2023北京北大附中初一（下）期中

数　学

一、选择题（本题共30分，每小题3分）下列各题的四个备选答案中，只有一个正确.

1. 在平面直角坐标系中，点 $2,-1$ 所在的象限是（ ）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 9的平方根是（　）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\pm\sqrt{3}$　　C. 3　　D. ± 3

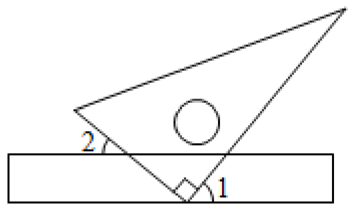
3. 下列实数中的无理数是（　）

A. 1.414　　B. 0　　C. π　　D. $-\frac{1}{3}$

4. 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ 是二元一次方程 $ax+y=2$ 的一个解，则 a 的值为（ ）

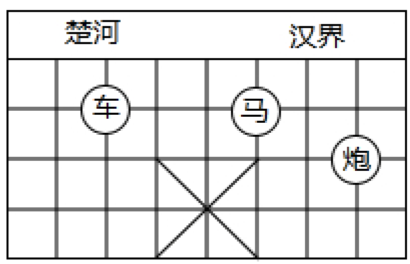
A. 2　　B. -2　　C. 1　　D. -1

5. 将含30°的直角三角板与直尺如图所示放置，若∠2=40°，则∠1的度数为（ ）



A. 30°　　B. 40°　　C. 50°　　D. 60°

6. 如图，已知棋子“车”的坐标为（－2，－1），棋子“马”的坐标为（1，－1），则棋子“炮”的坐标为（　　）



A. （3，2）　　B. （－3，2）　　C. （3，－2）　　D. （－3，－2）

7. 在下列命题中，为真命题的是（　）

A. 两条直线被第三条直线所截，同位角相等　　B. 平行于同一条直线的两条直线互相平行

C. 同旁内角互补　　D. 垂直于同一条直线的两条直线互相垂直

8. 已知 $\begin{cases} x=3+t \\ y=3-2t \end{cases}$，则用含x的式子表示y为（　　）

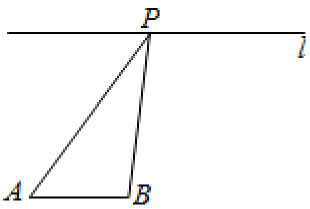
A. y= - 2x+9　　　　　　B. y=2x - 9　　　　　　C. y= - x+6　　　　　　D. y= - x+9

9. 如图，用边长为 3 的两个小正方形拼成一个大正方形，则大正方形的边长最接近的整数是（　　）

A. 3　　　　　　B. 4　　　　　　C. 5　　　　　　D. 6

10. 如图，点 A，B 为定点，直线 $l\parallel AB$，P 是直线 l 上一动点．对于下列各值：

①线段 AB 的长②△PAB 的周长③△PAB 的面积④∠APB 的度数，其中不会随点 P 的移动而变化的是（　　）



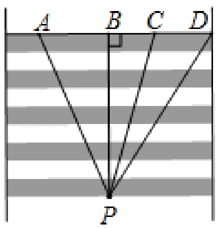
A. ①③　　　　　　B. ①④　　　　　　C. ②③　　　　　　D. ②④

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

11. 若关于 x，y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=2① \\ A=0② \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$，则多项式 A 可以是_____（写出一个即可）．

12. 若 $(a-3)^2+\sqrt{b+2}=0$，则 $a+b=$____．

13. 如图，从人行横道线上的点 P 处过马路，沿线路 PB 行走距离最短，其依据的几何学原理是_______．



14. 如果点 P（ - 1，m - 3）到 x 轴的距离等于 2，那么 m 的值为____．

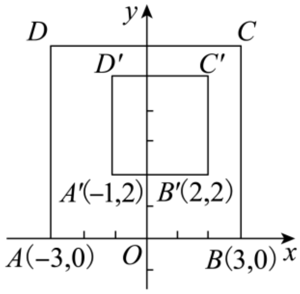
15. 已知锐角 α，那么 $\angle\alpha$ 的补角与 $\angle\alpha$ 的余角的差是___°．

16. 直线 $AB\parallel x$ 轴，$AB=5$，若已知点 $A(1,-3)$，则点 B 的坐标是___．

17. 可以用一个 m 的值说明命题"如果 m 能被 2 整除，那么它也能被 4 整除"是假命题，这个值可以是 $m=$________．

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，对正方形 $ABCD$ 及其内部的每个点进行如下操作：把每个点的横、纵坐标都乘以同一个实数 a，将得到的点先向右平移 m 个单位，再向上平移 n 个单位（$m>0,n>0$），得到正方形 $A'B'C'D'$ 及其内部的点，其中点 A，B 的对应点分别为 A',B'，若正方形 $ABCD$ 内部的一个点 F

经过上述操作后得到的对应点 F' 与点 F 重合，则点 F 的坐标为___.



三、解答题（本题共 54 分，第 19 题 6 分，第 20 题 5 分，第 21 题 6 分，第 22—24 题，每小题 5 分，第 25 题 7 分，第 26 题 8 分，第 27 题 7 分）

19. 计算：$\sqrt{49}+\sqrt[3]{-27}+\left|1-\sqrt{2}\right|-\sqrt{2}$.

20. 解方程组：$\begin{cases}3x+2y=19\\2x-y=1\end{cases}$

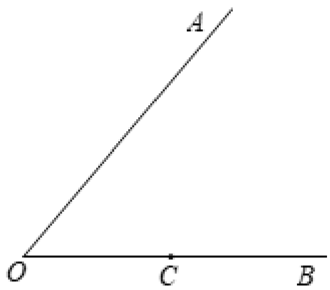
21. 若一个正数的两个平方根分别为 $a-1$，$2a+7$，请先化简再求值：$2\left(a^2-a+1\right)-\left(a^2-2a\right)+3$.

22. 如图，$\angle AOB$，点 C 在边 OB 上.

（1）过点 C 画直线 $CD\perp OA$，垂足为 D;

（2）过点 C 画直线 $CM\,//\,OA$，过点 D 画直线 $DN\,//\,OB$，直线 CM，DN 交于点 E.

（3）如果 $\angle AOB=50°$，那么 $\angle CDE=$_________°.



23. 完成下面的证明：

已知，如图，$\angle C=\angle D$， $\angle 1=\angle 4$.

求证：$AC\,//\,DF$.

证明：∵ $\angle 1=\angle 4$（已知），

$\angle 3=\angle 4$（ ① ），

∴ $\angle 1=\angle 3$（ ② ）.

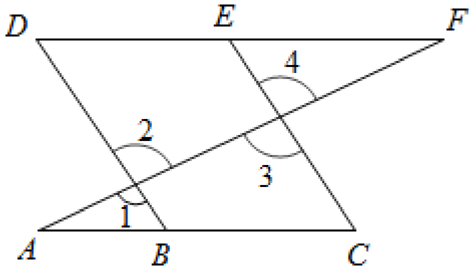
∴ $DB\,//\,CE$（ ③ ）.

∴ $\angle C=\angle DBA$（ ④ ）.

又∵ $\angle D=\angle C$（已知），

∴ $\angle D=\angle DBA$.

∴ $AC\,//\,DF$（ ⑤ ）.



24. 列方程解应用题：

北大附中畅春园校区教学楼有 4 层，其中初一、初二的班级教室都在 2—4 层，共有 35 个班，1200 名学生．进出教学楼共有 4 道门，其中两道正门大小相同，两道侧门大小也相同．周一早上参加升旗仪式时，各班从教室出发，如果通过两道正门和一道侧门走到操场，那么 4 分钟可以集合完毕；如果通过两道侧门和一道正门走到操场，那么 5 分钟可以集合完毕（出门跑到操场指定位置的时间忽略不计）．求平均每分钟一道正门和一道侧门各可以通过多少人？

25. 如果关于 x、y 的二元一次方程组的解满足 $|x-y|=1$，那么我们称这个方程组为“友好方程组”．

（1）判断方程组 $\begin{cases}x+2y=7\\3x-y=7\end{cases}$ 是否是“友好方程组”，并说明理由；

（2）若方程组 $\begin{cases}4x-y=6\\2x+3y=4m\end{cases}$ 是“友好方程组”，求 m 的值；

（3）如果方程组 $\begin{cases}x+ay=7\\2y-x=5\end{cases}$ 的解是正整数，且 a 是正整数，那么这个方程组是否可以是“友好方程组”？如果可以，请求出 a 的值及方程组的解；如果不可以，请说明理由．

26. 如图，$\angle AOB=\alpha$，OC 平分 $\angle AOB$，D 是边 OA 上一点，将射线 OB 沿 OD 平移至射线 DE，交 OC 于点 F，E 在 F 右侧，M 是射线 DA 一点（与 D 不重合），N 是线段 DE 上一点（与 D，F 不重合），连接 MN，$\angle OMN=\beta$．

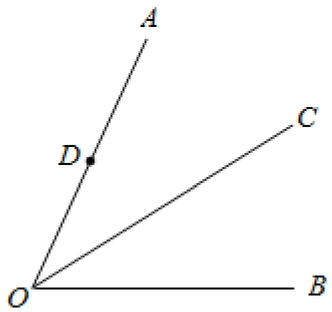
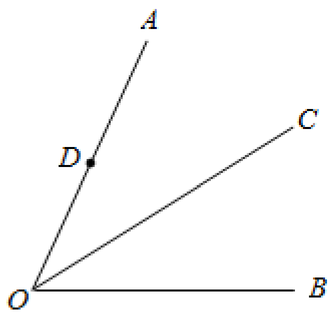


图 1



备用图

（1）请在图 1 中根据题意补全图形；

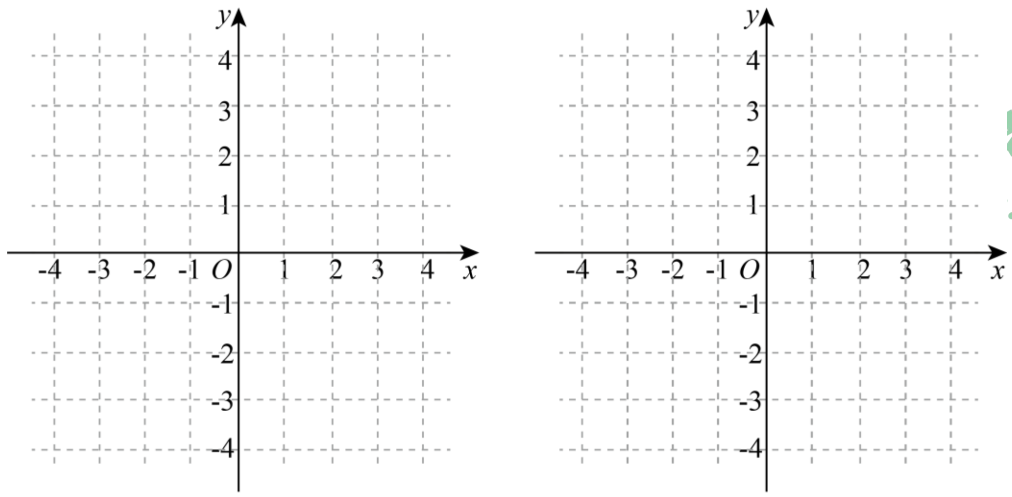
（2）求 $\angle MNE$ 的度数（用含 α，β 的式子表示，写出推导过程）；

（3）点 G 在线段 OF 上（与 O，F 不重合），连接 GN 并延长交 OA 于点 H，且满足 $\angle MNE+2\angle ENG=180^\circ$，画出符合题意的图形，并直接写出 $\angle NGO$ 与 $\angle OMN$ 之间的数量关系．

27. 在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，定义点 A 和点 B 的关联值$[A, B]$如下：

若 O，A，B 在一条直线上$[A,B]=0$；

若 O，A，B 不在一条直线上$[A,B]=S_{\Delta OAB}$．



备用图

已知点 A 坐标为$(4,0)$点 B 坐标为$(0,4)$，回答下列问题：

（1）$[A, B]=$______；

（2）若$[P, A]=0$，$[P, B]=1$，则点 P 坐标为______；

（3）在图中画出所有满足$[P, A]=[P, B]$的点 P，并说明理由．

（4）若一个正方形中任意一点 P 都满足$[P, A]+[P, B]\le 2$，则称这个正方形为正规正方形．请直接写出包含点 O 的正规正方形面积的最大值：______．

参考答案

一、选择题（本题共 30 分，每小题 3 分）下列各题的四个备选答案中，只有一个正确.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	D	C	D	C	C	B	A	B	A

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

11. $x-y$（答案不唯一）

12. 1

13.垂线段最短

14. 1 或 5

15. 90

16. $(-4,-3)$或$(6,-3)$每个 1 分

17. 10（答案不唯一）

18. $(1,4)$

三、解答题（本题共 54 分，第 19 题 6 分，第 20 题 5 分，第 21 题 6 分，第 22—24 题，每小题 5 分，第 25 题 7 分，第 26 题 8 分，第 27 题 7 分）

19.原式$=7-3+\sqrt{2}-1-\sqrt{2}$

$=3$.

20. 法一、解：$\begin{cases}3x+2y=19 ① \\ 2x-y=1 ②\end{cases}$,

②×2 得：$4x-2y=2$ ③，

①+③得：$7x=21$，

即 $x=3$，

把 $x=3$ 代入②得：$6-y=1$，

$y=5$

所以$\begin{cases}x=3 \\ y=5\end{cases}$是原方程组的解

由②得：$y=2x-1$③，

把③代入①得：$3x+2(2x-1)=19$，

即 $x=3$，

把 $x=3$ 代入②得：$6-y=1$，

$y=5$

所以$\begin{cases}x=3 \\ y=5\end{cases}$是原方程组的解

21.解：∵ $a-1$，$2a+7$，是一个正数的两个平方根

∴（a-1）+（2a+7）=0，

解得 a=-2．

$$2\left(a^2-a+1\right)-\left(a^2-2a\right)+3$$

$$=2a^2-2a+2-a^2+2a+3$$

$$=a^2+5，$$

当 a=-2 时，原式$=\left(-2\right)^2+5=9$．

22.【详解】解：（1）如图所示，直线 CD 就是所求画直线；

（2）如图所示，直线 CM、直线 DN 就是所求画直线；

（3）∵$CD\perp OA$，

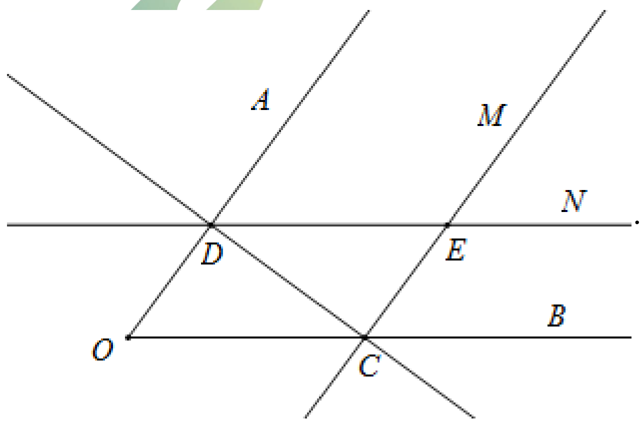
∴∠CDO=90°，

∵DN∥OB，

∴∠AOB=∠ADE=50°，

∴∠CDE=180°-∠CDO-∠ADE=40°，

故答案为：40°．



23. 证明：∵∠1=∠4（已知），

∠3=∠4（对顶角相等），

∴∠1=∠3（等量代换），

∴DB∥CE（同位角相等，两直线平行），

∴∠C=∠DBA（两直线平行，同位角相等）．

又∵∠D=∠C（已知），

∴∠D=∠DBA，

∴AC∥DF（内错角相等，两直线平行）．

故答案为：对顶角相等；等量代换；同位角相等，两直线平行；两直线平行，同位角相等；内错角相等，两直线平行．

24.设一道正门平均每分钟可以通过 x 人，一道侧门平均每分钟可以通过 y 人，

根据题意得$\begin{cases}4(2x+y)=1200\\5(x+2y)=1200\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=120\\y=60\end{cases}$

答：一道正门平均每分钟可以通过 120 人，一道侧门平均每分钟可以通过 60 人

25. （1）该方程组是“友好方程组”

理由：解方程组得$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$，$|x-y|=1$，符合定义

（2）解法一：

解：解方程组得$\begin{cases}x=\dfrac{2m+9}{7}\\y=\dfrac{8m-6}{7}\end{cases}$

又$|x-y|=1$，则$\left|\dfrac{2m+9}{7}-\dfrac{8m-6}{7}\right|=1$，$\left|\dfrac{15-6m}{7}\right|=1$，

解得$m=\dfrac{4}{3}$或$\dfrac{11}{3}$.

解法二：

由方程组是“友好方程组”可知$x-y=\pm1$，

与方程$4x-y=6$可得$\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$或$\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$

当$\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\y=\dfrac{2}{3}\end{cases}$时，$2x+3y=\dfrac{16}{3}=4m$，则$m=\dfrac{4}{3}$；

当$\begin{cases}x=\dfrac{7}{3}\\y=\dfrac{10}{3}\end{cases}$时，$2x+3y=\dfrac{44}{3}=4m$，则$m=\dfrac{11}{3}$；

解得$m=\dfrac{4}{3}$或$\dfrac{11}{3}$.

（3）解法一：

方程组两式相加得$(a+2)y=12$，

该方程组有解，则$a\neq-2$，那么$y=\dfrac{12}{a+2}$

代入②式得，$x=\dfrac{24}{a+2}-5$，

若该方程组是“友好方程组”，则$|x-y|=\left|\dfrac{12}{a+2}-5\right|=1$，

则$\dfrac{12}{a+2}=6$或4，

得到$a=0$或1，

由于a是正整数，则$a=1$，

代回检验$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，满足解是正整数

综上所述，$a=1$，方程组的解是$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

解法二：

如果该方程组是“友好方程组”，那么$x-y=\pm1$，由该式与方程组中得②式$2y-x=5$构成方程组得

$\begin{cases}x-y=1\\2y-x=5\end{cases}$或$\begin{cases}x-y=-1\\2y-x=5\end{cases}$

解方程组的解是$\begin{cases}x=7\\y=6\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$

若方程组的解是$\begin{cases}x=7\\y=6\end{cases}$，代入方程①得$a=0$，不合题意；

若方程组的解是$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$，代入方程①得$a=1$，符合题意；

综上所述，$a=1$，方程组的解是$\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}$.

26. 评标

（1）2分

画出射线DE，标记点F得1分

画出线段MN得1分

（2）3分

只写出$\angle MNE=\alpha+\beta$得1分

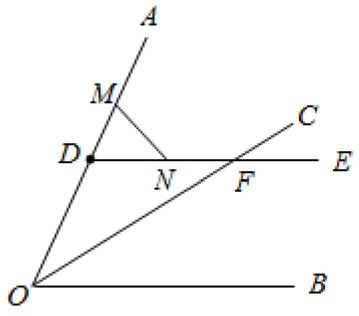


图1

有必要的推导过程得 2 分

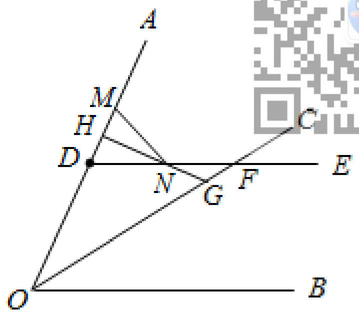
预设学生会出现的思路：

解法 1.过点 作 DE 的平行线（或直接画出基本图形）

解法 2.直接运用外角性质

以上均酌情给分

（3）3 分



画出符合题意的图形得 1 分

说明：点 G 的位置应该是 $\angle MND$ 角平分线的反向延长线与射线 OC 的交点

结论 $\angle OMN+2\angle NGO=180^\circ$ 占 2 分

27.（1）$\because$点 A 坐标为$(4,0)$点 B 坐标为$(0,4)$，

$\therefore [A,B]=S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$，

故答案为：8；

（2）$\because [P,A]=0$，

$\therefore$点 P 在 x 轴上，

$\because [P,B]=1$

$\therefore S_{\triangle POB}=1$，

设 $P(t,0)$，

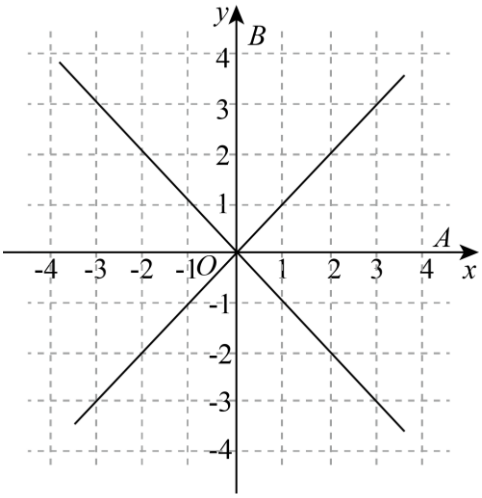
$\therefore \dfrac{1}{2}|t|\times4=1$，

解得：$t=\pm\dfrac{1}{2}$，

$\therefore P\left(\dfrac{1}{2},0\right)$或$\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$

故答案为：$\left(\pm\dfrac{1}{2},0\right)$

（3）点 P 在一三象限的角平分线，二四象限的角平分线上，作图如下：



理由：设点 P 坐标为 $(x，y)$，

那么 $[P,A]=2|y|,[P,B]=2|x|$，

所以 $|x|=|y|$.

因此 $y=x$ 或 $y=-x$，

即为一三象限和二四象限的角平分线；

（4）设点 P 坐标为 $(x，y)$，

$\because [P,A]+[P,B]\le 2$，

$\therefore |x|+|y|\le 1$，

$\because$ 满足条件的点的全体是一个正方形，且面积为 2.

故答案为：2.