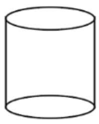
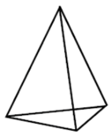
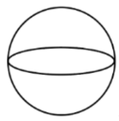
2022 北京中考真题

数　　学

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

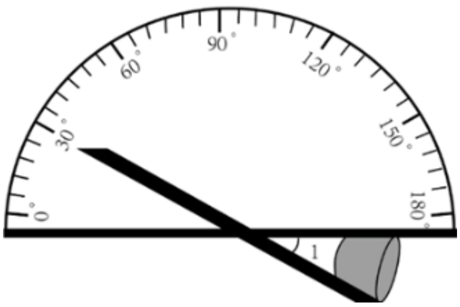
1. 下面几何体中，是圆锥的为（　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

2. 截至 2021 年 12 月 31 日，长江干流六座梯级水电站全年累计发电量达 2628．83 亿千瓦时，相当于减排二氧化碳约 2.2 亿吨．将 262 883 000 000 用科学记数法表示应为（　）

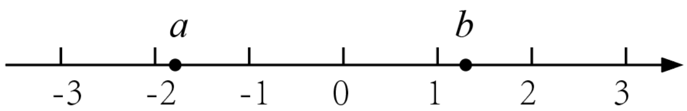
A. 26.2883×10^{10}　　B. 2.62883×10^{11}　　C. 2.62883×10^{12}　　D. 0.262883×10^{12}

3. 如图，利用工具测量角，则 $\angle1$ 的大小为（　）



A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

4. 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a<-2$　　B. $b<1$　　C. $a>b$　　D. $-a>b$

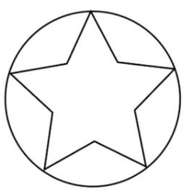
5. 不透明的袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外两个小球无其他差别，从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么第一次摸到红球、第二次摸到绿球的概率是（　）

A $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有两个相等的实数根，则实数 m 的值为（　）

A. -4　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 4

7. 图中的图形为轴对称图形，该图形的对称轴的条数为（　）



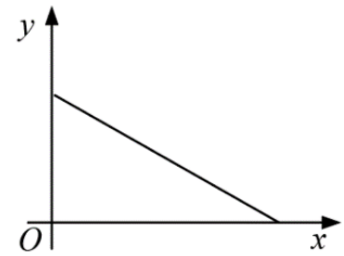
A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

8. 下面　三个问题中都有两个变量：

①汽车从 A 地匀速行驶到 B 地，汽车的剩余路程 y 与行驶时间 x；

②将水箱中的水匀速放出，直至放完，水箱中的剩余水量 y 与放水时间 x；

③用长度一定的绳子围成一个矩形，矩形的面积 y 与一边长 x，其中，变量 y 与变量 x 之间的函数关系可以利用如图所示的图象表示的是（　）



A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

第二部分 非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若 $\sqrt{x-8}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是___________.

10. 分解因式：$xy^2-x=$______.

11. 方程 $\frac{2}{x+5}=\frac{1}{x}$ 的解为___________.

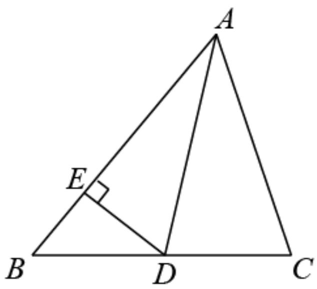
12. 在平面直角坐标系 xOy 中，若点 $A(2,y_1),B(5,y_2)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象上，则 y_1______y_2（填“>”“=”或“<”）

13. 某商场准备进 400 双滑冰鞋，了解了某段时间内销售的 40 双滑冰鞋的鞋号，数据如下：

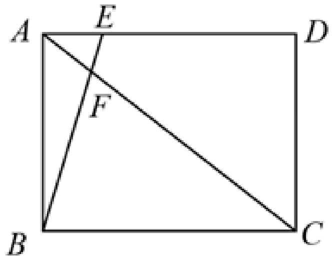
鞋号	35	36	37	38	39	40	41	42	43
销售量/双	2	4	5	5	12	6	3	2	1

根据以上数据，估计该商场进鞋号需求最多的滑冰鞋的数量为________双.

14. 如图，　ΔABC 中，AD 平分 $\angle BAC, DE\perp AB.$ 若 $AC=2, DE=1,$ 则 $S_{\Delta ACD}=$____.



15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，若 $AB=3, AC=5, \frac{AF}{FC}=\frac{1}{4}$，则 AE 的长为_______.



16. 甲工厂将生产的 I 号、II 号两种产品共打包成 5 个不同的包裹，编号分别为 A，B，C，D，E，每个包裹的重量及包裹中 I 号、II 号产品的重量如下：

包裹编号	I 号产品重量/吨	II 号产品重量/吨	包裹的重量/吨
A	5	1	6
B	3	2	5
C	2	3	5
D	4	3	7
E	3	5	8

甲工厂准备用一辆载重不超过 19.5 吨的货车将部分包裹一次运送到乙工厂.

（1）如果装运的 I 号产品不少于 9 吨，且不多于 11 吨，写出一种满足条件的装运方案________（写出要装运包裹的编号）；

（2）如果装运的 I 号产品不少于 9 吨，且不多于 11 吨，同时装运的 II 号产品最多，写出满足条件的装运方案________（写出要装运包裹的编号）.

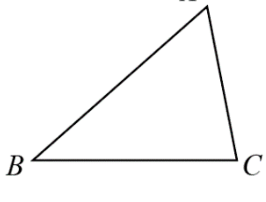
三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23-24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$(\pi-1)^0+4\sin 45^\circ-\sqrt{8}+|-3|$.

18. 解不等式组：$\begin{cases} 2+x>7-4x, \\ x<\dfrac{4+x}{2}. \end{cases}$

19. 已知 $x^2+2x-2=0$，求代数式 $x(x+2)+(x+1)^2$ 的值.

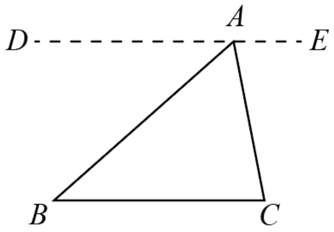
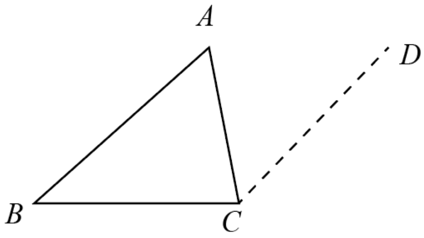
20. 下面是证明三角形内角和定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.



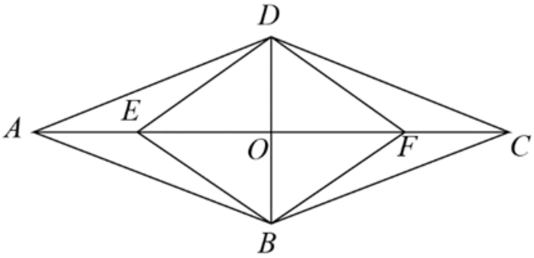
三角形内角和定理：三角形三个内角和等于 180°，

已知：如图，ΔABC，

求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

方法一 证明：如图，过点 A 作 $DE/\!/BC$.  	方法二 证明：如图，过点 C 作 $CD/\!/AB$. 

21. 如图，在▱$ABCD$ 中，AC，BD 交于点 O，点 E，F 在 AC 上，$AE=CF$.



（1）求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形；

（2）若 $\angle BAC=\angle DAC$，求证：四边形 $EBFD$ 是菱形.

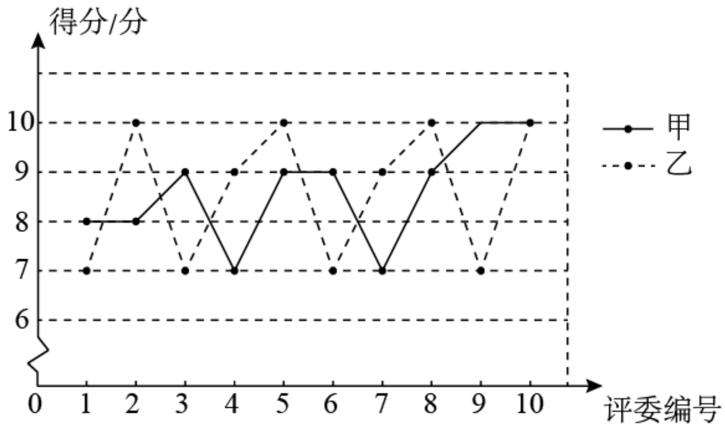
22. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图象经过点 $(4,3)$，$(-2,0)$，且与 y 轴交于点 A.

（1）求该函数的解析式及点 A 的坐标；

（2）当 $x>0$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=x+n$ 的值大于函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的值，直接写出 n 的取值范围.

23. 某校举办“歌唱祖国”演唱比赛，十位评委对每位同学的演唱进行现场打分，对参加比赛的甲、乙、丙三位同学得分的数据进行整理、描述和分析，下面给出了部分信息.

a．甲、乙两位同学得分的折线图：



b．丙同学得分：

10，10，10，9，9，8，3，9，8，10

c．甲、乙、丙三位同学得分的平均数：

同学	甲	乙	丙

平均数	8.6	8 6	m

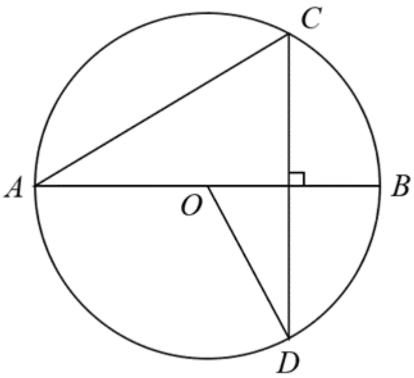
根据以上信息，回答下列问题：

（1）求表中 m 的值；

（2）在参加比赛的同学中，如果某同学得分的 10 个数据的方差越小，则认为评委对该同学演唱的评价越一致．据此推断：甲、乙两位同学中，评委对_________的评价更一致（填“甲”或“乙”）；

（3）如果每位同学的最后得分为去掉十位评委打分中的一个最高分和一个最低分后的平均分，最后得分越高，则认为该同学表现越优秀．据此推断：在甲、乙、丙三位同学中，表现最优秀的是_________（填“甲”“乙”或“丙”）．

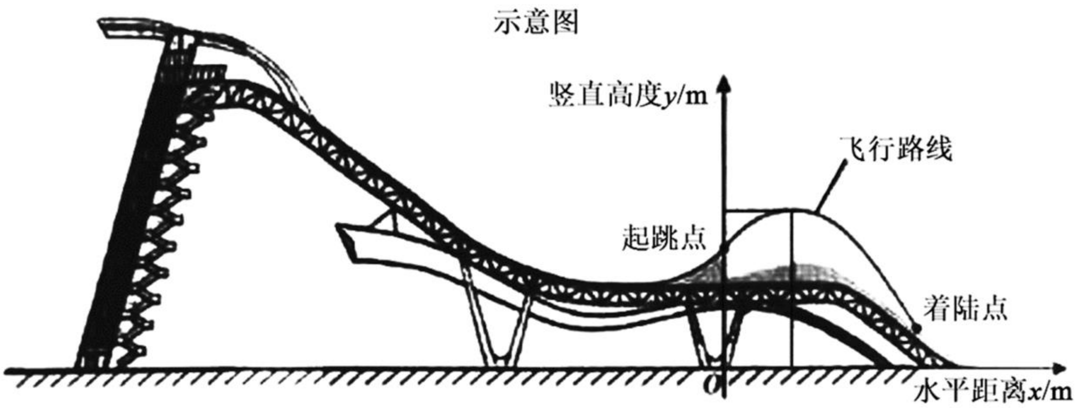
24. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，CD 是$\odot O$ 的一条弦，$AB \perp CD$, 连接 AC, OD.



（1）求证：$\angle BOD = 2\angle A$;

（2）连接 DB ,过点 C 作 $CE \perp DB$, 交 DB 的延长线于点 E ，延长 DO, 交 AC 于点 F ，若 F 为 AC 的中点，求证：直线 CE 为$\odot O$ 的切线.

25. 单板滑雪大跳台是北京冬奥会比赛项目之一，举办场地为首钢滑雪大跳台，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，建立如图所示的平面直角坐标系，从起跳到着陆的过程中，运动员的竖直高度 y （单位：m）与水平距离 x （单位：m）近似满足函数关系 $y = a(x-h)^2 + k(a<0)$.



某运动员进行了两次训练.

（1）第一次训练时，该运动员的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	0	2	5	8	11	14
竖直高度 y/m	20.00	21 40	22.75	23.20	22.75	21.40

根据上述数据，直接写出该运动员竖直高度的最大值，并求出满足的函数关系 $y = a(x-h)^2 + k(a<0)$;

（2）第二次训练时，该运动员的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系 $y=-0.04(x-9)^2+23.24$. 记该运动员第一次训练的着陆点的水平距离为 d_1，第二次训练的着陆点的水平距离为 d_2，则 d_1______d_2（填“>”“=”或“<”）.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(1,m),(3,n)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 上，设抛物线的对称轴为 $x=t$.

（1）当 $c=2, m=n$ 时，求抛物线与 y 轴交点的坐标及 t 的值；

（2）点 $(x_0,m)(x_0\neq 1)$ 在抛物线上，若 $m<n<c$, 求 t 的取值范围及 x_0 的取值范围.

27. 在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 为△ABC 内一点，连接 BD，DC，延长 DC 到点 E，使得 $CE=DC$.

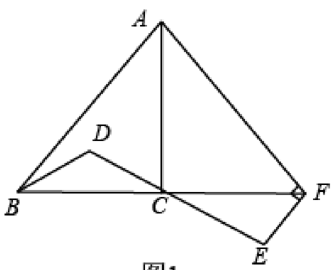


图1

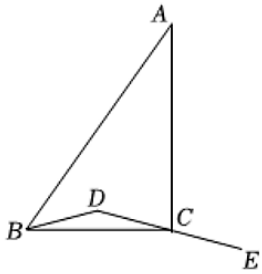


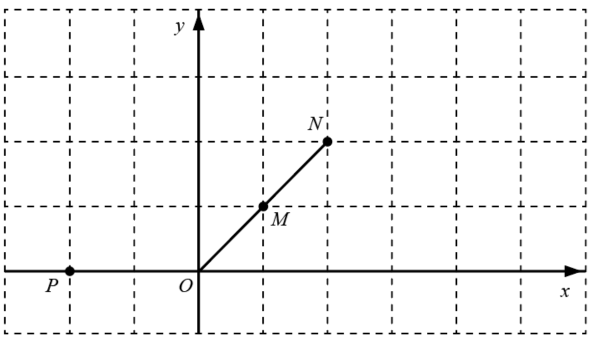
图2

（1）如图 1，延长 BC 到点 F，使得 $CF=BC$，连接 AF，EF，若 $AF\perp EF$，求证：$BD\perp AF$；

（2）连接 AE，交 BD 的延长线于点 H，连接 CH，依题意补全图 2，若 $AB^2=AE^2+BD^2$，用等式表示线段 CD 与 CH 的数量关系，并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(a,b),N$. 对于点 P 给出如下定义：将点 P 向右 $(a\geq 0)$ 或向左 $(a<0)$ 平移 $|a|$ 个单位长度，再向上 $(b\geq 0)$ 或向下 $(b<0)$ 平移 $|b|$ 个单位长度，得到点 P'，点 P' 关于点 N 的对称点为 Q，称点 Q 为点 P 的“对应点”.

（1）如图，点 $M(1,1)$, 点 N 在线段 OM 的延长线上，若点 $P(-2,0)$, 点 Q 为点 P 的“对应点”.



①在图中画出点 Q；

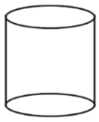
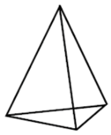
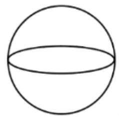
②连接 PQ, 交线段 ON 于点 T. 求证：$NT=\dfrac{1}{2}OM$;

（2）$\odot O$ 的半径为 1，M 是 $\odot O$ 上一点，点 N 在线段 OM 上，且 $ON=t(\dfrac{1}{2}<t<1)$，若 P 为 $\odot O$ 外一点，点 Q 为点 P 的“对应点”，连接 PQ. 当点 M 在 $\odot O$ 上运动时直接写出 PQ 长的最大值与最小值的差（用含 t 的式子表示）

参考答案

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1. 下面几何体中，是圆锥的为（　）

A. 　　B. 　　C. 　　D. 

【答案】B

【解析】

【分析】观察所给几何体，可以直接得出答案．

【详解】解：A 选项为圆柱，不合题意；

B 选项为圆锥，符合题意；

C 选项为三棱柱，不合题意；

D 选项为球，不合题意；

故选 B．

【点睛】本题考查常见几何体的识别，熟练掌握常见几何体的特征是解题的关键．圆锥面和一个截它的平面，组成的空间几何图形叫圆锥．

2. 截至 2021 年 12 月 31 日，长江干流六座梯级水电站全年累计发电量达 2628．83 亿千瓦时，相当于减排二氧化碳约 2.2 亿吨．将 262 883 000 000 用科学记数法表示应为（　）

A. 26.2883×10^{10}　　B. 2.62883×10^{11}　　C. 2.62883×10^{12}　　D. 0.262883×10^{12}

【答案】B

【解析】

【分析】将 262 883 000 000 写成 $a\times10^{n}\left(1\le|a|<10\right)$，$n$ 为正整数的形式即可．

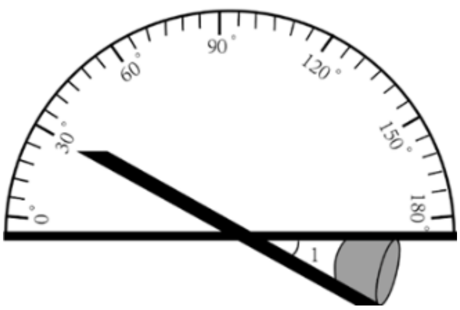
【详解】解：将 262 883 000 000 保留 1 位整数　2.62883，小数点向左移动了 11 位，

∴262 883 000 000 $=2.62883\times10^{11}$，

故选 B．

【点睛】本题考查用科学记数法表示绝对值大于 1 的数，掌握 $a\times10^{n}\left(1\le|a|<10\right)$ 中 n 的取值方法是解题的关键．

3. 如图，利用工具测量角，则 $\angle1$ 的大小为（　）



A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

【答案】A

【解析】

【分析】利用对顶角相等求解.

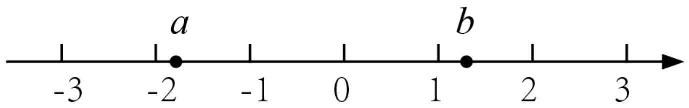
【详解】解：量角器测量的度数为 30°，

由对顶角相等可得，$\angle 1=30^{\circ}$.

故选 A.

【点睛】本题考查量角器的使用和对顶角的性质，掌握对顶角相等是解题的关键.

4. 实数 a，b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（　）



A. $a<-2$　　B. $b<1$　　C. $a>b$　　D. $-a>b$

【答案】D

【解析】

【分析】根据数轴上的点的特征即可判断.

【详解】解：点 a 在-2 的右边，故 a>-2，故 A 选项错误；

点 b 在 1 的右边，故 b>1，故 B 选项错误；

b 在 a 的右边，故 b>a，故 C 选项错误；

由数轴得：-2<a<-1.5，则 1.5<-a<2，1<b<1.5，则 $-a>b$，故 D 选项正确，

故选：D.

【点睛】本题考查了数轴上的点，熟练掌握数轴上点的特征是解题的关键.

5. 不透明的袋子中装有红、绿小球各一个，除颜色外两个小球无其他差别，从中随机摸出一个小球，放回并摇匀，再从中随机摸出一个小球，那么第一次摸到红球、第二次摸到绿球的概率是（　）

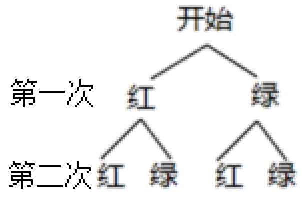
A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{3}{4}$

【答案】A

【解析】

【分析】首先根据题意画出树状图，由树状图求得所有等可能的结果与第一次摸到红球，第二次摸到绿球的情况，然后利用概率公式求解即可求得答案.

【详解】解：画树状图得：



∵共有 4 种等可能的结果，第一次摸到红球，第二次摸到绿球有 1 种情况，

∴第一次摸到红球，第二次摸到绿球的概率为$\frac{1}{4}$，

故选：A.

【点睛】本题考查了画树状法或列表法求概率，列出所有等可能的结果是解决本题的关键.

6. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有两个相等的实数根，则实数 m 的值为（　）

A. -4　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】利用方程有两个相等的实数根，得到Δ=0，建立关于 m 的方程，解答即可．

【详解】∵一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 有两个相等的实数根，

∴Δ=0，

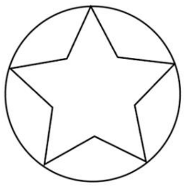
∴$1^2-4m=0$，

解得 $m=\frac{1}{4}$，故 C 正确．

故选：C．

【点睛】此题考查利用一元二次方程的根的情况求参数，一元二次方程的根有三种情况：有两个不等的实数根时 Δ>0；当一元二次方程有两个相等的实数根时，Δ=0；当方程没有实数根时，Δ<0，正确掌握此三种情况是正确解题的关键．

7. 图中的图形为轴对称图形，该图形的对称轴的条数为（　）



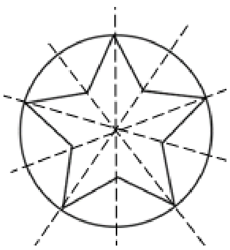
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，画出该图形的对称轴，即可求解．

【详解】解：如图，



一共有 5 条对称轴．

故选：D

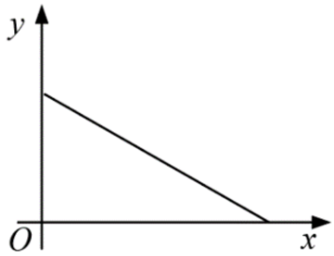
【点睛】本题主要考查了轴对称图形，熟练掌握若一个图形沿着一条直线折叠后两部分能完全重合，这样的图形就叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴是解题的关键．

8. 下面的三个问题中都有两个变量：

①汽车从 A 地匀速行驶到 B 地，汽车的剩余路程 y 与行驶时间 x；

②将水箱中的水匀速放出，直至放完，水箱中的剩余水量 y 与放水时间 x；

③用长度一定的绳子围成一个矩形，矩形的面积 y 与一边长 x，其中，变量 y 与变量 x 之间的函数关系可以利用如图所示的图象表示的是（　）



A. ①②　　　　B. ①③　　　　C. ②③　　　　D. ①②③

【答案】A

【解析】

【分析】由图象可知：当 y 最大时，x 为 0，当 x 最大时，y 为零，即 y 随 x 的增大而减小，再结合题意即可判定．

【详解】解：①汽车从 A 地匀速行驶到 B 地，汽车的剩余路程 y 随行驶时间 x 的增大而减小，故①可以利用该图象表示；

②将水箱中的水匀速放出，直至放完，水箱中的剩余水量 y 随放水时间 x 的增大而减小，故②可以利用该图象表示；

③设绳子的长为 L，一边长 x，则另一边长为 $\frac{1}{2}L-x$，

则矩形的面积为：$y=\left(\frac{1}{2}L-x\right)\cdot x=-x^2+\frac{1}{2}Lx$，

故③不可以利用该图象表示；

故可以利用该图象表示的有：①②，

故选：A．

【点睛】本题考查了函数图象与函数的关系，采用数形结合的思想是解决本题的关键．

第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

9. 若 $\sqrt{x-8}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的取值范围是__________．

【答案】$x\geq 8$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，可得 $x-8\geq 0$，然后进行计算即可解答．

【详解】解：由题意得：

$x-8\geq 0$，

解得：$x\geq 8$．

故答案为：$x\geq 8$．

【点睛】本题考查了二次根式有意义　条件，熟练掌握二次根式 $\sqrt{a}(a\geq 0)$ 是解题的关键．

10. 分解因式：$xy^2-x=$______．

【答案】$x\left(y+1\right)\left(y-1\right)$

【解析】

【分析】首先提取公因式，再根据平方差公式计算，即可得到答案．

【详解】$xy^{2}-x$

$=x\left(y^{2}-1\right)$

$=x\left(y+1\right)\left(y-1\right)$

故答案为：$x\left(y+1\right)\left(y-1\right)$．

【点睛】本题考查了因式分解的知识；解题的关键是熟练掌握平方差公式的性质，从而完成求解．

11. 方程$\frac{2}{x+5}=\frac{1}{x}$的解为___________．

【答案】x=5

【解析】

【分析】观察可得最简公分母是$x(x+5)$，方程两边乘最简公分母，可以把分式方程转化为整式方程求解，再进行检验即可得解．

【详解】解：$\frac{2}{x+5}=\frac{1}{x}$

方程的两边同乘$x(x+5)$,得：$2x=x+5$, 解得：$x=5$, 经检验：把$x=5$代入$x(x+5)=50\neq0$. 故原方程的解为：$x=5$

【点睛】此题考查了分式方程的求解方法，注意掌握转化思想的应用，注意解分式方程一定要验根，

12. 在平面直角坐标系xOy中，若点$A(2,y_1),B(5,y_2)$在反比例函数$y=\frac{k}{x}(k>0)$的图象上，则y_1______y_2（填“>”“=”或“<”）

【答案】>

【解析】

【分析】根据反比例函数的性质，$k>0$，在每个象限内，y随x的增大而减小，进行判断即可．

【详解】解：∵$k>0$，

∴在每个象限内，y随x的增大而减小，

∵$2<5$，

∴$y_1>y_2$．

故答案为：>.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质，熟练掌握函数的性质是解决问题的关键．

13. 某商场准备进400双滑冰鞋，了解了某段时间内销售的40双滑冰鞋的鞋号，数据如下：

鞋号	35	36	37	38	39	40	41	42	43
销售量/双	2	4	5	5	12	6	3	2	1

根据以上数据，估计该商场进鞋号需求最多的滑冰鞋的数量为________双．

【答案】120

【解析】

【分析】根据题意得：39 码的鞋销售量为 12 双，再用 400 乘以其所占的百分比，即可求解.

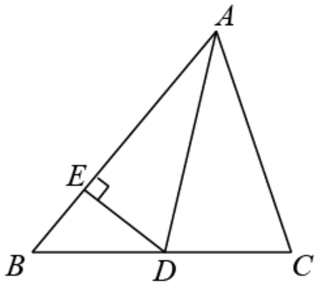
【详解】解：根据题意得：39 码的鞋销售量为 12 双，销售量最高，

∴该商场进鞋号需求最多的滑冰鞋的数量为$400\times\dfrac{12}{40}=120$双.

故答案为：120

【点睛】本题主要考查了用样本估计总体，根据题意得到 39 码的鞋销售量为 12 双，销售量最高是解题的关键.

14. 如图，在ΔABC中，AD平分$\angle BAC, DE\perp AB$. 若$AC=2, DE=1$, 则$S_{\Delta ACD}=$____.

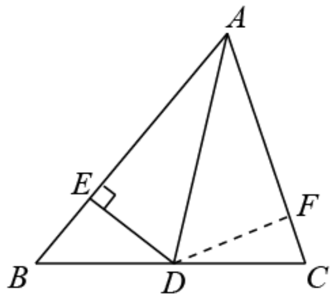


【答案】1

【解析】

【分析】作$DF\perp AC$于点 F，由角平分线的性质推出$DF=DE=1$，再利用三角形面积公式求解即可.

【详解】解：如图，作$DF\perp AC$于点 F，



∵AD平分$\angle BAC$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，

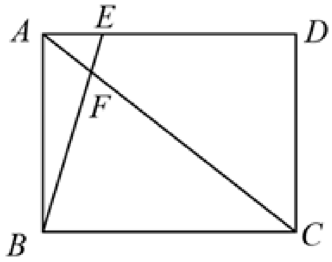
∴$DF=DE=1$，

∴$S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot DF=\dfrac{1}{2}\times2\times1=1$.

故答案 ：1.

【点睛】本题考查角平分线的性质，通过作辅助线求出三角形 ACD 中 AC 边的高是解题的关键.

15. 如图，在矩形$ABCD$中，若$AB=3, AC=5, \dfrac{AF}{FC}=\dfrac{1}{4}$，则$AE$的长为______.



【答案】1

【解析】

【分析】根据勾股定理求出 BC，以及平行线分线段成比例进行解答即可.

【详解】解：在矩形 $ABCD$ 中：$AD \parallel BC$，$\angle ABC = 90°$，

$\therefore \dfrac{AE}{BC} = \dfrac{AF}{FC} = \dfrac{1}{4}$，$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$，

$\therefore \dfrac{AE}{4} = \dfrac{1}{4}$，

$\therefore AE = 1$，

故答案为：1.

【点睛】此题考查了勾股定理以及平行线分线段成比例，掌握平行线分线段成比例是解题的关键.

16. 甲工厂将生产的 I 号、II 号两种产品共打包成 5 个不同的包裹，编号分别为 A，B，C，D，E，每个包裹的重量及包裹中 I 号、II 号产品的重量如下：

包裹编号	I 号产品重量/吨	II 号产品重量/吨	包裹的重量/吨
A	5	1	6
B	3	2	5
C	2	3	5
D	4	3	7
E	3	5	8

甲工厂准备用一辆载重不超过 19.5 吨的货车将部分包裹一次运送到乙工厂.

（1）如果装运的 I 号产品不少于 9 吨，且不多于 11 吨，写出一种满足条件的装运方案________（写出要装运包裹的编号）；

（2）如果装运的 I 号产品不少于 9 吨，且不多于 11 吨，同时装运的 II 号产品最多，写出满足条件的装运方案________（写出要装运包裹的编号）.

【答案】 ①. ABC（或 ABE 或 AD 或 ACE 或 ACD 或 BCD） ②. ACE

【解析】

【分析】（1）从 A，B，C，D，E 中选出 2 个或 3 个，同时满足 I 号产品不少于 9 吨，且不多于 11 吨，总重不超过 19.5 吨即可；

（2）从（1）中符合条件的方案中选出装运 II 号产品最多的方案即可.

【详解】解：（1）根据题意，

选择 ABC 时，装运的 I 号产品重量为：$5+3+2=10$（吨），总重$6+5+5=16<19.5$（吨），符合要求；

选择 ABE 时，装运的 I 号产品重量为：$5+3+3=11$（吨），总重$6+5+8=19<19.5$（吨），符合要求；

选择 AD 时，装运的 I 号产品重量为：$5+4=9$（吨），总重$6+7=13<19.5$（吨），符合要求；

选择 ACD 时，装运的 I 号产品重量为：$5+2+4=11$（吨），总重$6+5+7=18<19.5$（吨），符合要求；

选择 BCD 时，装运的 I 号产品重量为：$3+2+4=9$（吨），总重$5+5+7=17<19.5$（吨），符合要求；

选择 DCE 时，装运的 I 号产品重量为：$4+2+3=9$（吨），总重$7+5+8=20>19.5$（吨），不符合要求；

选择 BDE 时，装运的 I 号产品重量为：$3+4+3=10$（吨），总重$5+7+8=20>19.5$（吨），不符合要求；

选择 ACE 时，装运的 I 号产品重量为：$5+2+3=10$（吨），总重$6+5+8=19<19.5$（吨），符合要求；

综上，满足条件的装运方案有 ABC 或 ABE 或 ACE 或 AD 或 ACD 或 BCD.

故答案为：ABC（或 ABE 或 ACE 或 AD 或 ACD 或 BCD）.

（2）选择 ABC 时，装运的 II 号产品重量为：$1+2+3=6$（吨）；

选择 ABE 时，装运的 II 号产品重量为：$1+2+5=8$（吨）；

选择 AD 时，装运的 II 号产品重量为：$1+3=4$（吨）；

选择 ACD 时，装运的 II 号产品重量为：$1+3+3=7$（吨）；

选择 BCD 时，装运的 II 号产品重量为：$2+3+3=8$（吨）；

选择 ACE 时，装运的 II 号产品重量为：$1+3+5=9$（吨）.

故答案为：ACE.

【点睛】本题考查方案的选择，读懂题意，尝试不同组合时能否同时满足题目要求的条件是解题的关键.

三、解答题（共 68 分，第 17-20 题，每题 5 分，第 21 题 6 分，第 22 题 5 分，第 23-24 题，每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$(\pi-1)^0+4\sin 45^\circ-\sqrt{8}+|-3|$.

【答案】4

【解析】

【分析】根据零次幂、特殊角的正弦值、二次根式和去绝对值即可求解.

【详解】解：$(\pi-1)^0+4\sin 45^\circ-\sqrt{8}+|-3|$.

$=1+4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2\sqrt{2}+3$

$=4$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，掌握零次幂、特殊角的正弦值、二次根式的化简及去绝对值是解题的关键.

18. 解不等式组：$\begin{cases}2+x>7-4x,\\ x<\dfrac{4+x}{2}.\end{cases}$

【答案】$1<x<4$

【解析】

【分析】分别解两个一元一次不等式，再求交集即可.

【详解】解：$\begin{cases}2+x>7-4x? & ① \\ x<\dfrac{4+x}{2} & ②\end{cases}$

解不等式①得 $x>1$，

解不等式②得 $x<4$，

故所给不等式组的解集为：$1<x<4$.

【点睛】本题考查解一元一次不等式组，属于基础题，正确计算是解题的关键.

19. 已知 $x^2+2x-2=0$，求代数式 $x(x+2)+(x+1)^2$ 的值.

【答案】5

【解析】

【分析】先根据 $x^2+2x-2=0$，得出 $x^2+2x=2$，将 $x(x+2)+(x+1)^2$ 变形为 $2\left(x^2+2x\right)+1$，最后代入求值即可.

【详解】解：$\because x^2+2x-2=0$，

$\therefore x^2+2x=2$，

$\therefore x(x+2)+(x+1)^2$

$=x^2+2x+x^2+2x+1$

$=2x^2+4x+1$

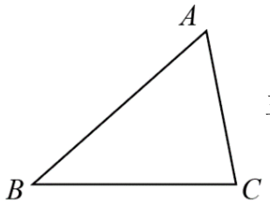
$=2\left(x^2+2x\right)+1$

$=2\times2+1$

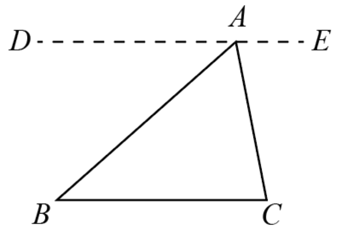
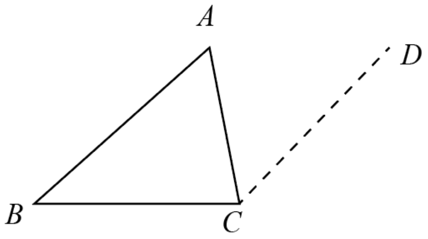
$=5$

【点睛】本题主要考查了代数式求值，完全平方公式，单项式乘多项式，将 $x(x+2)+(x+1)^2$ 变形为 $2\left(x^2+2x\right)+1$，是解题的关键.

20. 下面是证明三角形内角和定理的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.

<table>
<tr><td colspan="2">

三角形内角和定理：三角形三个内角和等于 180°，
已知：如图，ΔABC，
求证：$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.</td></tr>
<tr><td>方法一
证明：如图，过点 A 作 $DE /\!/ BC$.</td><td>方法二</td></tr>
</table>

	证明：如图，过点 C 作 $CD// AB.$ 

【答案】答案见解析

【解析】

【分析】选择方法一，过点 A 作 $DE // BC$，依据平行线的性质，即可得到 $\angle B = \angle BAD$，$\angle C = \angle EAC$，再根据平角的定义，即可得到三角形的内角和为 $180°$.

【详解】证明：过点 A 作 $DE // BC$，

则 $\angle B = \angle BAD$，$\angle C = \angle EAC$.（ 两直线平行，内错角相等）

$\because$ 点 D， A， E 在同一条直线上，

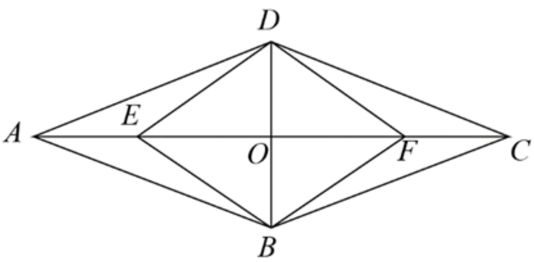
$\therefore \angle DAB + \angle BAC + \angle C = 180°$. （平角的定义）

$\therefore \angle B + \angle BAC + \angle C = 180°$.

即三角形的内角和为 $180°$.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质以及三角形内角和定理的运用，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

21. 如图，在 $\square ABCD$ 中， AC，BD 交于点 O，点 E，F 在 AC 上， $AE = CF$.



（1）求证：四边形 $EBFD$ 是平行四边形；

（2）若 $\angle BAC = \angle DAC$, 求证：四边形 $EBFD$ 是菱形.

【答案】（1）见解析 （2）见解析

【解析】

【分析】（1）先根据四边形 $ABCD$ 为平行四边形，得出 $AO = CO$， $BO = DO$，再根据 $AE = CF$，得出 $EO = FO$，即可证明结论；

（2）先证明 $\angle DCA = \angle DAC$，得出 $DA = DC$，证明四边形 $ABCD$ 为菱形，得出 $AC \perp BD$，即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明：$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AO = CO$， $BO = DO$，

$\because AE = CF$，

$\therefore AO - AE = CO - CF$，

即 $EO = FO$，

∴四边形 $EBFD$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴ $AB \parallel CD$，

∴ $\angle DCA = \angle BAC$，

∵ $\angle BAC = \angle DAC$,

∴ $\angle DCA = \angle DAC$，

∴ $DA = DC$，

∴四边形 $ABCD$ 为菱形，

∴ $AC \perp BD$，

即 $EF \perp BD$，

∵四边形 $EBFD$ 是平行四边形，

∴四边形 $EBFD$ 是菱形.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质和性质，菱形的判定和性质，平行线的性质，熟练掌握菱形和平行四边形的判定方法，是解题的关键.

22. 在平面直角坐标系 xOy 中，函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的图象经过点 $(4,3)$，$(-2,0)$，且与 y 轴交于点 A．

（1）求该函数的解析式及点 A 的坐标；

（2）当 $x > 0$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y = x + n$ 的值大于函数 $y = kx + b(k \neq 0)$ 的值，直接写出 n 的取值范围.

【答案】（1）$y = \frac{1}{2}x + 1$，$(0, 1)$

（2）$n \geq 1$

【解析】

【分析】（1）利用待定系数法即可求得函数解析式，当 $x = 0$ 时，求出 y 即可求解.

（2）根据题意 $x + n > \frac{1}{2}x + 1$ 结合 $x > 0$ 解出不等式即可求解.

【小问 1 详解】

解：将 $(4,3)$，$(-2,0)$ 代入函数解析式得，

$\begin{cases} 3=4k+b \\ 0=-2k+b \end{cases}$，解得 $\begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$，

∴函数的解析式为：$y = \frac{1}{2}x + 1$，

当 $x = 0$ 时，得 $y = 1$，

∴点 A 的坐标为 $(0, 1)$.

【小问 2 详解】

由题意得，

$x+n>\frac{1}{2}x+1$，即 $x>2-2n$，

又由 $x>0$，得 $2-2n\leq 0$，

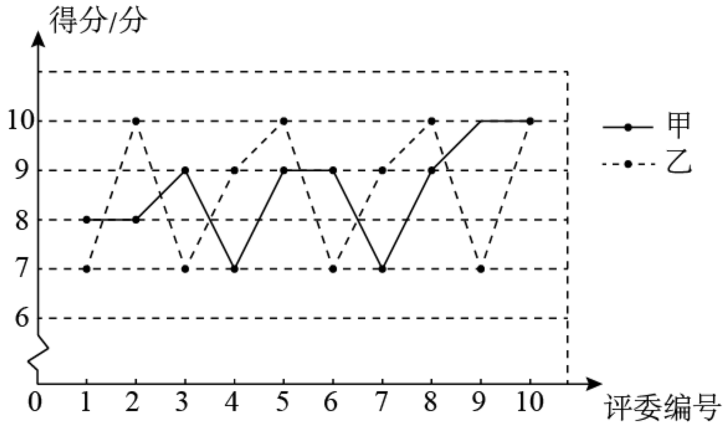
解得 $n\geq 1$，

$\therefore n$ 的取值范围为 $n\geq 1$.

【点睛】本题考查了待定系数法求函数解析式及解不等式，熟练掌握待定系数法求函数解析式及函数的性质是解题的关系.

23. 某校举办“歌唱祖国”演唱比赛，十位评委对每位同学的演唱进行现场打分，对参加比赛的甲、乙、丙三位同学得分的数据进行整理、描述和分析，下面给出了部分信息.

a．甲、乙两位同学得分的折线图：



b．丙同学得分：

10，10，10，9，9，8，3，9，8，10

c．甲、乙、丙三位同学得分的平均数：

同学	甲	乙	丙
平均数	8.6	8.6	m

根据以上信息，回答下列问题：

（1）求表中 m 的值；

（2）在参加比赛的同学中，如果某同学得分的 10 个数据的方差越小，则认为评委对该同学演唱的评价越一致．据此推断：甲、乙两位同学中，评委对_________的评价更一致（填“甲”或“乙”）；

（3）如果每位同学的最后得分为去掉十位评委打分中的一个最高分和一个最低分后的平均分，最后得分越高，则认为该同学表现越优秀．据此推断：在甲、乙、丙三位同学中，表现最优秀的是_________（填“甲”“乙”或“丙”）.

【答案】（1）8.6

（2）甲　（3）丙

【解析】

【分析】（1）根据平均数的定义求出丙的平均数即可求解.

（2）根据方差的计算方法先算出甲乙的方差，再进行比较即可求解.

（3）按去掉一个最高分和一个最低分后分别计算出甲乙丙的平均分，再进行比较即可求解.

【小问 1 详解】

解：丙的平均数：$\dfrac{10+10+10+9+9+8+3+9+8+10}{10}=8.6$，

则 $m=8.6$．

【小问 2 详解】

$$S_{甲}^2=\frac{1}{10}\left[2\times(8.6-8)^2+4\times(8.6-9)^2+2\times(8.6-7)^2+2\times(8.6-10)^2\right]=1.04,$$

$$S_{乙}^2=\frac{1}{10}\left[4\times(8.6-7)^2+4\times(8.6-10)^2+2\times(8.6-9)^2\right]=1.84,$$

$\because S_{甲}^2<S_{乙}^2$，

∴甲、乙两位同学中，评委对甲的评价更一致，

故答案为：甲.

【小问 3 详解】

由题意得，去掉一个最高分和一个最低分后的平均分为：

甲：$\dfrac{8+8+9+7+9+9+9+10}{8}=8.625$，

乙：$\dfrac{7+7+7+9+9+10+10+10}{8}=8.625$，

丙：$\dfrac{10+10+9+9+8+9+8+10}{8}=9.125$，

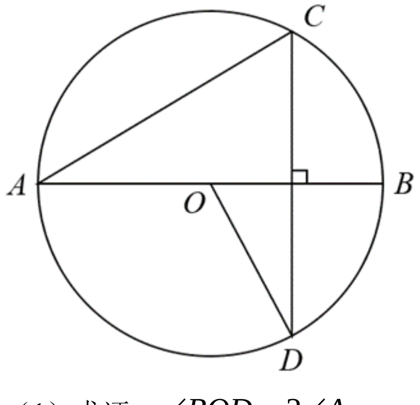
∵去掉一个最高分和一个最低分后丙的平均分最高，

因此最优秀的是丙，

故答案为：丙.

【点睛】本题考查了折线统计图、中位数、方差及平均数，理解折线统计图，从图中获取信息，掌握中位数、方差及去掉一个最高分和一个最低分后的平均分的求法是解题的关键.

24. 如图，AB 是$\odot O$ 的直径，CD 是$\odot O$ 的一条弦，$AB\perp CD$, 连接 AC, OD.



（1）求证：$\angle BOD=2\angle A$;

（2）连接 DB,过点 C 作 $CE \perp DB$, 交 DB 的延长线于点 E，延长 DO, 交 AC 于点 F，若 F 为 AC 的中点，求证：直线 CE 为$\odot O$ 的切线.

【答案】（1）答案见解析

（2）答案见解析

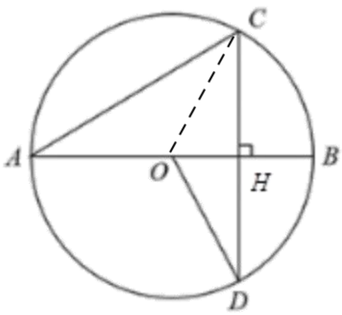
【解析】

【分析】（1）设 AB 交 CD 于点 H，连接 OC，证明 $Rt\Delta COH \cong Rt\Delta DOH$ ，故可得 $\angle COH = \angle DOH$ ，于是 $BC = BD$ ，即可得到 $\angle BOD = 2\angle A$；

（2）连接，解出 $\angle COB = 60°$，根据 AB 为直径得到 $\angle ADB = 90°$，进而得到 $\angle ABD = 60°$，即可证明 $OC // DB$，故可证明直线 CE 为$\odot O$ 的切线.

【小问 1 详解】

证明：设 AB 交 CD 于点 H，连接 OC，



由题可知，

$\therefore OC = OD$， $\angle OHC = \angle OHD = 90°$，

$\because OH = OH$，

$\therefore Rt\Delta COH \cong Rt\Delta DOH\left(HL\right)$，

$\therefore \angle COH = \angle DOH$，

$\therefore BC = BD$，

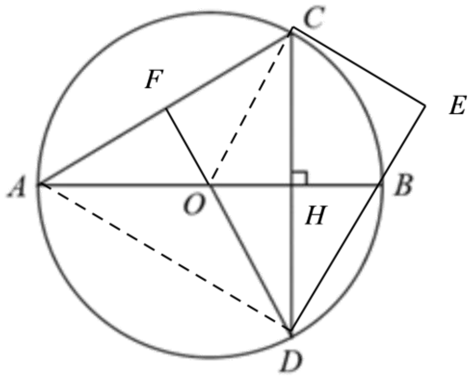
$\therefore \angle COB = \angle BOD$，

$\because \angle COB = 2\angle A$，

$\therefore \angle BOD = 2\angle A$；

【小问 2 详解】

证明：



连接 AD，

$\because OA=OD$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA$，

同理可得：$\angle OAC=\angle OCA,\angle OCD=\angle ODC$，

$\because$点 H 是 CD 的中点，点 F 是 AC 的中点，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=\angle OAC=\angle OCA=\angle OCD=\angle ODC$，

$\because \angle OAD+\angle ODA+\angle OAC+\angle OCA+\angle OCD+\angle ODC=180^\circ$，

$\therefore \angle OAD=\angle ODA=\angle OAC=\angle OCA=\angle OCD=\angle ODC=30^\circ$，

$\therefore \angle COB=2\angle CAO=2\times 30^\circ=60^\circ$，

$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$，

$\therefore \angle ABD=90-\angle DAO=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，

$\therefore \angle ABD=\angle COB=60^\circ$，

$\therefore OC//DE$，

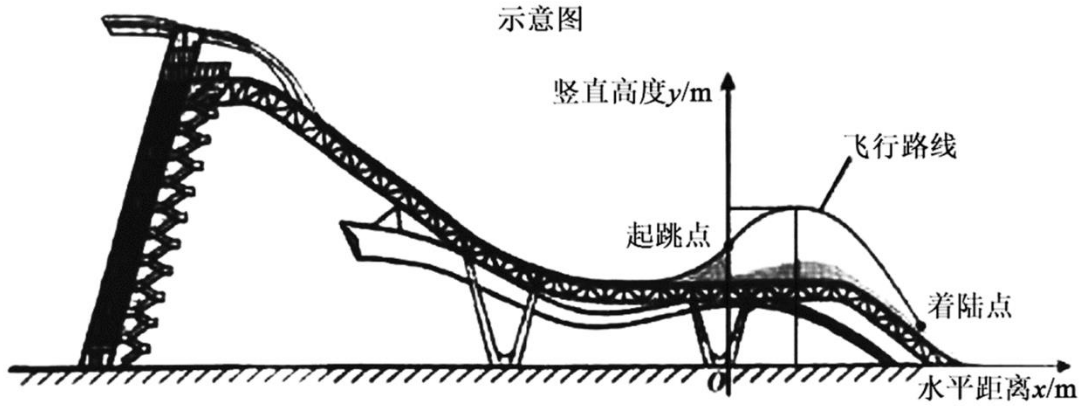
$\because CE\perp BE$，

$\therefore CE\perp OC$，

$\therefore$直线CE 为$\odot O$ 的切线.

【点睛】本题主要考查三角形全等的判定与性质，同弧所对的圆周角相等，圆周角定理，直线平行的判定与性质，三角形的内角和公式，证明三角形全等以及证明平行线是解题的关键.

25. 单板滑雪大跳台是北京冬奥会比赛项目之一，举办场地为首钢滑雪大跳台，运动员起跳后的飞行路线可以看作是抛物线的一部分，建立如图所示的平面直角坐标系，从起跳到着陆的过程中，运动员的竖直高度 y （单位：m）与水平距离 x （单位：m）近似满足函数关系 $y=a(x-h)^2+k(a<0)$.



某运动员进行了两次训练.

（1）第一次训练时，该运动员的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	0	2	5	8	11	14
竖直高度 y/m	20.00	21.40	22.75	23.20	22.75	21.40

根据上述数据，直接写出该运动员竖直高度的最大值，并求出满足的函数关系 $y=a(x-h)^2+k(a<0)$;

（2）第二次训练时，该运动员的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系 $y=-0.04(x-9)^2+23.24$. 记该运动员第一次训练的着陆点的水平距离为 d_1，第二次训练的着陆点的水平距离为 d_2，则 d_1______ d_2（填“>”“=”或“<”）.

【答案】（1）23.20m； $y=-0.05\left(x-8\right)^2+23.20$

（2）<

【解析】

【分析】（1）先根据表格中的数据找到顶点坐标，即可得出 h、k 的值，运动员竖直高度的最大值；将表格中除顶点坐标之外的一组数据代入函数关系式即可求出 a 的值，得出函数解析式；

（2）着陆点的纵坐标为 t，分别代入第一次和第二次的函数关系式，求出着陆点的横坐标，用 t 表示出 d_1 和 d_2，然后进行比较即可.

【小问 1 详解】

解：根据表格中的数据可知，抛物线的顶点坐标为：$\left(8,23.20\right)$，

$\therefore h=8$，$k=23.20$，

即该运动员竖直高度的最大值为 23.20m，

根据表格中的数据可知，当 $x=0$ 时，$y=20.00$，代入 $y=a\left(x-8\right)^2+23.20$ 得：

$20.00=a\left(0-8\right)^2+23.20$，解得：$a=-0.05$，

$\therefore$函数关系关系式为：$y=-0.05\left(x-8\right)^2+23.20$.

【小问 2 详解】

设着陆点的纵坐标为 t，则第一次训练时，$t=-0.05\left(x-8\right)^2+23.20$，

解得：$x=8+\sqrt{20(23.20-t)}$ 或 $x=8-\sqrt{20(23.20-t)}$，

∴根据图象可知，第一次训练时着陆点的水平距离 $d_1=8+\sqrt{20(23.20-t)}$，

第二次训练时，$t=-0.04(x-9)^2+23.24$，

解得：$x=9+\sqrt{25(23.24-t)}$ 或 $x=9-\sqrt{25(23.24-t)}$，

∴根据图象可知，第二次训练时着陆点的水平距离 $d_2=9+\sqrt{25(23.24-t)}$，

∵ $20(23.20-t)<25(23.24-t)$，

∴ $\sqrt{20(23.20-t)}<\sqrt{25(23.24-t)}$，

∴ $d_1<d_2$.

故答案为：<.

【点睛】本题主要考查了二次函数的应用，待定系数法求函数关系式，设着陆点的纵坐标为 t，用 t 表示出 d_1 和 d_2，是解题的关键.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $(1,m),(3,n)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 上，设抛物线的对称轴为 $x=t$.

（1）当 $c=2,m=n$ 时，求抛物线与 y 轴交点的坐标及 t 的值；

（2）点 $(x_0,m)(x_0\neq 1)$ 在抛物线上，若 $m<n<c,$ 求 t 的取值范围及 x_0 的取值范围.

【答案】（1）（0，2）；2

（2）t 的取值范围为 $\frac{3}{2}<t<2$，x_0 的取值范围为 $2<x_0<3$

【解析】

【分析】（1）当 x=0 时，y=2，可得抛物线与 y 轴交点的坐标；再根据题意可得点 $(1,m),(3,n)$ 关于对称轴为 $x=t$ 对称，可得 t 的值，即可求解；

（2）抛物线与 y 轴交点关于对称轴 $x=t$ 的对称点坐标为（$2t$，c），根据抛物线的图象和性质可得当 $x\leq t$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>t$ 时，y 随 x 的增大而增大，然后分两种情况讨论：当点 $(1,m)$，点 $(3,n)$，（$2t$，c）均在对称轴的右侧时；当点 $(1,m)$ 在对称轴的左侧，点 $(3,n)$，（$2t$，c）均在对称轴的右侧时，即可求解.

【小问 1 详解】

解：当 $c=2$ 时，$y=ax^2+bx+2$，

∴当 x=0 时，y=2，

∴抛物线与 y 轴交点的坐标为（0，2）；

∵ $m=n$，

∴点 $(1,m),(3,n)$ 关于对称轴为 $x=t$ 对称，

∴ $t=\frac{1+3}{2}=2$；

【小问 2 详解】

解：当 x=0 时，y=c，

∴抛物线与 y 轴交点坐标为（0，c），

∴抛物线与 y 轴交点关于对称轴 $x=t$ 的对称点坐标为（2t，c），

∵ $a>0$，

∴当 $x\le t$ 时，y 随 x　增大而减小，当 $x>t$ 时，y 随 x 的增大而增大，

当点 $(1,m)$，点 $(3,n)$，（2t，c）均在对称轴的右侧时， $t<1$，

∵ $m<n<c$，$1<3$，

∴2t>3，即 $t>\dfrac{3}{2}$（不合题意，舍去），

当点 $(1,m)$ 在对称轴的左侧，点 $(3,n)$，（2t，c）均在对称轴的右侧时，点 (x_0,m) 在对称轴的右侧，$1<t<3$，

此时点 $(3,n)$ 到对称轴 $x=t$ 的距离大于点 $(1,m)$ 到对称轴 $x=t$ 的距离，

∴ $t-1<3-t$，解得：$t<2$，

∵ $m<n<c$，$1<3$，

∴2t>3，即 $t>\dfrac{3}{2}$，

∴ $\dfrac{3}{2}<t<2$，

∵ (x_0,m)，$(1,m)$，对称轴为 $x=t$，

∴ $t=\dfrac{x_0+1}{2}$，

∴ $\dfrac{3}{2}<\dfrac{x_0+1}{2}<2$，解得：$2<x_0<3$，

∴ t 的取值范围为 $\dfrac{3}{2}<t<2$，x_0 的取值范围为 $2<x_0<3$.

【点睛】本题主要考查了二次函数的图象和性质，熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键.

27. 在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，D 为△ABC 内一点，连接 BD，DC，延长 DC 到点 E，使得 $CE=DC$.

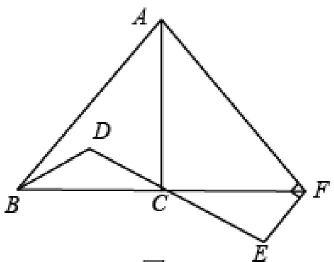


图1

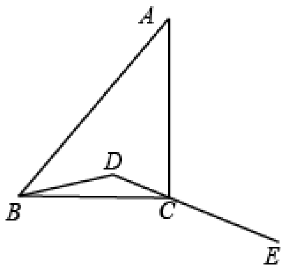


图2

（1）如图 1，延长 BC 到点 F，使得 $CF=BC$，连接 AF，EF，若 $AF\perp EF$，求证：$BD\perp AF$；

（2）连接 AE，交 BD 的延长线于点 H，连接 CH，依题意补全图 2，若 $AB^2=AE^2+BD^2$，用等式表示线段 CD 与 CH 的数量关系，并证明.

【答案】（1）见解析　（2）$CD=CH$；证明见解析

【解析】

【分析】（1）先利用已知条件证明$\triangle FCE \cong \triangle BCD(\mathrm{SAS})$，得出$\angle CFE = \angle CBD$，推出$EF \parallel BD$，再由$AF \perp EF$即可证明$BD \perp AF$；

（2）延长 BC 到点 M，使 $CM=CB$，连接 EM，AM，先证$\triangle MEC \cong \triangle BDC(\mathrm{SAS})$，推出$ME = BD$，通过等量代换得到$AM^2 = AE^2 + ME^2$，利用平行线的性质得出$\angle BHE = \angle AEM = 90°$，利用直角三角形斜边中线等于斜边一半即可得到$CD = CH$．

【小问 1 详解】

证明：在$\triangle FCE$和$\triangle BCD$中，

$$\begin{cases} CE = CD \\ \angle FCE = \angle BCD, \\ CF = CB \end{cases}$$

∴ $\triangle FCE \cong \triangle BCD(\mathrm{SAS})$，

∴ $\angle CFE = \angle CBD$，

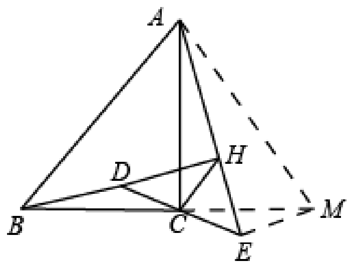
∴ $EF \parallel BD$，

∵ $AF \perp EF$，

∴ $BD \perp AF$．

【小问 2 详解】

解：补全后的图形如图所示，$CD = CH$，证明如下：



延长 BC 到点 M，使 $CM=CB$，连接 EM，AM，

∵ $\angle ACB = 90°$，$CM=CB$，

∴ AC 垂直平分 BM，

∴ $AB = AM$，

在$\triangle MEC$和$\triangle BDC$中，

$$\begin{cases} CM = CB \\ \angle MCE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

∴ $\triangle MEC \cong \triangle BDC(\mathrm{SAS})$，

∴ $ME = BD$，$\angle CME = \angle CBD$，

∵ $AB^2 = AE^2 + BD^2$，

∴ $AM^2 = AE^2 + ME^2$，

∴ $\angle AEM = 90°$，

$\because \angle CME=\angle CBD$，

$\therefore BH \mathbin{/\!/} EM$，

$\therefore \angle BHE=\angle AEM=90^{\circ}$，即 $\angle DHE=90^{\circ}$，

$\because CE=CD=\dfrac{1}{2}DE$，

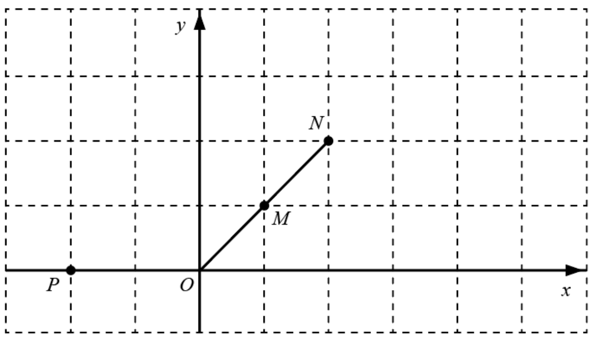
$\therefore CH=\dfrac{1}{2}DE$，

$\therefore CD=CH$.

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质，垂直平分线的性质，平行线的判定与性质，勾股定理的逆用，直角三角形斜边中线的性质等，第二问有一定难度，正确作辅助线，证明 $\angle DHE=90^{\circ}$ 是解题的关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $M(a,b),N$. 对于点 P 给出如下定义：将点 P 向右 $(a\geq 0)$ 或向左 $(a<0)$ 平移 $|a|$ 个单位长度，再向上 $(b\geq 0)$ 或向下 $(b<0)$ 平移 $|b|$ 个单位长度，得到点 P'，点 P' 关于点 N 的对称点为 Q，称点 Q 为点 P 的“对应点”.

（1）如图，点 $M(1,1)$, 点 N 在线段 OM 的延长线上，若点 $P(-2,0)$, 点 Q 为点 P 的“对应点”.



①在图中画出点 Q；

②连接 PQ, 交线段 ON 于点 T. 求证：$NT=\dfrac{1}{2}OM$;

（2）$\odot O$ 的半径为 1，M 是 $\odot O$ 上一点，点 N 在线段 OM 上，且 $ON=t(\dfrac{1}{2}<t<1)$，若 P 为 $\odot O$ 外一点，点 Q 为点 P 的“对应点”，连接 PQ. 当点 M 在 $\odot O$ 上运动时直接写出 PQ 长的最大值与最小值的差（用含 t 的式子表示）

【答案】（1）见解析　（2）$4t-2$

【解析】

【分析】（1）①先根据定义和 $M(1,1)$ 求出点 P' 的坐标，再根据点 P' 关于点 N 的对称点为 Q 求出点 Q 的坐标；

②延长 ON 至点 $A(3,3)$，连接 AQ，利用 AAS 证明 $\Delta AQT\cong\Delta OPT$，得到 $TA=TO=\dfrac{1}{2}OA$，再计算出 OA，OM，ON，即可求出 $NT=ON-OT=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}OM$；

（2）连接 PO 并延长至 S，使 $OP=OS$，延长 SQ 至 T，使 $ST=OM$，结合对称的性质得出 NM 为 $\triangle P'QT$ 的中位线，推出 $NM=\frac{1}{2}QT$，得出 $SQ=ST-TQ=1-(2-2t)=2t-1$，则 $PQ_{\max}-PQ_{\min}=(PS+QS)-(PS-QS)=2QS$.

【小问 1 详解】

解：①点 Q 如下图所示.

$\because$ 点 $M(1,1)$，

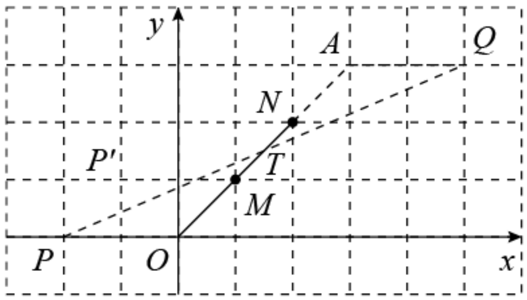
$\therefore$ 点 $P(-2,0)$ 向右平移 1 个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到点 P'，

$\therefore P'(-1,1)$，

$\because$ 点 P' 关于点 N 的对称点为 Q，$N(2,2)$，

$\therefore$ 点 Q 的横坐标为：$2\times2-(-1)=5$，纵坐标为：$2\times2-1=3$，

$\therefore$ 点 $Q(5,3)$，在坐标系内找出该点即可；



②证明：如图延长 ON 至点 $A(3,3)$，连接 AQ，

$\because AQ//OP$，

$\therefore \angle AQT=\angle OPT$，

ΔAQT 与 $\Delta\angle OPT$ 中，

$$\begin{cases}\angle AQT=\angle OPT\\ \angle ATQ=\angle OTP\\ AQ=OP\end{cases},$$

$\therefore \Delta AQT\cong\Delta OPT(AAS)$，

$\therefore TA=TO=\frac{1}{2}OA$，

$\because A(3,3)$，$M(1,1)$，$N(2,2)$，

$\therefore OA=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，$OM=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$ON=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

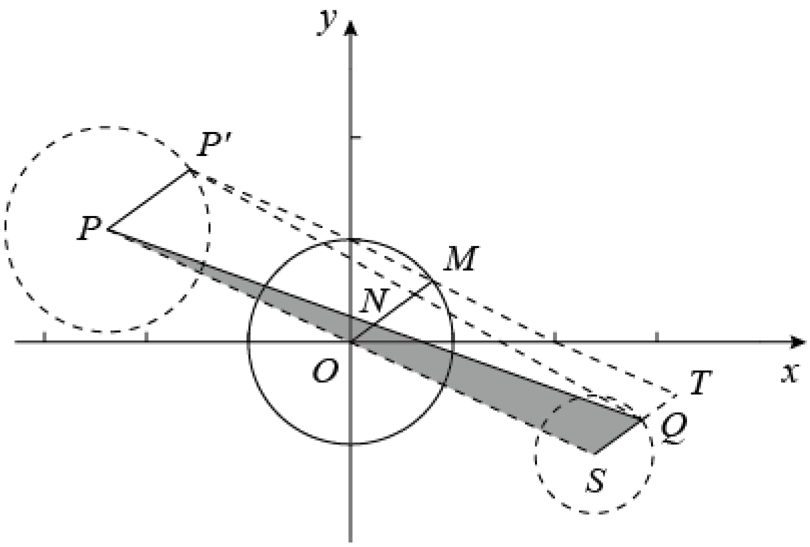
$\therefore TO=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，

$\therefore NT = ON - OT = 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore NT = \frac{1}{2}OM$；

【小问 2 详解】

解：如图所示，



连接 PO 并延长至 S，使 $OP = OS$，延长 SQ 至 T，使 $ST = OM$，

$\because M(a,b)$，点 P 向右 $(a \geq 0)$ 或向左 $(a < 0)$ 平移 $|a|$ 个单位长度，再向上 $(b \geq 0)$ 或向下 $(b < 0)$ 平移 $|b|$ 个单位长度，得到点 P'，

$\therefore PP' = OM = 1$，

$\because$ 点 P' 关于点 N 的对称点为 Q，

$\therefore NP' = NQ$，

又 $\because OP = OS$，

$\therefore OM // ST$，

$\therefore NM$ 为 $\Delta P'QT$ 的中位线，

$\therefore NM // QT$，$NM = \frac{1}{2}QT$，

$\because NM = OM - ON = 1 - t$，

$\therefore TQ = 2NM = 2 - 2t$，

$\therefore SQ = ST - TQ = 1 - (2 - 2t) = 2t - 1$，

在 ΔPQS 中，$PS - QS < PQ < PS + QS$，

结合题意，$PQ_{max} = PS + QS$，$PQ_{min} = PS - QS$，

$\therefore PQ_{max} - PQ_{min} = (PS + QS) - (PS - QS) = 2QS = 4t - 2$，

即 PQ 长的最大值与最小值的差为 $4t - 2$.

【点睛】本题考查点的平移，对称的性质，全等三角形的判定，两点间距离，中位线的性质及线段的最值问题，第2问难度较大，根据题意，画出点 Q 和点 P' 的轨迹是解题的关键.