 中，$\begin{cases}AB=BC\\ \angle ABD=\angle C=60°\\ BD=CE\end{cases}$

∴△ABD≌△BEC（SAS）

∴$\angle BAD=\angle CBE$，

∵$\angle APE$ 是△ABP 的一个外角，

∴$\angle APE=\angle BAD+\angle ABP=\angle CBE+\angle ABP=\angle ABC=60°$．

∵AF 是由 AD 绕点 A 逆时针旋转 120° 得到，

∴$AF=AD$，$\angle DAF=120°$．

∵$\angle APE=60°$，

∴$\angle APE+\angle DAF=180°$．

∴$AF\parallel BE$，

∴$\angle 1=\angle F$，

∵△ABD≌△BEC，

∴$AD=BE$．

$\therefore AF=BE$.

在△AQF和△EQB中，$\begin{cases}\angle 1=\angle F\\ \angle AQF=\angle EQB\\ AF=BE\end{cases}$

△AQF≌△EQB（AAS），

$\therefore AQ=QE$，

$\therefore AQ=\frac{1}{2}AE$，

$\because AE=AC-CE$，$CD=BC-BD$，

且$AC=BC$，$CE=BD$.

$\therefore AE=CD$，

$\therefore AQ=\frac{1}{2}CD$.

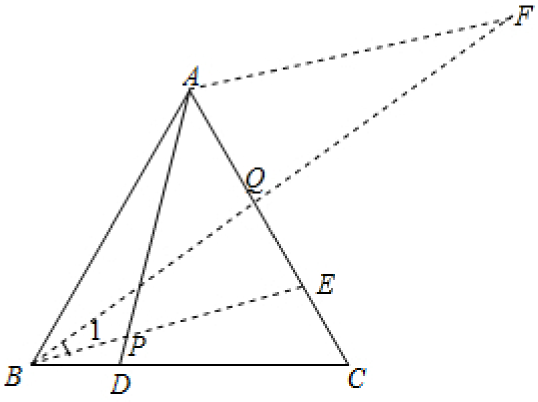


图2

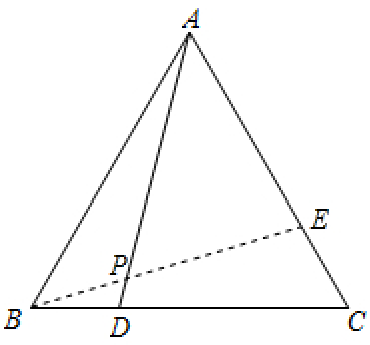


图1

26.【答案】（1）抛物线的解析式为$y=-\frac{1}{2}x^2+x$；

（2）$y_1>y_2$；

（3）$0<n<\frac{5}{3}$.

【分析】（1）由题意可得$0=4a+2b+c$①，$-\frac{b}{2a}=1$②，$\Delta=(b-1)^2-4ac=0$③，联立方程组可求a，b，c，可求解析式；

（2）由$n<-5$，可得点B，点C在对称轴直线$x=1$的左侧，由二次函数的性质可求解；

（3）分两种情况讨论，列出不等式组可求解.

【解答】解：（1）∵抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A（2，0），

∴$0=4a+2b+c$①，

∵对称轴是直线 $x=1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=1$②，

∵关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=x$ 有两个相等的实数根，

∴ $\Delta=(b-1)^2-4ac=0$③，

由①②③可得：$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x$；

（2）∵$n<-5$，

∴$3n-4<-19$，$5n+6<-19$

∴点 B，点 C 在对称轴直线 $x=1$ 的左侧，

∵抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+x$，

∴ $-\frac{1}{2}<0$，即 y 随 x 的增大而增大，

∵ $(3n-4)-(5n+6)=-2n-10=-2(n+5)>0$，

∴$3n-4>5n+6$，

∴$y_1>y_2$；

方法二‘

∵B（$3n-4$，y_1），C（$5n+6$，y_2）在抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+x$ 上，

∴$y_1=-\frac{1}{2}(3n-4)^2+(3n-4)=-\frac{9}{2}n^2+15n-12$，

$y_2=-\frac{1}{2}(5n+6)^2+(5n+6)=-\frac{25}{2}n^2-25n-12$，

∴$y_1-y_2=8n(n+5)$，

∵$n<-5$，

∴$8n<0$，$n+5<0$，

∴$y_1-y_2=8n(n+5)>0$，

∴$y_1>y_2$.

（3）若点 B 在对称轴直线 $x=1$ 的左侧，点 C 在对称轴直线 $x=1$ 的右侧时，

由题意可得$\begin{cases}3n-4<1\\5n+6>1\\1-(3n-4)<5n+6-1\end{cases}$，

∴$0<n<\frac{5}{3}$，

若点 C 在对称轴直线 $x=1$ 的左侧，点 B 在对称轴直线 $x=1$ 的右侧时，

由题意可得：$\begin{cases}3n-4>1\\5n+6<1\\3n-4-1<1-(5n+6)\end{cases}$，

∴不等式组无解，

综上所述：$0<n<\frac{5}{3}$.

27. 【答案】（1）$\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$；（2）$BG=CG+\sqrt{2}AG$；（3）$\frac{1}{2}$.

【分析】（1）作 $DE\perp BC$ 于 E，则解 Rt△BDE 和 Rt△CDE，即可解决问题；

（2）首先利用 SAS 证明△BDF≌△EDC，得∠BGE=∠BDE=90°，作 $AH\perp AG$，交 BG 于 H，再利用 ASA 证明△ABH≌△ACG，得 $CG=BH$，$AH=AG$，从而得出结论；

（3）以 AB 为边作等边三角形 ABP，连接 BE，PE，利用 SAS 证明△EBP≌△DBA，则∠BPE=∠BAD=90°，可知点 E 在射线 PE 上运动，从而解决问题.

【解答】解：（1）作 $DE\perp BC$ 于 E，

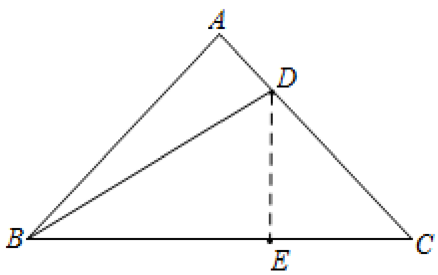


图1

∵△ABC 是等腰直角三角形，

∴∠ABC=∠C=45°，

∵∠ABD=15°，

∴∠DBC=30°，

∴$DE=\frac{1}{2}BD=1$，$BE=\sqrt{3}$，

∴$CE=DE=1$，

∴$CD=\sqrt{2}$，

∵$BC=BE+CE=\sqrt{3}+1$，

∴$AC=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore AD=AC-CD=\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

（2）$BG=CG+\sqrt{2}AG$，

$\because$将线段 DB 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到线段 DE，

$\therefore BD=DE$，$\angle BDE=90°$，

$\because$将线段 DC 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到线段 DF，

$\therefore CD=DF$，$\angle CDF=90°$，

$\therefore \angle BDF=\angle CDE$，

$\therefore \triangle BDF\cong\triangle EDC$（$SAS$），

$\therefore \angle DBF=\angle DEG$，

$\therefore \angle BGE=\angle BDE=90°$，

作 $AH\perp AG$，交 BG 于 H，

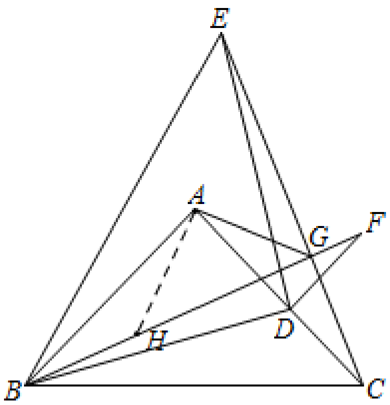


图2

$\because \angle BAC=\angle HAG=90°$，

$\therefore \angle BAH=\angle CAG$，

$\because \angle BAC=\angle BGC=90°$，

$\therefore \angle ABH=\angle ACG$，

又$\because AB=AC$，

$\therefore \triangle ABH\cong\triangle ACG$（$ASA$），

$\therefore CG=BH$，$AH=AG$，

$\therefore \triangle AHG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore HG=\sqrt{2}AG$，

$\therefore BG=CG+\sqrt{2}AG$；

（3）如图，以 AB 为边作等边三角形 ABP，连接 BE，PE，

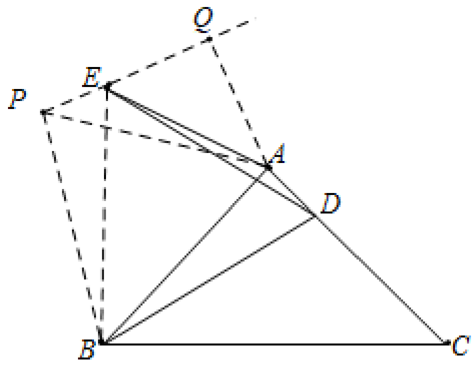


图3

∵△BAP和△BDE是等边三角形，

∴$BE=BD$，$BA=BP$，∠EBP=∠DBA，

∴△EBP≌△DBA（SAS），

∴∠BPE=∠BAD=90°，

∴∠APE=30°，

∴点E在射线PE上运动，

作$AQ\perp PE$，交PE的延长线于Q，

当点E与Q重合时，AE最小，

∴$\frac{AE}{AB}$的最小值为$\frac{AQ}{AP}=\frac{1}{2}$.

28.【答案】（1）C，E.

（2）如图2所示，所求的面积为π.

（3）$-2\leqslant b\leqslant -1$或$1\leqslant b\leqslant 2$.

【分析】（1）画图，先确定线段OQ的取值范围是$2\leqslant OQ\leqslant 2\sqrt{2}$，从而确定$OP$的取值范围是$1\leqslant OP\leqslant \sqrt{2}$.

（2）观察点P在平面上的位置，即到点O的距离最大为$\sqrt{2}$，最小为1的点的运动范围，画出图形，求出面积.

（3）直线$y=-x+b$中的b是变量，-1是常量，直线$y=-x$平移的位置由b决定，也决定了与（2）中的阴影部分是否有公共点；还要注意这里的线段FG只是直线$y=-x+b$的一部分；还要进行分类讨论，避免丢解.

【解答】解：（1）由题意可知，点Q与点A重合时OQ最大为$2\sqrt{2}$，当点Q在y轴上是最小为2，即$2\leqslant OQ\leqslant 2\sqrt{2}$，

∴由$2\leqslant OP\leqslant 2\sqrt{2}$，得$1\leqslant OP\leqslant 2$，如图1.

点C（1，0），D（0，-2），E（1，1）中只有C、E符合要求，故选C、E.

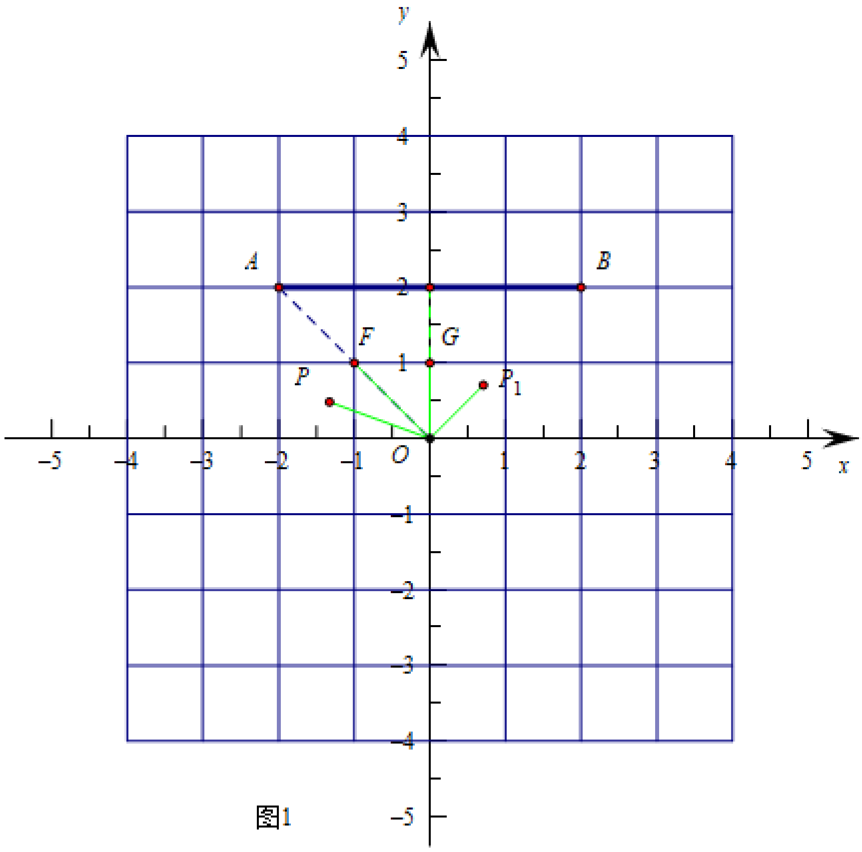


图1

（2）如图 2，线段 AB 的所有 2 倍等距点构成的图形为以点 O 为圆心，分别以 1 和$\sqrt{2}$为半径的同心圆形成的环形．

$S=\pi\times(\sqrt{2})^2-\pi\times1^2=\pi$．

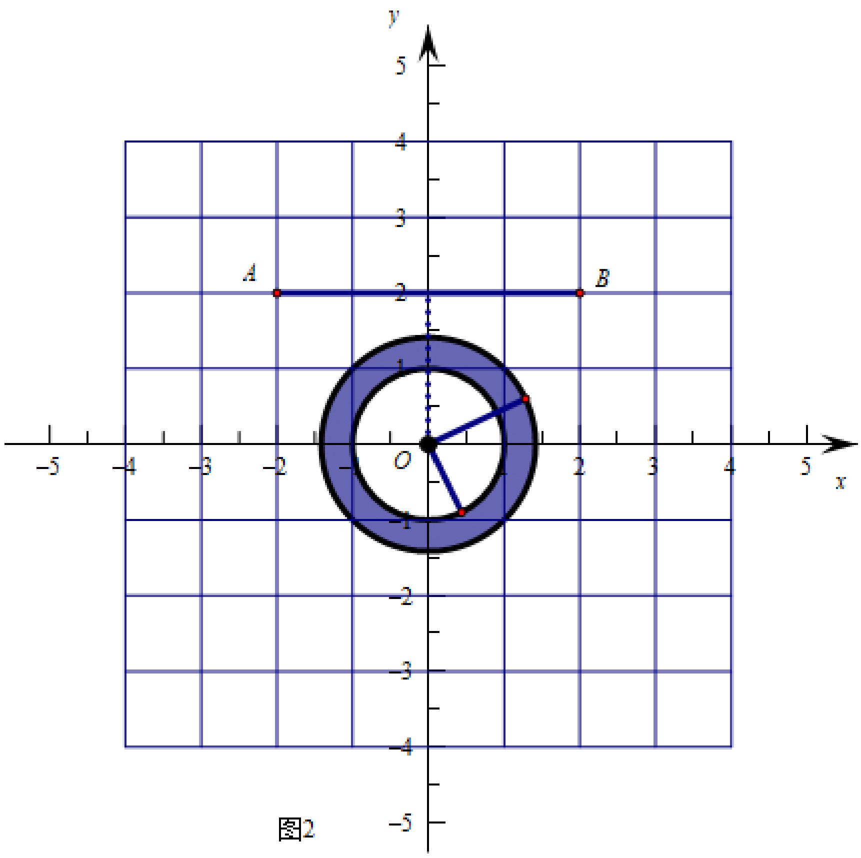


图2

（3）直线 $y=-x+b$ 由直线 $y=-x$ 平移得到，与坐标轴成 45° 角．

如图 3，当 $b<0$ 时，直线过点（-1，-1）时，b 的值最小，由 $-1=-(-1)+b$ 得，$b=-2$；当直线过

点（0，-1）时，$b=-1$，∴ $-2\leqslant b\leqslant -1$．

当 $b>0$ 时，直线过 点（0，1）时，$b=1$；直线过点（1，1）时，b 的值最大，由 $1=-1+b$ 得，$b=2$．

综上所述，$-2\leqslant b\leqslant -1$ 或 $1\leqslant b\leqslant 2$．

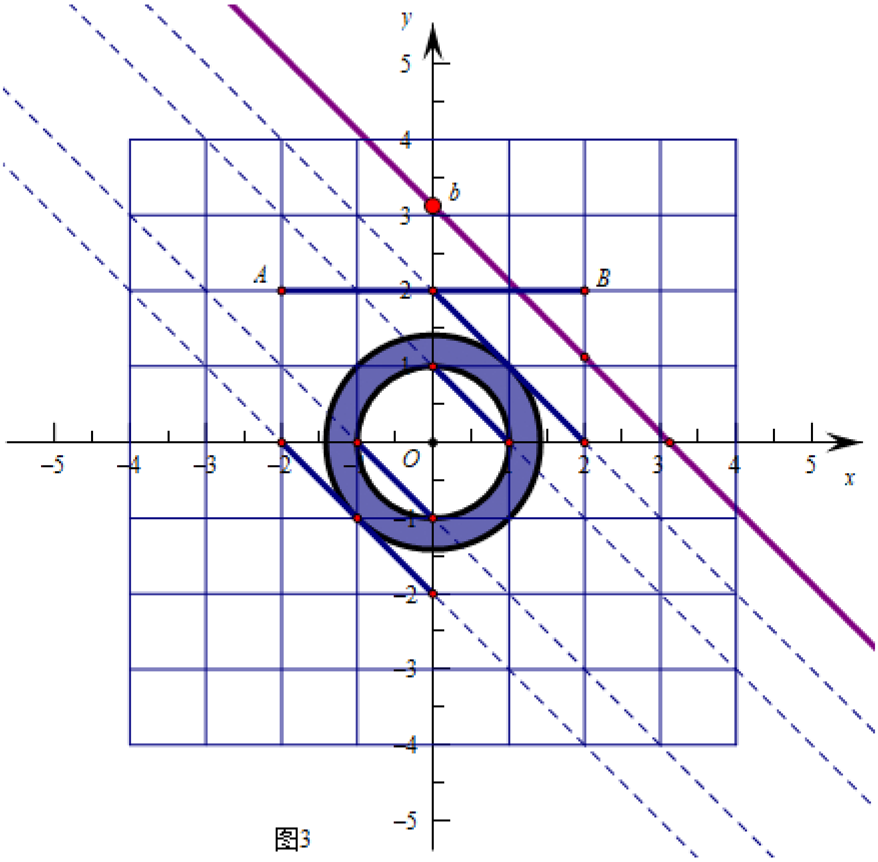


图3