

2022 北京平谷初二（下）期末

数 学



考生须知

1. 本试卷共 6 页，三道大题，25 道小题，考试时间 120 分钟。
2. 请将条形码粘贴在答题卡相应位置处。
3. 试卷所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效；在答题卡上，选择题和画图题用 2B 铅笔作答，其它试题用黑色字迹签字笔作答。
4. 考试结束后，请将试卷和草稿纸一并交回。

一、选择题(第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个)

1. 下列图形中，不是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 菱形 C. 矩形 D. 正方形

2. 在平面直角坐标系中,点 P(1,-2)在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限





3. 菱形具有而平行四边形不具有的性质是 ()

- A. 对角线互相平分 B. 对角线相等
C. 对角线互相垂直 D. 四个角都相等

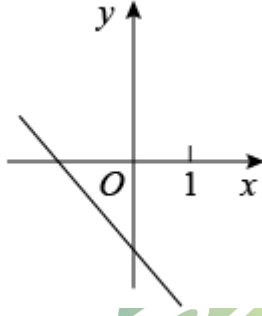
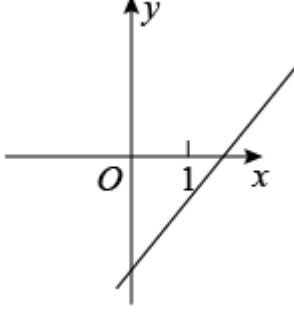
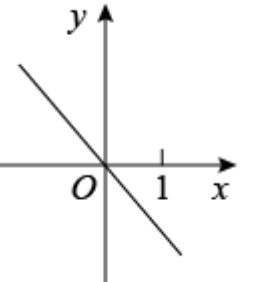
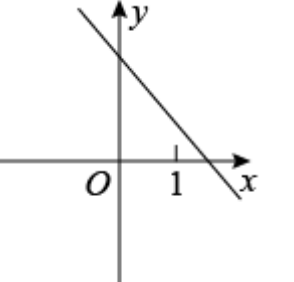
4. 把一元二次方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 配方后，下列变形正确的是 ()

- A. $(x-2)^2 = 5$ B. $(x-2)^2 = 3$ C. $(x-1)^2 = 5$ D. $(x-1)^2 = 3$

5. 下列多边形中，内角和为 540° 的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

6. 在一次函数 $y = kx + b$ 中，已知 $k \cdot b > 0$ ，那么在下面它的图像的示意图中，正确的是 ()

- A.  B. 
- C.  D. 



7. 已知一次函数 $y = -x + 2$ ，那么下列结论正确的是（ ）

- A. y 的值随 x 的值增大而增大
 B. 图象经过第一、二、三象限
 C. 图象必经过点 $(0, 2)$
 D. 当 $x < 2$ 时, $y < 0$

8. 北京市的一些公园分布示意图，图中分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，有如下四个结论：

- ①当表示什刹海公园的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(3, -2)$ 时，表示北海公园的点的坐标为 $(0, -1)$ ；
 ②当表示地坛公园的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(4, -4)$ 时，表示圆明园的点的坐标为 $(-8, 7)$ ；
 ③当表示地坛公园的点的坐标为 $(1, 1)$ ，表示北海公园的点的坐标为 $(0, 0)$ 时，表示什刹海公园的点的坐标为 $(0, 1)$ ；
 ④当表示地坛公园的点的坐标为 $(1.5, 1.5)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(7.5, -4.5)$ 时，表示圆明园的点的坐标为 $(-10.5, 12)$ 。

上述结论中，所有正确结论的序号是（ ）

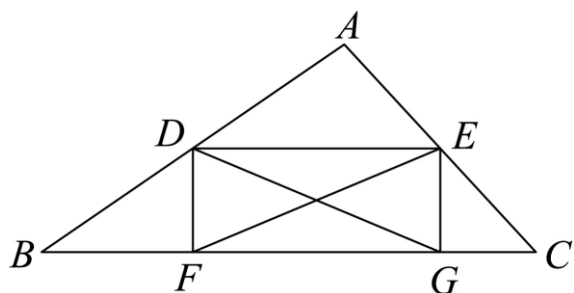


- A. ①②③ B. ②③④ C. ①②④ D. ①②③④

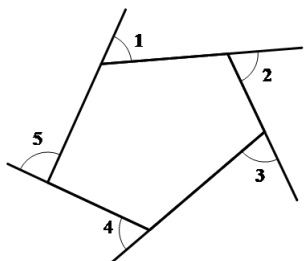
二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 2x + 4$ 与 x 轴交点坐标为_____。

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分别是 AB, AC 的中点，点 F, G 在边 BC 上，且 $DF \parallel EG$ 。只需添加一个条件即可证明四边形 $DFGE$ 是矩形，这个条件可以是_____。（写出一个即可）

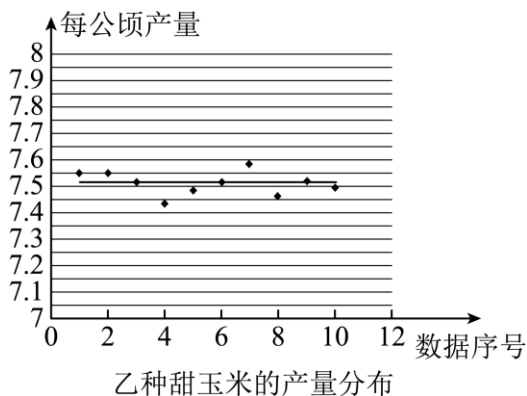
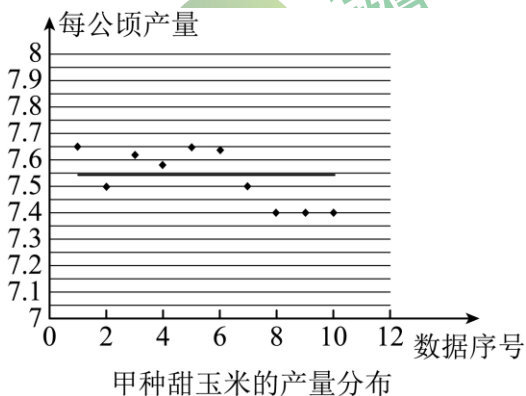


11. 如图, 已知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 280^\circ$, 那么 $\angle 5$ 的度数为 _____



12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 如果点 A 的坐标为 $(3, -4)$, 那么线段 OA 长度为 _____.

13. 农科院计划为某地选择合适的甜玉米种子. 选择种子时, 甜玉米的产量和产量的稳定性是农院所关心的问题. 为了解甲、乙两种玉米的相关情况, 农科院各用 10 块自然条件相同的试验田进行试验, 得到数据如图.

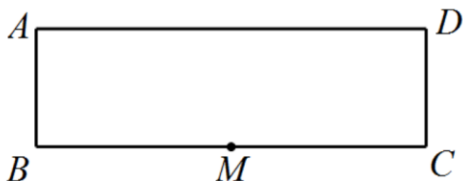


你认为应该选择哪种甜玉米种子 _____, 理由是 _____.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将点 $B(-3, 2)$ 向右平移 5 个单位长度, 再向下平移 3 个单位长度后与点 A 重合, 则点 A 的坐标是 _____.

15. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根, 则 m 的值是 _____.

16. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3, BC = 10$, M 为 BC 的中点, 沿过点 M 的直线翻折, 使点 C 落在边 AD 上, 记折痕为 MN , 则折痕 MN 的长为 _____.



三、解答题(解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

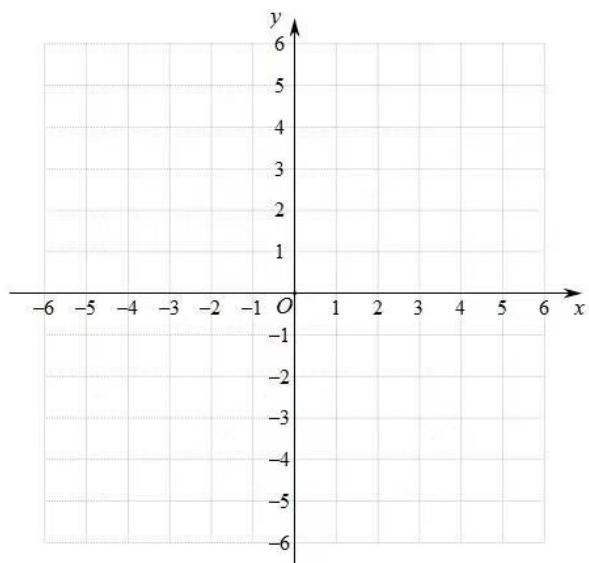
17. 解方程:

(1) $(x-3)^2 - 16 = 0$;



(2) $x^2+2x-3=0$

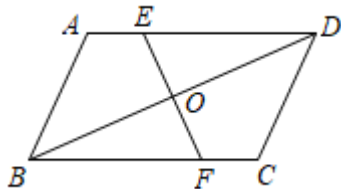
18. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象经过 $A(-2, 0)$, $B(1, 3)$ 两点.



北京中考在线
微信号: BJ_zkao

- (1) 画一次函数 $y=kx+b$ 的图象;
- (2) 求这个一次函数的解析式;
- (3) 求 $\triangle OAB$ 的面积.

19. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，连接 BD ，取 BD 中点 O ，过点 O 作直线 EF ，分别交 AD , BC 于点 E , F ，求证: $AE=CF$.

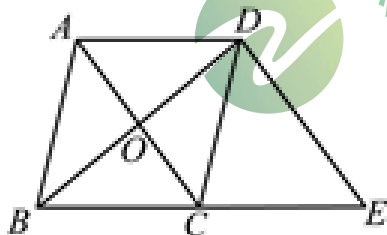


北京中考在线
微信号: BJ_zkao

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k \neq 0)$ 的图象是由函数 $y=x$ 的图象平移得到，且经过点 $(1, 2)$.

- (1) 求这个一次函数的解析式;
- (2) 当 $x > m$ 时，对于 x 每一个值，函数 $y=2x-3$ 的值大于一次函数 $y=kx+b$ 的值，直接写出 m 的取值范围.

21. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，过点 D 作 $DE \perp BD$ 交 BC 的延长线于点 E .



- (1) 求证: 四边形 $ACED$ 是平行四边形;
- (2) 若 $AB=\frac{5}{2}$, $DE=3$, 求 BD 的值.



22. 十八世纪，古巴比伦泥板上有这样一个问题：“一块矩形田地面积为 55，长边比短边多 6，问长边多长？”请
用一元二次方程的知识解决这个问题.

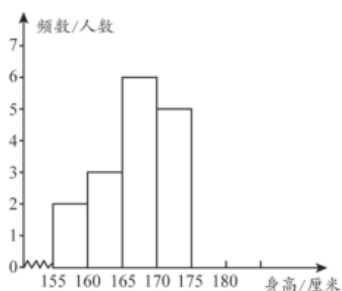
23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$.

- (1) 求证：此方程总有两个不相等的实数根；
- (2) 若此方程有一个根是 0，求出 m 的值和另一个根.

24. 为了了解某中学八年级 160 名男生 身体发育情况，从中随机抽取了 20 名男生的身高进行测量，并对数据进行了整理、描述和分析，下面给出了部分信息.

a. 20 名男生身高数据如下(单位：cm)：168 161 157 165 173 173 166 176 167 174 176 161 173 171 179 169 169 177 162 155

b. 经分组整理后的频数分布表与频数分布直方图如图所示：

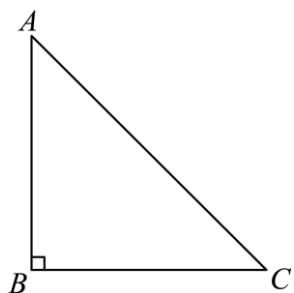


分组身高 x 厘米	频数	频率
$155 \leq x < 160$	2	0.10
$160 \leq x < 165$	3	b
$165 \leq x < 170$	6	
$170 \leq x < 175$		0.25
$175 \leq x < 180$	a	0.20
合计	20	1

但在列表和画图时，遗漏了频数分布表中的数据 and 频数分布直方图中相应的条形图。请根据所给信息，解答下列问
题：

- (1) $a = \underline{\quad}$ ， $b = \underline{\quad}$ ；
- (2) 请补全频数分布直方图；
- (3) 样本数据中，男生身高的中位数是
- (4) 估计该校八年级男生身高在 170-175cm 范围内的人数约为

25. 下面是小明设计的作正方形 $ABCD$ 的尺规作图过程.



已知：Rt△ABC 中，∠ABC=90°，AB=CB

求作：正方形 ABCD.

作法：如图，

1. 以点 A 为圆心，BC 长为半径作弧；
2. 以点 C 为圆心，AB 长为半径作弧；
3. 两弧交于点 D. 点 B 和点 D 在 AC 异侧；
4. 连接 AD, CD.

所以四边形 ABCD 是正方形.

(1) 根据小明设计 尺规作图过程，使用直尺和圆规，补全图形(保留作图痕迹)；

(2) 完成下面的证明.

证明：

∵ AB = , BC = ,

∴ 四边形 ABCD 是平行四边形

∵ ∠ABC = 90°,

∴ 四边形 ABCD 是矩形() (填推理 依据),

又 ∵ AB = BC,

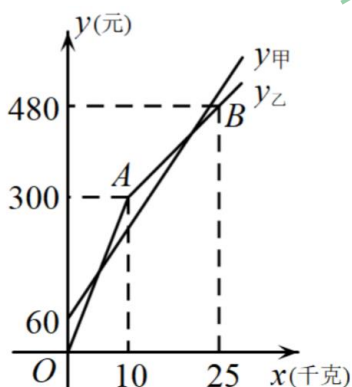
∴ 四边形 ABCD 是正方形() (填推理的依据).

26. “莓好生活，幸福家园”，春节期间，小明一家要去采摘草莓，现有甲、乙两家草莓采摘园草莓品质相同，销售价格也相同，且推出了如下的优惠方案：

甲园：游客需购买门票，采摘的草莓六折优惠；

乙园：游客进园不需购买门票，采摘的草莓超过一定数量后，超过的部分打折优惠.

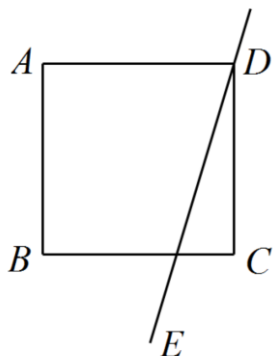
优惠期间，某游客的草莓采摘量为 x (千克)，在甲园所需总费用为 y_甲 (元)，在乙园所需总费用为 y_乙 (元)，y_甲，y_乙 与 x 之间的函数关系如图所示.





- (1) 甲采摘园的门票是____元，两个采摘园优惠前的草莓单价是每千克____元.
- (2) 求 $y_{甲}$ 与 x 的函数表达式;
- (3) 当游客采摘 18 千克草莓时，选择哪一家采摘园更便宜?

27. 已知：正方形 $ABCD$ ，过点 D 作直线 DE ，点 C 关于直线 DE 的对称点为 C' ，连接 DC' ，作直线 AC' 交直线 DE 于点 P .



- (1) 补全图形;
- (2) 判断 $\triangle DAC'$ 的形状并证明;
- (3) 猜想线段 PA , PC , PD 的数量关系并证明.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x_1, y_1)$ ，给出如下定义：当点 $Q(x_2, y_2)$ 满足 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ 时，称点 Q 是点 P 的等和点，已知点 $P(3, 0)$.

- (1) 在 $Q_1(0, 3)$, $Q_2(1, 4)$, $Q_3(-2, -1)$ 中，点 P 的等和点有_____;
- (2) 点 A 在直线 $y = -x + 5$ 上，若点 P 的等和点也是点 A 的等和点，求点 A 的坐标;
- (3) 已知点 $B(b, 0)$ 和线段 MN ，点 C 也在 x 轴上且满足 $BC = 1$ ，线段 MN 上总存在线段 PC 上每个点的等和点. 若 MN 的最小值为 5，直接写出 b 的值.

参考答案



一、选择题(第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个)

1. 下列图形中, 不是中心对称图形的是 ()

- A. 等边三角形 B. 菱形 C. 矩形 D. 正方形

【答案】A

【分析】根据中心对称图形的定义逐项识别即可, 在平面内, 把一个图形绕着某个点旋转 180° , 如果旋转后的图形能与原来的图形重合, 那么这个图形叫做中心对称图形.

【详解】A 是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故不符合题意;

B 不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故符合题意;

C、D 既是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故符合题意;

故选 A.

【点睛】本题考查了中心对称图形的识别, 熟练掌握中心对称图形的定义是解答本题的关键.

2. 在平面直角坐标系中, 点 $P(1, -2)$ 在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【分析】根据各象限内点的坐标特征解答即可.

【详解】 \because 点 $P(1, -2)$, 横坐标大于 0, 纵坐标小于 0,

\therefore 点 $P(1, -2)$ 在第三象限.

故选 D

【点睛】本题考查了象限内点的坐标特征, 关键是熟记平面直角坐标系中各个象限内点的坐标符号.

3. 菱形具有而平行四边形不具有 性质是 ()

- A. 对角线互相平分 B. 对角线相等
C. 对角线互相垂直 D. 四个角都相等

【答案】C

【分析】根据菱形、平行四边形的性质, 且菱形具有平行四边形的全部性质, 对每个选项进行分析比较即可得出结论.

【详解】因为平行四边形的对角线互相平分, 菱形具有平行四边形的性质且对角线互相垂直,

所以选项 A 不符合题意, 选项 C 符合题意;

因为对角线相等、四个角都相等的是矩形或正方形,

所以选项 B、D 不符合题意.

故选: C.

【点睛】本题主要考查平行四边形、菱形的性质的理解能力. 涉及平行四边形对角线互相平分, 菱形对角线互相垂直且平分, 矩形、菱形对角线相等且四个角都相等知识点. 明确平行四边形和菱形的性质以及二者之间的关系是解本题的关键.

4. 把一元二次方程 $x^2 - 2x - 4 = 0$ 配方后, 下列变形正确的是 ()

- A. $(x-2)^2 = 5$ B. $(x-2)^2 = 3$ C. $(x-1)^2 = 5$ D. $(x-1)^2 = 3$



【答案】C

【分析】掌握配方法解一元二次方程即可得出答案.

【详解】 $x^2 - 2x - 4 = 0$,

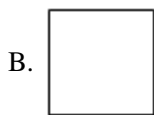
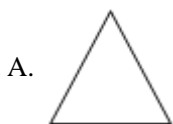
$x^2 - 2x + 1 - 1 - 4 = 0$,

$(x-1)^2 = 5$,

故选 C.

【点睛】本题考查了用配方法解一元二次方程, 准确掌握方法是本题的关键.

5. 下列多边形中, 内角和为 540° 的是 ()



【答案】C

【分析】根据多边形内角和公式求解即可.

【详解】解: A、三角形的内角和是 180° , 不符合题意;

B、四边形的内角和是 360° , 不符合题意;

C、五边形的内角和是 $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$, 符合题意;

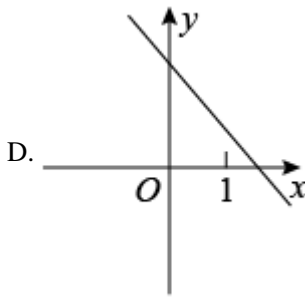
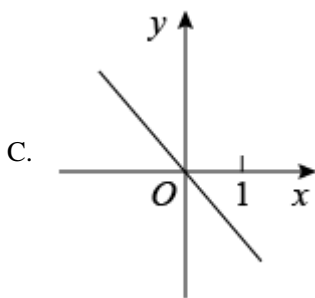
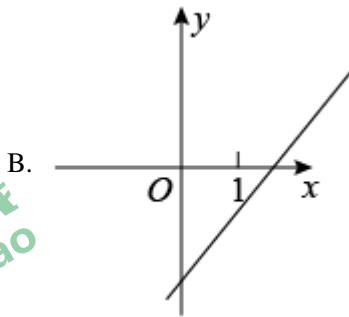
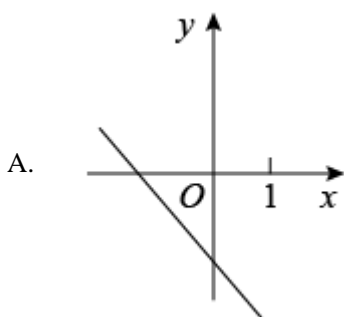
D、六边形的内角和是 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$, 不符合题意.

故选: C.

【点睛】此题考查了多边形的内角和, 解题的关键是熟练掌握多边形内角和公式. n 边形的内角的和等于:

$(n-2) \times 180^\circ$ (n 大于等于 3 且 n 为整数).

6. 在一次函数 $y = kx + b$ 中, 已知 $k \cdot b > 0$, 那么在下面它的图像的示意图中, 正确的是 ()



【答案】A



【分析】根据图像确定 k 、 b 的符号，然后求得 $k \cdot b$ 的符号，判断即可.

【详解】解：A、根据图像知， $k < 0$ ， $b < 0$ ，则 $k \cdot b > 0$ ，故该选项符合题意；

B、根据图像知， $k > 0$ ， $b < 0$ ，则 $k \cdot b < 0$ ，与已知“ $k \cdot b > 0$ ”相矛盾，故该选项不符合题意；

C、根据图像知， $k < 0$ ， $b = 0$ ，则 $k \cdot b = 0$ ，与已知“ $k \cdot b > 0$ ”相矛盾，故该选项不符合题意；

D、根据图像知， $k < 0$ ， $b > 0$ ，则 $k \cdot b < 0$ ，与已知“ $k \cdot b > 0$ ”相矛盾，故该选项不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题主要考查一次函数图像在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解：直线 $y = kx + b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系： $k > 0$ 时，直线必经过一、三象限； $k < 0$ 时，直线必经过二、四象限； $b > 0$ 时，直线与 y 轴正半轴相交； $b = 0$ 时，直线过原点； $b < 0$ 时，直线与 y 轴负半轴相交.

7. 已知一次函数 $y = -x + 2$ ，那么下列结论正确的是（ ）

A. y 的值随 x 的值增大而增大

B. 图象经过第一、二、三象限

C. 图象必经过点 $(0, 2)$

D. 当 $x < 2$ 时， $y < 0$

【答案】C

【分析】根据一次函数的性质逐项进行分析即可.

【详解】解：A、由于一次函数 $y = -x + 2$ 的 $k = -1 < 0$ ，所以 y 的值随 x 的值增大而减小，故该选项不符合题意；

B、一次函数 $y = -x + 2$ 的 $k = -1 < 0$ ， $b = 2 > 0$ ，所以该函数过一、二、四象限，故该选项不符合题意；

C、将 $(0, 2)$ 代入 $y = -x + 2$ 中得 $2 = 0 + 2$ ，等式成立，所以 $(0, 2)$ 在 $y = -x + 2$ 上，故该选项符合题意；

D、一次函数 $y = -x + 2$ 的 $k = -1 < 0$ ，所以 y 的值随 x 的值增大而减小，所以当 $x < 2$ 时， $y > 0$ ，故该选项不符合题意.

故选：C.

【点睛】本题考查了一次函数的图象和性质，熟练掌握一次函数的相关知识是解题的关键.

8. 北京市的一些公园分布示意图，图中分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，有如下四个结论：

①当表示什刹海公园的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(3, -2)$ 时，表示北海公园的点的坐标为 $(0, -1)$ ；

②当表示地坛公园的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(4, -4)$ 时，表示圆明园的点的坐标为 $(-8, 7)$ ；

③当表示地坛公园的点的坐标为 $(1, 1)$ ，表示北海公园的点的坐标为 $(0, 0)$ 时，表示什刹海公园的点的坐标为 $(0, 1)$ ；

④当表示地坛公园的点的坐标为 $(1.5, 1.5)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(7.5, -4.5)$ 时，表示圆明园的点的坐标为 $(-10.5, 12)$.

上述结论中，所有正确结论的序号是（ ）



- A. ①②③ B. ②③④ C. ①②④ D. ①②③④

【答案】D

【分析】根据各结论中所给两个点的坐标得出原点位置及单位长度，从而进行判断。

【详解】解：①当表示什刹海公园的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(3, -2)$ 时，表示北海公园的点的坐标为 $(0, -1)$ ，正确；

②当表示地坛公园的点的坐标为 $(0, 0)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(4, -4)$ 时，表示圆明园的点的坐标为 $(-8, 7)$ ，正确；

③当表示地坛公园的点的坐标为 $(1, 1)$ ，表示北海公园的点的坐标为 $(0, 0)$ 时，表示什刹海公园的点的坐标为 $(0, 1)$ ，正确；

④当表示地坛公园的点的坐标为 $(1.5, 1.5)$ ，表示日坛公园的点的坐标为 $(7.5, -4.5)$ 时，表示圆明园的点的坐标为 $(-10.5, 12)$ ，正确；

故选：D.

【点睛】本题主要考查利用坐标确定位置，解题的关键是确定原点位置及单位长度.

二、填空题

9. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = 2x + 4$ 与 x 轴交点坐标为_____.

【答案】 $(-2, 0)$

【分析】代入 $y=0$ 求出 x 的值，进而可得出直线 $y=2x+4$ 与 x 轴交点坐标.

【详解】解：当 $y=0$ 时， $2x+4=0$ ，解得： $x=-2$ ，

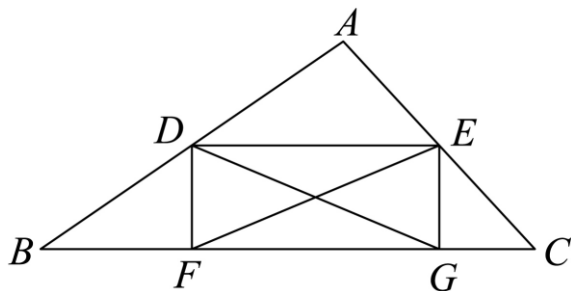
\therefore 直线 $y=2x+4$ 与 x 轴交点坐标为 $(-2, 0)$ ，

故答案为： $(-2, 0)$.

【点睛】本题考查了一次函数图像上点的坐标特征，牢记直线上任意一点的坐标都满足函数关系式 $y=kx+b$ 是解题的关键.



10. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 分别是 AB, AC 的中点, 点 F, G 在边 BC 上, 且 $DF \parallel EG$. 只需添加一个条件即可证明四边形 $DFGE$ 是矩形, 这个条件可以是____. (写出一个即可)



【答案】 $\angle DFG=90^\circ$ (答案不唯一)

【分析】由三角形中位线定理得 $DE \parallel BC$, 再由 $DF \parallel EG$, 得四边形 $DFGE$ 是平行四边形, 然后由矩形的判定即可得出结论.

【详解】解: 添加条件为: $\angle DFG=90^\circ$, 理由如下:

$\because D, E$ 分别是 AB, AC 的中点,

$\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel BC$,

$\because DF \parallel EG$,

\therefore 四边形 $DFGE$ 是平行四边形,

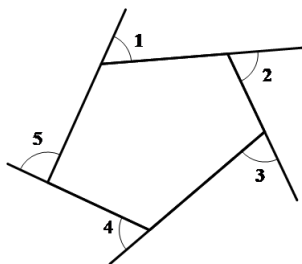
又 $\because \angle DFG=90^\circ$,

\therefore 平行四边形 $DFGE$ 是矩形,

故答案为: $\angle DFG=90^\circ$ (答案不唯一).

【点睛】本题考查了矩形的判定、平行四边形的判定与性质以及三角形中位线定理等知识, 熟练掌握矩形的判定是解题的关键.

11. 如图, 已知 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 280^\circ$, 那么 $\angle 5$ 的度数为 ____



【答案】 80°

【分析】根据多边形外角和的性质求解即可.

【详解】解: 根据多边形外角和的性质可得, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$

又 $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 280^\circ$

$\therefore \angle 5 = 360^\circ - 280^\circ = 80^\circ$.

故答案为: 80° .

【点睛】本题主要考查了多边形外角和的性质, 掌握多边形外角为 360° 成为解答本题的关键.

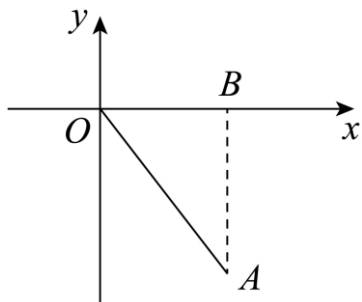
12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 如果点 A 的坐标为 $(3, -4)$, 那么线段 OA 长度为 _____.

【答案】5



【分析】过A作 $AB \perp x$ 轴于B，根据点A的坐标，得出OB、AB的长，再根据勾股定理求出OA即可。

【详解】如图，过A作 $AB \perp x$ 轴于B，



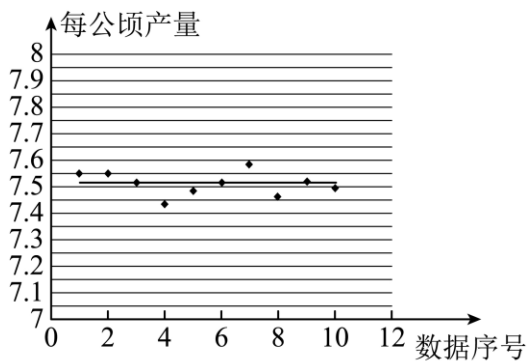
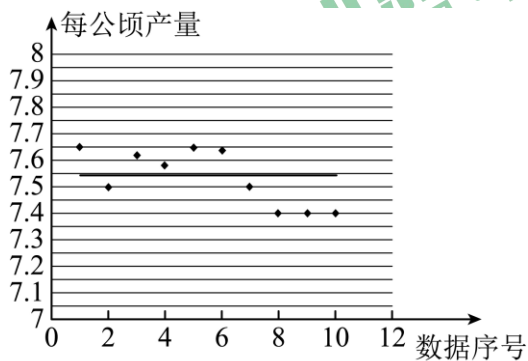
点A(3, -4)，即 $OB=3$ ， $AB=4$ ，由勾股定理得，

$$OA = \sqrt{OB^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

故答案为：5.

【点睛】本题考查勾股定理，掌握勾股定理是解决问题的前提，构造直角三角形是解决问题的关键。

13. 农科院计划为某地选择合适的甜玉米种子. 选择种子时，甜玉米的产量和产量的稳定性是农院所关心的问题. 为了解甲、乙两种玉米的相关情况，农科院各用10块自然条件相同的试验田进行试验，得到数据如图.



你认为应该选择哪种甜玉米种子_____，理由是_____.

【答案】 ①. 乙 ②. 乙种玉米产量更稳定

【分析】从图中数据的波动情况分析，即可求解.

【详解】解：从图中看到，乙的波动比甲的波动小，

所以乙的产量比较稳定，

所以这个地区比较适合种植乙种甜玉米，理由是乙产量比较稳定.

故答案为：乙，乙种玉米产量更稳定.

【点睛】本题考查了统计图和方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，将点 $B(-3, 2)$ 向右平移5个单位长度，再向下平移3个单位长度后与点A重合，则点A的坐标是_____.

【答案】(2, -1)

【分析】根据横坐标，右移加，左移减；纵坐标，上移加，下移减即可得出答案.

【详解】解：将点 $B(-3, 2)$ 向右平移5个单位长度，得到 $(-3+5, 2)$ ，即 $(2, 2)$ ，



再向下平移 3 个单位长度，得到(2,2-3)，即 A(2,-1).

故答案为：(2,-1).

【点睛】本题考查了坐标与图形变化-平移，掌握横坐标右移加、左移减；纵坐标上移加、下移减是解题的关键.

15. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值是_____.

【答案】2

【分析】根据一元二次方程根的判别式，根与系数的关系可知， $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根，代入即可得出答案.

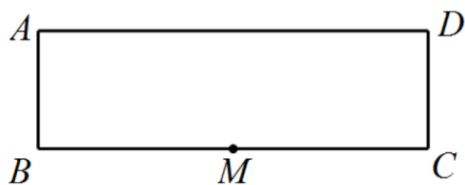
【详解】解：由题可知， $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (m - 1) = 0$,

解得 $m = 2$,

故答案为：2.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，根与系数的关系， $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 是本题的关键.

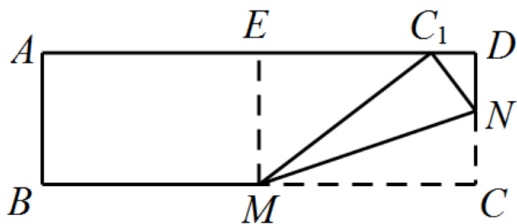
16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3, BC = 10$ ， M 为 BC 的中点，沿过点 M 的直线翻折，使点 C 落在边 AD 上，记折痕为 MN ，则折痕 MN 的长为_____.



【答案】 $\frac{5}{3}\sqrt{10}$ 或 $\sqrt{10}$

【分析】根据 N 点落的位置进行分类讨论，分为 CD 上或这 AD 上，运用勾股定理计算出线段的长度，再设线段的长度为 x ，用代数式表示出其他线段，通过勾股定理建立方程，计算出来答案即可.

【详解】当 N 点落在 CD 上时，如图所示，过点 M 作 $ME \perp AD$ 于 E ,



\because 在矩形 $ABCD$ 中，

$\therefore AB = CD = 3, BC = AD = 10, \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

$\because ME \perp AD$

\therefore 四边形 $ABME$ 是矩形

$\because M$ 是 BC 中点，

$\therefore BM = CM = AE = DE = 5$

\because 由折叠可知， $C_1M = CM = 5, C_1N = CN$

设 CN 为 x ，则 $C_1N = x, DN = 3 - x$,

在 $Rt\triangle C_1ME$ 中， $EM = AB = 3, C_1M = CM = 5$,



$$\therefore C_1E = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\therefore C_1D = ED - C_1E = 5 - 4 = 1$$

在 $Rt\triangle C_1DN$ 中

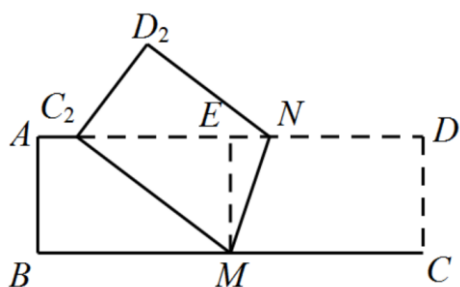
$$C_1D^2 + DN^2 = C_1N^2$$

$$\therefore 1^2 + (3-x)^2 = x^2$$

$$\text{解得 } x = \frac{5}{3},$$

$$\therefore MN = \sqrt{MC^2 + CN^2} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{10};$$

当 N 在 AD 上时, 如图所示, 过点 M 作 $ME \perp AD$ 于 E ,



\therefore 在矩形 $ABCD$ 中,

$$\therefore AB = CD = 3, BC = AD = 10, \angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$$

$\therefore ME \perp AD$

\therefore 四边形 $ABME$ 是矩形

$\therefore M$ 是 BC 中点,

$$\therefore BM = CM = AE = DE = 5$$

\therefore 由折叠可知, $C_2M = CM = 5, CD = C_2D_2 = 3, D_2N = DN, \angle D_2 = \angle D = 90^\circ$

在 $Rt\triangle C_2ME$ 中, $EM = AB = 3, C_2M = CM = 5,$

$$\therefore C_2E = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

设 $EN = x$, 则 $DN = 5 - x$,

在 $Rt\triangle C_2D_2N$ 中, $C_2D_2^2 + D_2N^2 = C_2N^2,$

$$\therefore 3^2 + (5-x)^2 = (4+x)^2$$

解得 $x = 1$,

$$\therefore MN = \sqrt{ME^2 + EN^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10};$$

故答案为: $\frac{5}{3}\sqrt{10}$ 或 $\sqrt{10}$.

【点睛】本题考查了矩形中的折叠问题, 勾股定理, 方程思想和分类讨论思想是本题的关键.

三、解答题(解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

17. 解方程:



(1) $(x-3)^2 - 16 = 0$;

(2) $x^2 + 2x - 3 = 0$

【答案】 (1) $x_1 = 7, x_2 = -1$

(2) $x_1 = -3, x_2 = 1$

分析】 (1) 移项后，直接开平方得出结果.

(2) 用因式分解法可以得出结论.

【小问 1 详解】

解: $(x-3)^2 - 16 = 0$

$(x-3)^2 = 16$

直接开平方得: $x-3 = \pm 4$

解得: $x_1 = 7, x_2 = -1$.

【小问 2 详解】

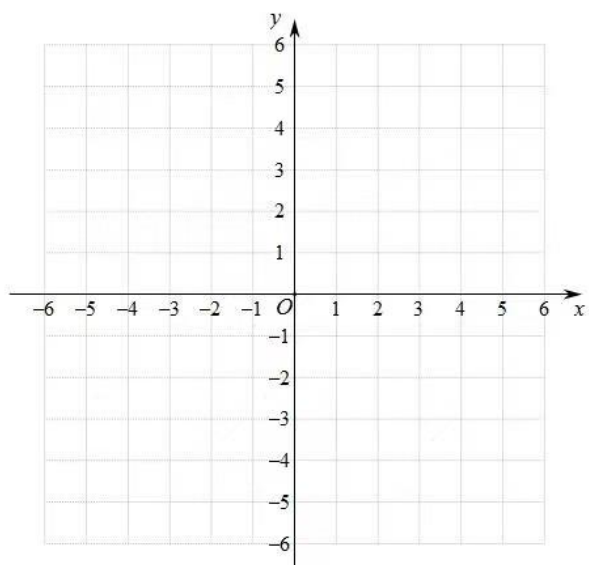
解: $x^2 + 2x - 3 = 0$

因式分解得: $(x+3)(x-1) = 0$

解得: $x_1 = -3, x_2 = 1$.

【点睛】 本题考查一元二次方程的几种常见解法: 开平方法, 分解因式法; 掌握概念并熟练运用是解题的关键.

18. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过 $A(-2, 0), B(1, 3)$ 两点.



(1) 画出一一次函数 $y = kx + b$ 的图象;

(2) 求这个一次函数的解析式;

(3) 求 $\triangle OAB$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) $y = x + 2$

(3) 3

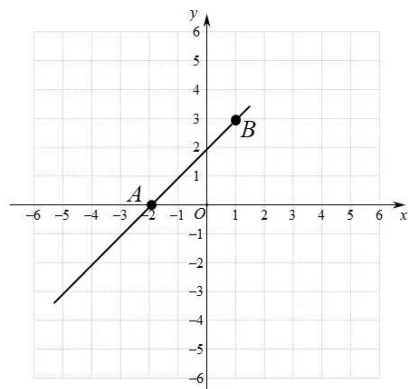
【分析】 (1) 描出点 A, B , 然后过两点作直线即可;



- (2) 利用待定系数法求得即可；
- (3) 利用三角形面积公式求得即可。

【小问 1 详解】

如图：



北京中考在线
微信号：BJ_zkao

【小问 2 详解】

把 $(-2, 0)$ ， $(1, 3)$ 代入 $y=kx+b$ ，

$$\therefore \begin{cases} -2k+b=0 \\ k+b=3 \end{cases}$$

解得： $k=1$ ， $b=2$

\therefore 此函数解析式 $y=x+2$

【小问 3 详解】

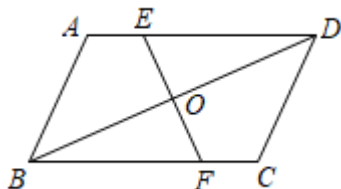
$\therefore A(-2, 0)$ ， $B(1, 3)$ ，

$\therefore OA=2$ ，

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

【点睛】 本题考查了待定系数法求一次函数的解析式，一次函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，熟练掌握待定系数法是解题的关键。

19. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，连接 BD ，取 BD 中点 O ，过点 O 作直线 EF ，分别交 AD ， BC 于点 E ， F ，求证： $AE=CF$ 。



【答案】 见解析

【分析】 欲证明 $AE=CF$ ，只要证明 $\triangle DOE \cong \triangle BOF$ (ASA) 即可；

【详解】 $\therefore BD$ 的中点是 O ，

$\therefore OB=OD$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，



$\therefore AD \parallel BC, AD=BC$

$\therefore \angle ODE = \angle OBF, \angle OED = \angle OFB,$

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ODE = \angle OBF \\ OD = OB \\ \angle OED = \angle OFB \end{cases},$$

$\therefore \triangle DOE \cong \triangle BOF$ (ASA),

$\therefore DE = BF$

$\therefore AD - DE = BC - BF$

$\therefore AE = CF.$

【点睛】 此题考查了平行四边形的性质以及全等三角形的判定与性质. 解题的关键是熟记平行四边形的各种性质以及全等三角形的各种判定方法.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象是由函数 $y = x$ 的图象平移得到, 且经过点 $(1, 2)$.

(1) 求这个一次函数的解析式;

(2) 当 $x > m$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = 2x - 3$ 的值大于一次函数 $y = kx + b$ 的值, 直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y = x + 1$

(2) $m \geq 4$

【分析】 (1) 利用待定系数法求解函数解析式即可;

(2) 根据题意列出不等式求出解集即可求解.

【小问 1 详解】

解: \because 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象是由函数 $y = x$ 的图象平移得到,

$\therefore k = 1,$

\because 一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 的图象过点 $(1, 2)$,

$\therefore 1 + b = 2,$ 则 $b = 1,$

\therefore 此一次函数解析式为 $y = x + 1;$

【小问 2 详解】

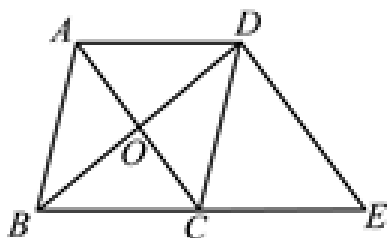
解, 解不等式 $2x - 3 > x + 1$ 得 $x > 4,$

\therefore 当 $x > m$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = 2x - 3$ 的值大于一次函数 $y = kx + b$ 的值,

$\therefore m \geq 4,$ 即 m 的取值范围 $m \geq 4.$

【点睛】 本题考查待定系数法求函数解析式、一次函数与不等式的关系, 正确求得一次函数解析式是解答的关键.

21. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 过点 D 作 $DE \perp BD$ 交 BC 的延长线于点 E .



(1) 求证：四边形 $ACED$ 是平行四边形；

(2) 若 $AB = \frac{5}{2}$, $DE = 3$, 求 BD 的值.

【答案】 (1) 见解析 (2) 4

【分析】 (1) 根据菱形的性质得到 $AD \parallel BC$, $AC \perp BD$, 再根据平行线的判定, 可以推导出 $AC \parallel DE$, 从而证明得到结论;

(2) 根据菱形的性质得到 BE 的长度, 再根据勾股定理即可计算出 BD 的长度.

【小问 1 详解】

\because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AC \perp BD$,

$\because DE \perp BD$,

$\therefore AC \parallel DE$,

\therefore 四边形 $ACED$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

$\because ACED$ 是平行四边形,

$\therefore AD = CE$,

\because 四边形 $ABCD$ 为菱形,

$\therefore AB = AD = BC = \frac{5}{2}$,

$\therefore BE = 5$,

$\because BD \perp DE$,

$\therefore \angle BDE = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中,

$$BD = \sqrt{BE^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

【点睛】 本题考查了菱形的性质, 平行四边形的判定与性质, 平行线的判定, 勾股定理等知识, 灵活运用知识是本题的关键.

22. 十八世纪, 古巴比伦泥板书上有这样一个问题: “一块矩形田地面积为 55, 长边比短边多 6, 问长边多长?” 请用一元二次方程的知识解决这个问题.

【答案】 11

【分析】 根据矩形的面积公式列式计算即可.

【详解】 解: 设矩形长边为 x , 短边为 $(x - 6)$.

由题意得: $x(x - 6) = 55$,



解得： $x_1 = 11$ ， $x_2 = -5$ （舍去）。

答：矩形长边为 11。

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，掌握矩形的面积计算方法是解题的关键。

23. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx + m - 2 = 0$ 。

(1) 求证：此方程总有两个不相等的实数根；

(2) 若此方程有一个根是 0，求出 m 的值和另一个根。

【答案】(1) 见解析 (2) $m=2$ ，方程的另一个根是 2。

【分析】(1) 表示出根的判别式，判断其值正负即可得证；

(2) 把 $x=0$ 代入方程求出 m 的值，即可确定出另一根。

【小问 1 详解】

证明： $\Delta = m^2 - 4(m - 2) = m^2 - 4m + 8 = (m - 2)^2 + 4$ ，

$\therefore (m - 2)^2 \geq 0$ ，

$\therefore (m - 2)^2 + 4 > 0$ ，即 $\Delta > 0$ ，

\therefore 方程总有两个不等实数根；

【小问 2 详解】

解： \because 方程有一个根是 0，

$\therefore m - 2 = 0$ ，

解得： $m = 2$ ，

$\therefore x^2 - 2x = 0$ ，即 $x(x - 2) = 0$ ，

解得： $x_1 = 0$ ， $x_2 = 2$ ，

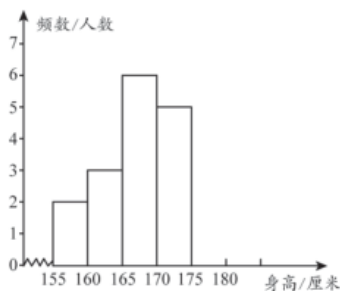
\therefore 此方程 另一个根是 2。

【点睛】此题考查了根的判别式，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根。同时考查了一元二次方程的解的定义以及因式分解法解一元二次方程。

24. 为了了解某中学八年级 160 名男生的身体发育情况，从中随机抽取了 20 名男生的身高进行测量，并对数据进行了整理、描述和分析，下面给出了部分信息。

a. 20 名男生身高数据如下(单位：cm)：168 161 157 165 173 173 166 176 167 174 176 161 173 171 179 169 169 177 162 155

b. 经分组整理后的频数分布表与频数分布直方图如图所示：



分组身高 x 厘米	频数	频率



$155 \leq x < 160$	2	0.10
$160 \leq x < 165$	3	b
$165 \leq x < 170$	6	
$170 \leq x < 175$		0.25
$175 \leq x < 180$	a	0.20
合计	20	1

但在列表和画图时，遗漏了频数分布表中的数据和频数分布直方图中相应的条形图，请根据所给信息，解答下列问题：

- (1) $a=$ ____, $b=$ ____;
- (2) 请补全频数分布直方图;
- (3) 样本数据中，男生身高的中位数是_____;
- (4) 估计该校八年级男生身高在 170-175cm 范围内的人数约为_____.

【答案】 (1) 4, 0.15

(2) 见解析 (3) 169

(4) 40

【分析】 (1) 根据频数=总数 \times 频率可计算出 a 的值，根据频数/频率=总数可计算出 b 的值；

(2) 根据 a 的值即可补全频数分布直方图；

(3) 根据中位数的定义即可求解；

(4) 根据样本估计总体即可求解.

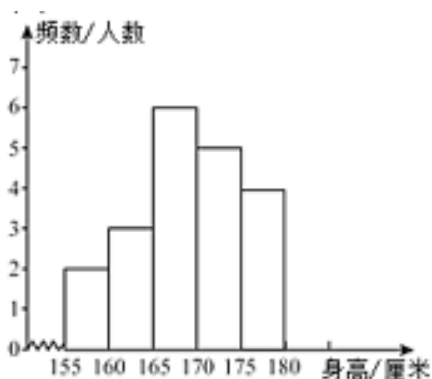
【小问 1 详解】

解：根据题意得： $a=20 \times 0.20=4$ ；

$$b = \frac{3}{20} = 0.15;$$

【小问 2 详解】

解：补全频数分布直方图如下图：



【小问 3 详解】

解：20 名男生身高数据从小到大排列，第 10, 11 个数据是 169, 169,

\therefore 样本数据中，男生身高的中位数是 $\frac{169+169}{2} = 169$,



故答案为：169

【小问 4 详解】

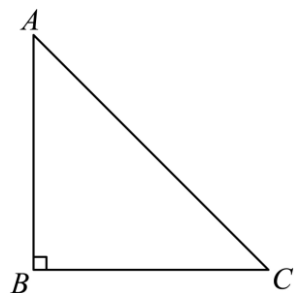
解：估计该校八年级男生身高在 170-175cm 范围内的人数约为

$$160 \times 0.25 = 40 \text{ 人,}$$

故答案为：40.

【点睛】本题考查频数分布直方图、频数分布表、中位数、用样本估计总体，解答本题的关键是明确频数分布直方图的特点，利用数形结合的思想解答.

25. 下面是小明设计的作正方形 $ABCD$ 的尺规作图过程.



已知： $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = BC$

求作：正方形 $ABCD$.

作法：如图，

1. 以点 A 为圆心， BC 长为半径作弧；
2. 以点 C 为圆心， AB 长为半径作弧；
3. 两弧交于点 D . 点 B 和点 D 在 AC 异侧；
4. 连接 AD ， CD .

所以四边形 $ABCD$ 是正方形.

(1) 根据小明设计的尺规作图过程，使用直尺和圆规，补全图形(保留作图痕迹)；

(2) 完成下面的证明.

证明：

$$\because AB = \underline{\hspace{1cm}}, BC = \underline{\hspace{1cm}},$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形(____)(填推理的依据),

$$\text{又} \because AB = BC,$$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是正方形(____)(填推理的依据).

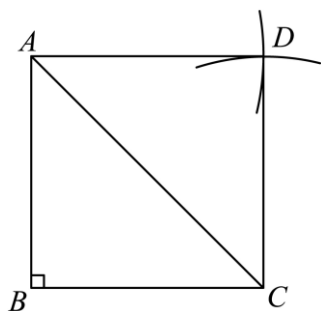
【答案】(1) 见解析 (2) CD ; AD ; 有一个角是直角的平行四边形是矩形；有一组邻边相等的矩形是正方形

【分析】(1) 根据题意作图即可；

(2) 根据平行四边形的判定，矩形的判定和正方形的判定定理填空即可.

【小问 1 详解】

解：如图，四边形 $ABCD$ 即为所求；



【小问 2 详解】

证明：∵ $AB=CD$, $BC=AD$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∵ $\angle ABC=90^\circ$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是矩形(有一个角是直角的平行四边形是矩形),

又∵ $AB=BC$,

∴ 四边形 $ABCD$ 是正方形(有一组邻边相等的矩形是正方形),

故答案为: CD ; AD ; 有一个角是直角的平行四边形是矩形; 有一组邻边相等的矩形是正方形.

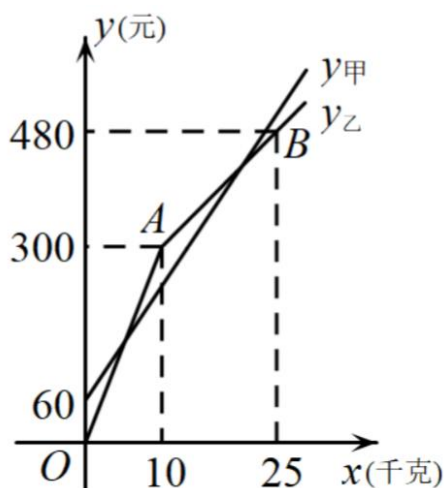
【点睛】本题考查了尺规作图, 平行四边形的判定, 矩形的判定和正方形的判定, 熟练掌握相关判定定理是解题的关键.

26. “莓好生活, 幸福家园”, 春节期间, 小明一家要去采摘草莓, 现有甲、乙两家草莓采摘园草莓品质相同, 销售价格也相同, 且推出了如下的优惠方案:

甲园: 游客需购买门票, 采摘的草莓六折优惠;

乙园: 游客进园不需购买门票, 采摘的草莓超过一定数量后, 超过的部分打折优惠.

优惠期间, 某游客的草莓采摘量为 x (千克), 在甲园所需总费用为 $y_{甲}$ (元), 在乙园所需总费用为 $y_{乙}$ (元), $y_{甲}$, $y_{乙}$ 与 x 之间的函数关系如图所示.



(1) 甲采摘园的门票是 60 元, 两个采摘园优惠前的草莓单价是每千克 30 元.

(2) 求 $y_{甲}$ 与 x 的函数表达式;

(3) 当游客采摘 18 千克草莓时, 选择哪一家采摘园更便宜?

【答案】 (1) 60,30

(2) $y_{甲} = 18x + 60$



(3) 甲采摘园更便宜，见解析

【分析】(1) 根据函数图像即可得到答案；

(2) 根据函数图像得到 $y_{甲}$ 经过点 $(0, 60)$ 和 $(10, 300)$ ，设 $y_{甲}$ 与 x 的函数表达式是 $y_{甲}=kx+b (k \neq 0)$ ，然后运用待定系数法即可解答；

(3) 先求出当 $x > 10$ 时， $y_{乙}$ 与 x 的关系式，然后令 $x=18$ 分别代入解析式求解，最后比较即可。

【小问 1 详解】

由图像可知，

甲采摘园的门票是 60 元，

两个采摘园优惠前的草莓单价是 $300 \div 10 = 30$ (元/千克)。

故答案为：60, 30.

【小问 2 详解】

解：根据函数图像得到 $y_{甲}$ 经过点 $(0, 60)$ 和 $(10, 240)$ ，

设 $y_{甲}$ 与 x 的函数表达式是 $y_{甲}=kx+b (k \neq 0)$

$$\begin{cases} 10k + b = 240 \\ b = 60 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 18 \\ b = 60 \end{cases}$$

所以，甲函数的表达式为 $y_{甲}=18x+60$ 。

【小问 3 详解】

解：当 $x=18 > 10$ 时，根据函数图像得到 $y_{乙}$ 经过点 $(25, 480)$ 和 $(10, 300)$ ，

设 $y_{乙}$ 与 x 的函数表达式是 $y_{乙}=k_1x+b_1 (k_1 \neq 0)$

$$\begin{cases} 10k_1 + b_1 = 300 \\ 25k_1 + b_1 = 480 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_1 = 12 \\ b_1 = 180 \end{cases}$$

则乙的表达式为 $y_{乙}=12x+180$

当 $x=18$ 时， $y_{甲}=18 \times 18 + 60 = 384$ ，

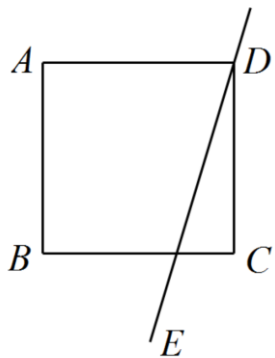
$y_{乙}=12 \times 18 + 180 = 396$ ，

$\because 384 < 396$ ，

\therefore 甲采摘园更便宜。

【点睛】本题主要考查了从函数图像上获取信息、一次函数的应用等知识，解答本题的关键是通过观察图像得到 $y_{甲}$ 、 $y_{乙}$ 经过的点，进而求得函数解析式。

27. 已知：正方形 $ABCD$ ，过点 D 作直线 DE ，点 C 关于直线 DE 的对称点为 C' ，连接 DC' ，作直线 AC' 交直线 DE 于点 P 。



- (1) 补全图形;
- (2) 判断 $\triangle DAC'$ 的形状并证明;
- (3) 猜想线段 PA , PC , PD 的数量关系并证明.

【答案】(1) 见解析 (2) 等腰三角形, 见解析

(3) $PA + PC = \sqrt{2}PD$, 见解析

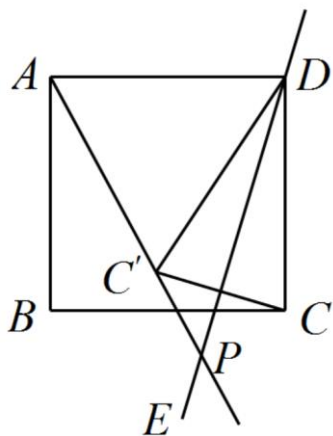
【分析】(1) 根据题意补全图形;

(2) 根据正方形的性质得到 $AD = DC$, 根据轴对称的性质得到 $DC = DC'$, 进而证明结论;

(3) 延长 PA 至点 M , 使得 $AM = PC$, 连接 DM , 证明 $\triangle DAM \cong \triangle DCP$, 根据全等三角形的性质得到 $DM = DP$, $\angle ADM = \angle CDP$, 根据等腰直角三角形的性质计算, 证明结论.

【小问 1 详解】

补全图形, 如图所示:



【小问 2 详解】

$\triangle DAC'$ 是等腰三角形, 理由如下:

\because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD = DC$,

\because 点 C 关于直线的对称点为 C' ,

$\therefore DC = DC'$,

$\therefore AD = DC'$,

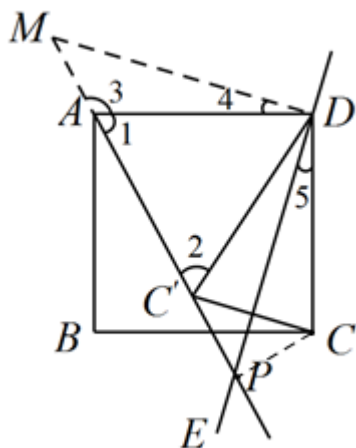
$\therefore \triangle DAC'$ 是等腰三角形;

【小问 3 详解】

$PA + PC = \sqrt{2}PD$, 理由如下:



连接 CP ，延长 PA 至点 M ，使得 $AM=PC$ ，连接 DM



由对称性可得， $\angle DCP = \angle DC'P$

由 (2) 可得， $\angle 1 = \angle 2$

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$,

$\angle 2 + \angle DC'P = 180^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle DC'P$,

$\therefore \angle 3 = \angle DCP$,

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore DA = DC$,

$\angle ADC = 90^\circ$,

在 $\triangle DMA$ 和 $\triangle DPC$ 中，

$$\begin{cases} DA = DC \\ \angle 3 = \angle DCP, \\ AM = CP \end{cases}$$

$\therefore \triangle DMA \cong \triangle DPC$ (SAS),

$\therefore \angle 4 = \angle 5, DM = DP$

$\therefore \angle ADP + \angle 5 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 4 + \angle ADP = 90^\circ$,

$\therefore \triangle MDP$ 是等腰直角三角形；

$\therefore PM^2 = PD^2 + DM^2 = 2DP^2$,

$\therefore PM = \sqrt{2} PD$,

$\therefore PA + PC = \sqrt{2} PD$.

【点睛】 本题考查 是正方形的性质、全等三角形的判定和性质、等腰直角三角形的性质、轴对称的性质，正确作出辅助线、证明 $\triangle DAM \cong \triangle DCP$ 是解题的关键.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x_1, y_1)$ ，给出如下定义：当点 $Q(x_2, y_2)$ 满足 $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ 时，称点 Q 是点 P 的等和点，已知点 $P(3, 0)$.



(1) 在 $Q_1(0,3), Q_2(1,4), Q_3(-2,-1)$ 中, 点 P 的等和点有_____;

(2) 点 A 在直线 $y=-x+5$ 上, 若点 P 的等和点也是点 A 的等和点, 求点 A 的坐标;

(3) 已知点 $B(b,0)$ 和线段 MN , 点 C 也在 x 轴上且满足 $BC=1$, 线段 MN 上总存在线段 PC 上每个点的等和点. 若 MN 的最小值为 5, 直接写出 b 的值.

【答案】 (1) $Q_1(0,3), Q_2(1,4)$

(2) $(4, 1)$ (3) $2-5\sqrt{2}$ 或 $4-5\sqrt{2}$ 或 $4+5\sqrt{2}$ 或 $2+5\sqrt{2}$

【分析】 (1) 根据新定义判断即可;

(2) 设点 $P(3, 0)$ 的等和点为 (m, n) , 则 $3+m=n$, 设 $A(t, -t+4)$, 则 A 点的等和点为 (m, n) , 则 $t+m=-t+4+n$, 即可求 $A(4, 1)$;

(3) 由题意可得 P 点的等和点在直线 $y=x+3$ 上, B 点的等和点在直线 $y=x+b$ 上, 再由 $BC=1$, 可得 C 点在 B 的左边和右边, 则线段 PC 上每个点的等和点是两条直线 l 和 l_1 之间的区域, 正确画图列等式可解答.

【小问 1 详解】

$Q_1(0, 3)$, 则 $0+3=3+0$,

$\therefore Q_1(0, 3)$ 是点 P 的等和点;

$Q_2(1, 4)$, 则 $1+3=4+0$,

$\therefore Q_2(1, 4)$ 是点 P 的等和点;

$Q_3(-2, -1)$, 则 $-2+3 \neq -1+0$,

$\therefore Q_3(-2, -1)$ 不是点 P 的等和点;

故答案为: Q_1, Q_2 ;

【小问 2 详解】

设点 $P(3, 0)$ 的等和点为 (m, n) ,

$\therefore 3+m=n$, 有 $m-n=-3$,

$\therefore A$ 在直线 $y=-x+5$ 上,

\therefore 设 $A(t, -t+5)$,

则 A 点的等和点为 (m, n) ,

$\therefore t+m=-t+5+n$, 由 $m-n=-2t+5$,

$\therefore -3=-2t+5$,

解得 $t=4$,

$\therefore A(4, 1)$;

【小问 3 详解】

$\therefore P(3, 0)$,

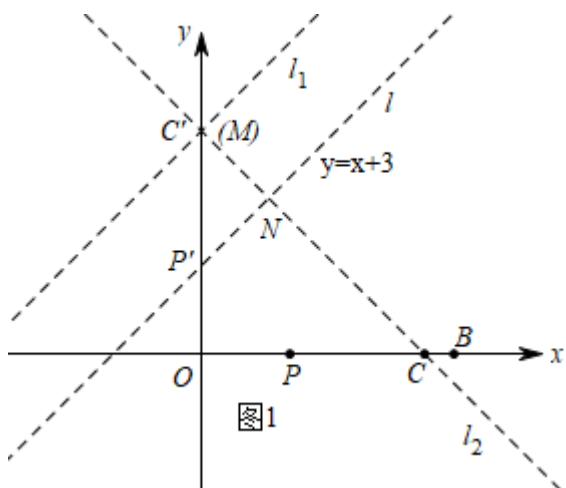
$\therefore P$ 点的等和点在直线 $l: y=x+3$ 上,

$\therefore B(b, 0)$, $BC=1$, 且 C 在 x 轴上,

$\therefore C(b-1, 0)$ 或 $(b+1, 0)$

$\therefore C$ 点的等和点在直线 $l_1: y=x+b-1$ 或 $y=x+b+1$ 上,

设直线 l_1 与 y 轴交于 C' , 直线 l 与 y 轴交于 P' , 则 $C'(0, b-1)$ 或 $(0, b+1)$, $P'(0, 3)$,



①当点 C 在点 B 的左边时, 如图 1, 直线 CC' 与直线 l 交于 N , 当 M 与 C' 重合时, MN 最小为 5,

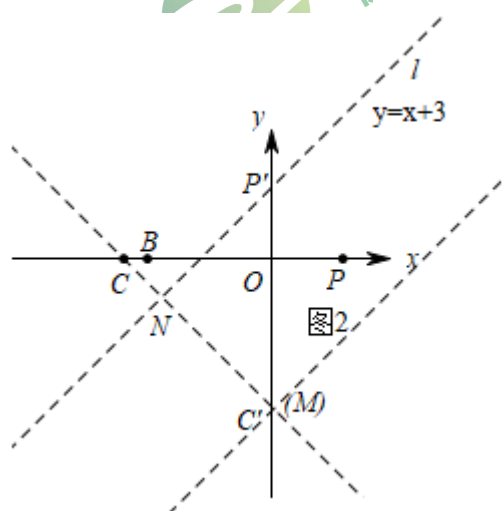
$\therefore \triangle MNP'$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore P'C = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore b-1 = 5\sqrt{2} + 3,$$

$$\therefore b = 4 + 5\sqrt{2};$$

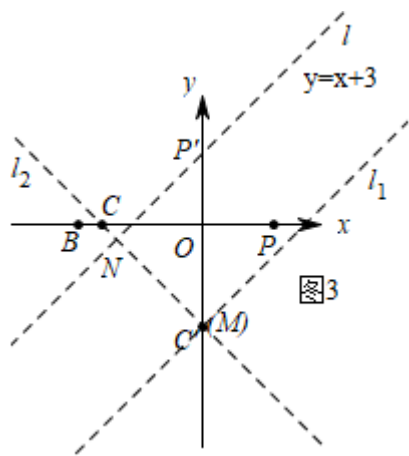
如图 2, 同理得 $P'M = 5\sqrt{2}$,



$$\therefore 3 + (1-b) = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore b = 4 - 5\sqrt{2};$$

②当点 C 在点 B 的右边时, 如图 3,

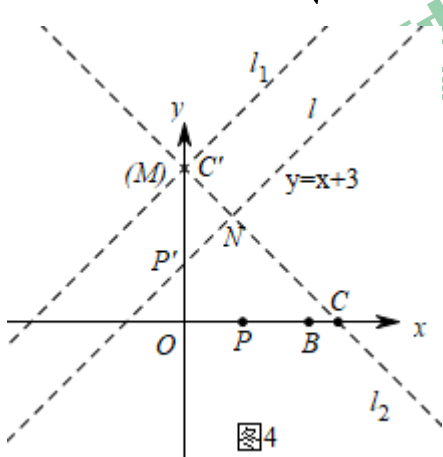


同理得： $PM=5\sqrt{2}$ ，

$$\therefore 5\sqrt{2}-3=-b-1,$$

$$\therefore b=2-5\sqrt{2};$$

如图 4， 同理得： $PM=5\sqrt{2}$ ，



$$\therefore 5\sqrt{2}+3=b+1,$$

$$\therefore b=2+5\sqrt{2};$$

综上， b 的值是 $2-5\sqrt{2}$ 或 $4-5\sqrt{2}$ 或 $4+5\sqrt{2}$ 或 $2+5\sqrt{2}$.

【点睛】 本题是一次函数的综合应用， 考查了一次函数的性质， 新定义： 等和点的理解和运用， 熟练掌握一次函数的图象及性质， 理解新定义， 将所求问题与一次函数相结合是解题的关键.

