



北师大附属实验中学 2023-2024 学年度第一学期期中试卷

初二年级数学

班级_____ 姓名_____ 学号_____

考 生 须 知	<p>1. 本试卷共 12 页，共 29 道小题，分 A 卷和 B 卷，答题纸共 3 页。考试时间 100 分钟。</p> <p>2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号。</p> <p>3. 试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。</p> <p>4. 在答题卡上，选择题须用 2B 铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答。</p> <p style="text-align: center;">命题人：陈占美 张旖澈 鲍利华 审题人：杨洁</p>
------------------	--

A 卷

一、选择题 (本大题共 10 道小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项最符合题意。每小题 3 分，共 30 分)

1. 现实生活中，对称现象无处不在，中国的汉字中有些也具有对称性，下列汉字是轴对称图形的是 ()

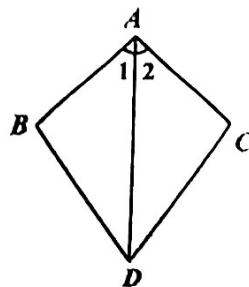
- A. 实 B. 验 C. 中 D. 学

2. 在平面直角坐标系中，点 $(5, -3)$ 关于 y 轴的对称点的坐标为 ()

- A. $(-5, -3)$ B. $(5, 3)$ C. $(-5, 3)$ D. $(-3, -5)$

3. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2$ ，则不一定能使 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 的条件是 ()

- A. $AB = AC$ B. $BD = CD$
 C. $\angle B = \angle C$ D. $\angle BDA = \angle CDA$

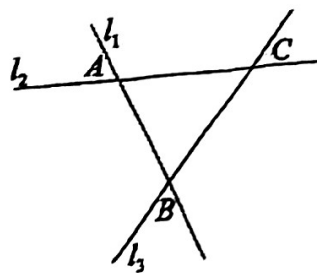




4. 一个多边形的内角和等于它的外角和，这个多边形是 ()
 A. 三角形 B. 四边形 C. 五边形 D. 六边形

5. 如图，直线 l_1, l_2, l_3 分别表示三条互相交叉的公路，交点分别记为 A, B, C ，现要建一个加油站，使它到三个交点的距离相等，加油站的位置应该选在 ()

- A. $\triangle ABC$ 三条角平分线的交点
 B. $\triangle ABC$ 三边垂直平分线的交点
 C. $\triangle ABC$ 三条中线的交点
 D. $\triangle ABC$ 三条高所在直线的交点

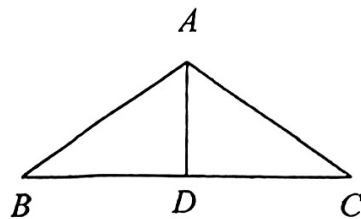


6. 下列各式从左到右的变形中，因式分解正确的是 ()

- A. $x^2 + 2xy - y^2 = (x - y)^2$ B. $(3m + 1)(n - 2) + 2(n - 2) = (3m + 3)(n - 2)$
 C. $x^2 - 3x + 2 = (x + 1)(x - 3)$ D. $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

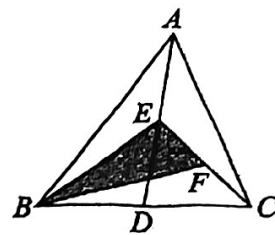
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 边上的动点 (点 D 与 B, C 不重合)， $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积分别表示为 S_1 和 S_2 ，下列条件不能说明 AD 是 $\triangle ABC$ 角平分线的是 ()

- A. $BD = CD$ B. $\angle ADB = \angle ADC$
 C. $S_1 = S_2$ D. $AD = \frac{1}{2}BC$



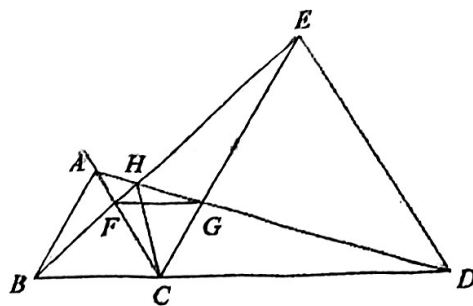
8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E, F 分别为 BC, AD, CE 的中点，且 $S_{\triangle ABC} = 8$ ，则阴影部分面积为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5



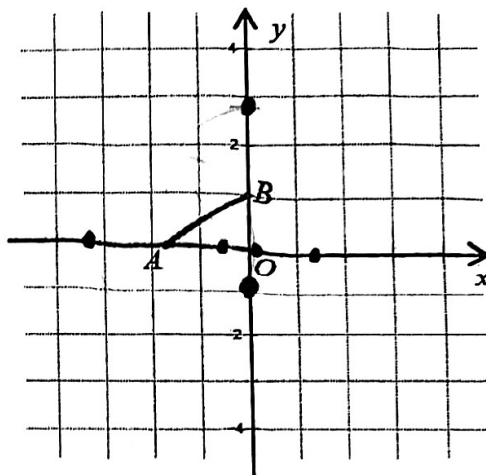


9. 如图, 在等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle ECD$ 中, B, C, D 三点共线, AC 与 BE , AD 与 BE , AD 与 CE 分别交于点 F , 点 H , 点 G , 下列四个结论中: ① $AD = BE$; ② CH 平分 $\angle BHD$; ③ $FG \parallel BD$; ④ $EH + CH = DH$. 所有正确的结论是 ()



- A. ①② C. ①②④ B. ①③④ D. ①②③④

10. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A, B 分别在 x 轴和 y 轴上, 点 B 坐标为 $(0,1)$ 且 $\angle BAO = 30^\circ$, 在坐标轴上求作一点 P , 使得 $\triangle PAB$ 是等腰三角形, 则符合条件的点 P 的个数为 ()

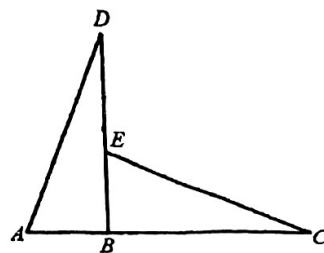


- A. 5 B. 6
C. 7 D. 8

二、填空题 (本大题共 8 道小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

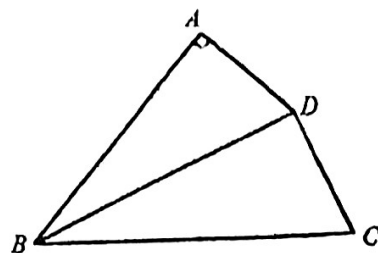
11. 已知一个等腰三角形的两边长分别为 3 和 6, 则该等腰三角形的周长为 _____.

12. 如图, A, B, C 三点共线, D, E, B 三点共线, 且 $\triangle ABD \cong \triangle EBC$, $AB = 5$, $BC = 12$, 则 DE 的长为 _____.

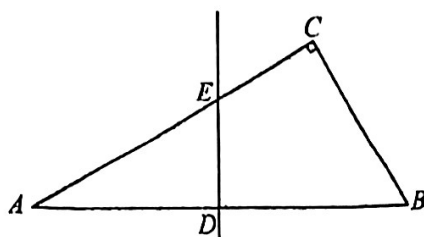




13. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle A=90^\circ$ ， $AD=3$ ， $BC=8$ ，对角线 BD 平分 $\angle ABC$ ，则 $\triangle BCD$ 的面积为_____.



14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle B=60^\circ$ ， $AC=12$ ，斜边 AB 的垂直平分线交 AB 于点 D ，交 AC 于点 E ，则 CE 的长为_____.

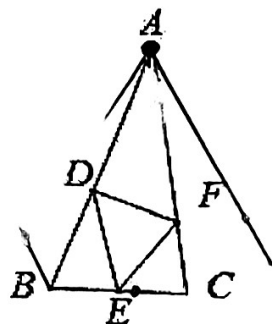


15. 已知 $x+y=5$ ， $xy=4$ ，则 $x-y=$ _____.

16. 若 $x^2 - mx + 25$ 可以用完全平方公式进行因式分解，则 m 的值为_____.

17. 已知 $x^2 - 4x - 2 = 0$ ，则代数式 $2(x-3)^2 + (x+4)(x-4) =$ _____.

18. 如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=30^\circ$ ， $S_{\triangle ABC} = 14$ ， $BC = 4$ ，点 D ， E ， F 分别为 AB ， BC ， AC 上的动点，则 $\triangle DEF$ 周长最小值为_____.



三、解答题（本题共 8 道小题，第 19、20 题 4 分，第 25 题 6 分，第 22 题 7 分，第 21、23、24 题 8 分，第 26 题 9 分，共 54 分）

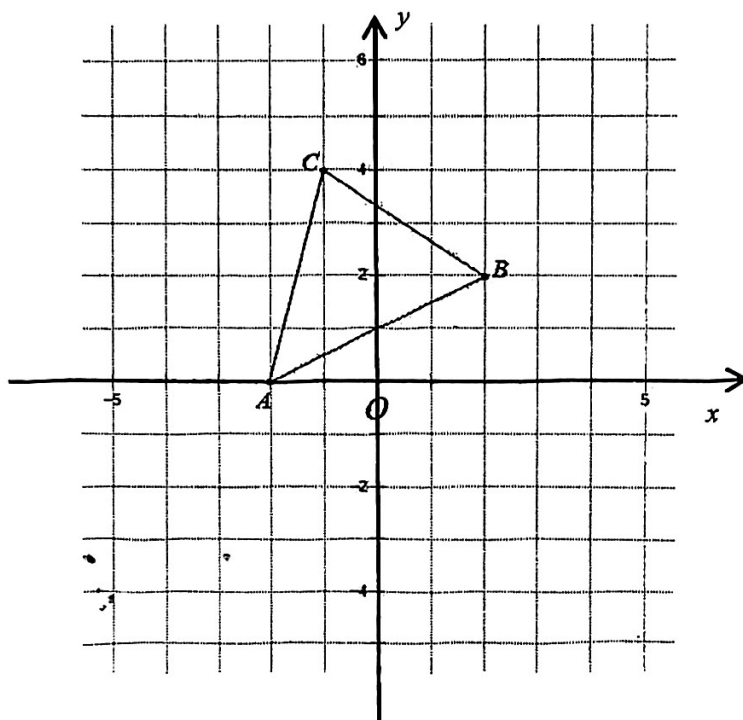
19. 计算： $(-2m^2)^3 \cdot m^2 \div (m^4)^2$

20. 计算： $(2x-3)(x-4) - (x+2)(3x-1)$



21. 因式分解： (1) $x^3y - xy^3$ (2) $-2a^2b + 16ab - 32b$

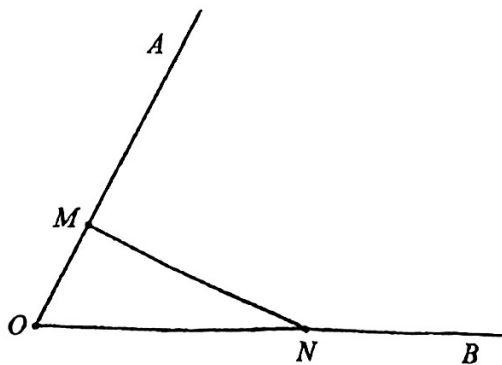
22. 在平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$ ， $B(2,2)$ ， $C(-1,4)$ 。



- (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的三角形 $\triangle A'B'C'$ ，并写出点 B' ， C' 的坐标；
 (2) 在 x 轴上画出一一点 P 使得 $PB + PC$ 最小（保留作图痕迹）。

23. 如图，已知 $\angle AOB$ 和线段 MN ，点 M ， N 在射线 OA ， OB 上。

- (1) 尺规作图：作 $\angle AOB$ 的角平分线和线段 MN 的垂直平分线，交于点 P ，保留作图痕迹，不写作图步骤；





(2) 连接 MP 、 NP ，过 P 作 $PC \perp OA$ ， $PD \perp OB$ ，垂足分别为点 C 和点 D ，求证： $MC=ND$ 。请补全下列证明。

证明： $\because P$ 在线段 MN 的垂直平分线上，

$\therefore MP = NP$. (_____)

$\because P$ 在 $\angle AOB$ 的角平分线上， $PC \perp OA$ ， $PD \perp OB$ ，

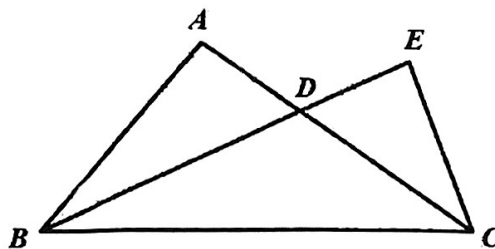
$\therefore PC = PD$. (_____)

请补全后续证明。

24. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=95^\circ$ ， $\angle ABC=50^\circ$ ， BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，延长 BD 至 E ，使 $DE=AD$ ，连接 EC 。

(1) 直接写出 $\angle CDE$ 的度数： $\angle CDE=$ _____ $^\circ$ ；

(2) 猜想线段 BC 与 $AB+CE$ 的数量关系为 _____，并给出证明。



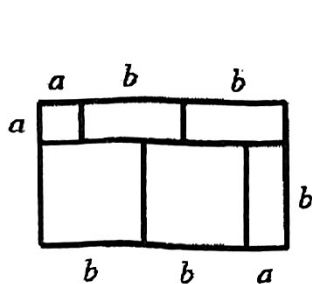


25. 对于一个图形, 通过不同的方法计算图形的面积, 可以得到一个数学等式, 例如由图①可以得到 $(a+b)(a+2b) = a^2 + 3ab + 2b^2$. 请回答下面的问题:

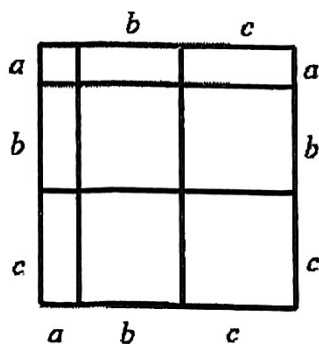
(1) 写出图②中所表示的数学公式_____.

(2) 利用 (1) 中所得到的结论, 解决下面的问题: 已知 $a+b+c=10$, $a^2+b^2+c^2=64$, 求 $ab+ac+bc$ 的值.

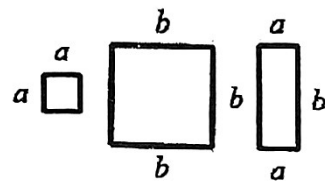
(3) 图③中给出了若干个边长为 a 和边长为 b 的小正方形纸片, 若干个长为 b , 宽为 a 的长方形纸片, 利用所给的纸片拼出一个几何图, 使得计算它的面积能得到数学公式 $(2a+b)(3a+2b) = 6a^2 + 7ab + 2b^2$.



图①



图②



图③

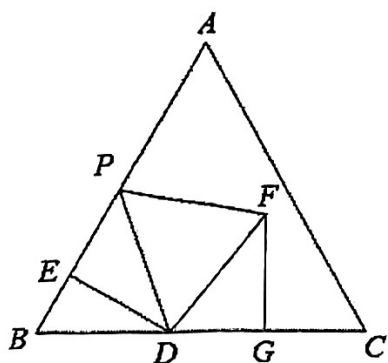


26. (1) 如图①, 在边长为 5 的等边 $\triangle ABC$ 中, 点 D 为 BC 上一点, $BD=2$, 过 D 作 $DE \perp AB$, 垂足为 E , 点 P 是线段 AE 上一动点, 以 PD 为边向右作等边 $\triangle PDF$.

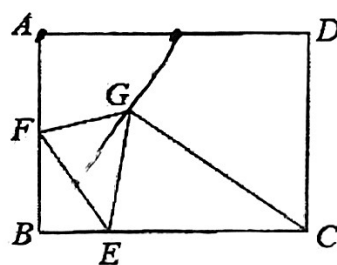
(i) 过点 F 作 $FG \perp BC$ 于 G , 证明: $DE = FG$.

(ii) 当点 P 从点 E 运动到点 A 时, 求点 F 运动的路径长.

(2) 如图②, 在长方形 $ABCD$ 中, $BC = 2\sqrt{2} + 1$, $CD = 2\sqrt{2}$, $\angle DCB = 90^\circ$. E 为 BC 上一点, 且 $BE = 1$, F 为 AB 边上的一个动点, 作顶角 $\angle FEG = 45^\circ$ 的等腰 $\triangle FEG$, 连接 CG , 求 CG 的最小值. (提示: 等腰直角三角形的三边长 a, b, c 满足 $a:b:c = 1:1:\sqrt{2}$)



图①



图②



B 卷

四、探究题（本题共 3 道小题，第 27 题 4 分，第 28 题 8 分，第 29 题 8 分，共 20 分）

27. 我国古代数学曾有许多重要的成就，其中“杨辉三角”（如图）就是一例. 这个三角形给出了 $(a+b)^n$ ($n=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

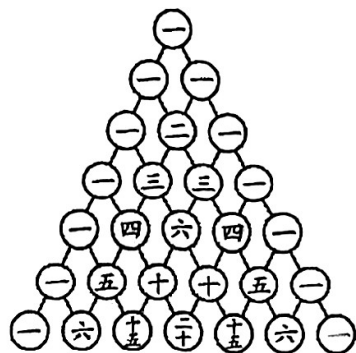
的展开式（按 a 的次数由大到小顺序排列）的系数规律. 例如，第三行的三个数 1, 2, 1，恰好对应

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 展开式中各项的系数；第五行

的五个数 1, 4, 6, 4, 1，恰好对应着

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ 展开式中各项

的系数.



(1) $(a+b)^5$ 展开式中 a^3b^2 的系数为_____;

(2) $(a+b)^7$ 展开式中各项系数的和为_____.

28. 我们把形如 $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) 的整式称为关于 x 的一元 n 次多项式，记作 $f(x)$, $g(x)$... 等等. 将整数的带余除法类比到一元多项式，我们可类似地得到带余式的大除法，其关系式为： $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ ，其中 $f(x)$ 表示被除式， $g(x)$ 表示除式， $q(x)$ 表示商式， $r(x)$ 表示余式，且 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数.

我们来举个例子对比多项式除法和整数除法，如下左式中，13579 除以 112，商为 121，余数为 27；而如下右式中，多项式 $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9$ 除以 $x^2 + x + 2$ ，商式为 $x^2 + 2x + 1$ ，余式为 $2x + 7$.



$$\begin{array}{r}
 112 \overline{) 13579} \\
 \underline{112} \\
 237 \\
 \underline{224} \\
 139 \\
 \underline{112} \\
 27
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + x + 2 \overline{) x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 7x + 9} \\
 \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} \\
 2x^3 + 3x^2 + 7x \\
 \underline{2x^3 + 2x^2 + 4x} \\
 x^2 + 3x + 9 \\
 \underline{x^2 + x + 2} \\
 2x + 7
 \end{array}$$

请根据以上材料，解决下面的问题：

(1) 多项式 $2x^4 + 3x^2 - x + 2$ 除以 $x^2 - 2x + 3$ ，请补全下面的计算式

$$\begin{array}{r}
 \square + 4x + \square \\
 x^2 - 2x + 3 \overline{) 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 - x + 2} \\
 \underline{2x^4 - 4x^3 + 6x^2} \\
 4x^3 - 3x^2 - x \\
 \underline{4x^3 - 8x^2 + 12x} \\
 5x^2 - 13x + 2 \\
 \underline{\hspace{2cm}} \\
 \underline{\hspace{2cm}}
 \end{array}$$

所以， $2x^4 + 3x^2 - x + 2$ 除以 $x^2 - 2x + 3$ 所得的商式为_____，余式为_____。

(2) 若多项式 $x^4 + px^2 + x + q$ 除以 $x^2 + 3x + 4$ 所得的余式为 $x - 1$ ，求 $p^2 + q^2$ 的值。

29. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 表示过 $(0, m)$ 且垂直于 y 轴的直线. 对某图形上的点 $P(a, b)$ 作如下变换：当 $a \leq |m|$ 时，作点 $P(a, b)$ 关于直线 l 的对称点 P_1 ，称为 $I(m)$ 变换；当 $a > |m|$ 时，作点 $P(a, b)$ 关于 y 轴的对称点 P_2 ，称为 $II(m)$ 变换. 若某个图形上既有作 $I(m)$ 变换的点，又有作 $II(m)$ 变换的点，则称此图形为 m -双变换图形.



例如，已知 $A(4,1)$ ， $B(-1,-1)$ ，如图1所示，当 $m=2$ 时，点 A 应作 $II(2)$ ，变换后为 $A_1(-4,1)$ ；点 B 应作 $I(2)$ 变换，变换后为 $B_1(-1,5)$ 。

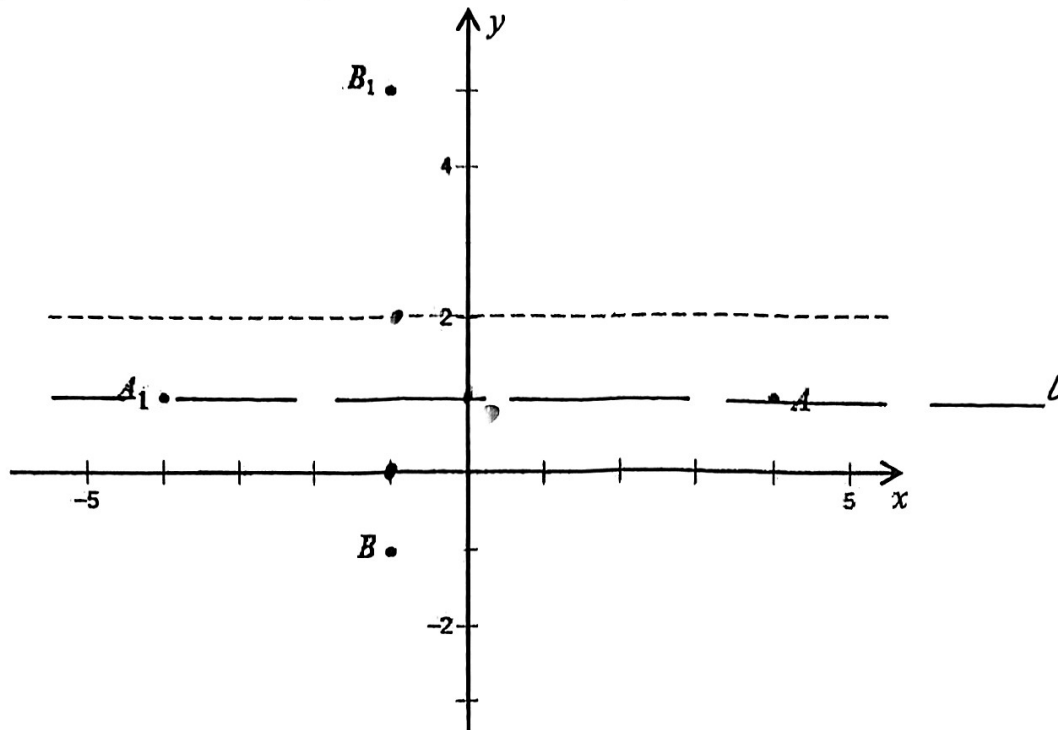


图 1

(1) 当 $m=1$ 时，

① 已知点 $P(-1,0)$ ，则 P 作相应变换后的坐标为_____；

② 若点 $P(a,b)$ 作相应变换后的点的坐标为 $(-2,-1)$ ，则点 P 的坐标为_____。

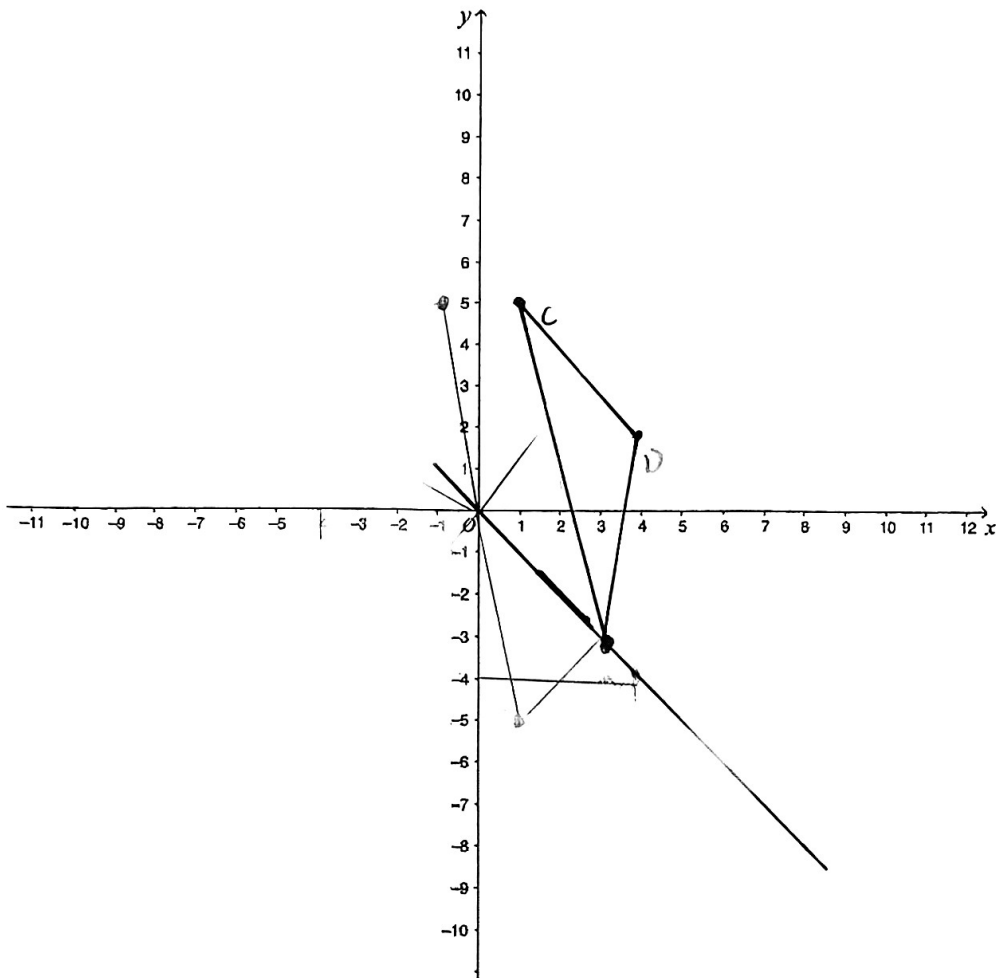
(2) 已知 $C(1,5)$ ， $D(4,2)$ ，

① 若线段 CD 是 m -双变换图形，则 m 的取值范围为_____；

② 已知点 $E(-m,m)(m < 0)$ 在第四象限角平分线上，若 $\triangle CDE$ 及其内部（点 E 除外）组成的图形是 m -双变换图形，且变换后所得图形记为 F ，直接写出所有图形 F 所覆盖的区域的面积为_____。



), 变



备用图

为

点 E

上所



北师大附属实验中学 2023—2024 学年度第一学期

初二数学期中考试答案

A 卷

一、选择题（本大题共 10 道小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项最符合题意。每小题 3 分，共 30 分）

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	A	B	B	B	D	D	A	D	B

二、填空题（本大题共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

11. 15 12. 7 13. 12 14. 4
15. ± 3 16. ± 10 17. 8 18. 7

三、解答题（本题共 8 道小题，第 19、20 题 4 分，25 题 6 分，22 题 7 分，21 题、23 题、24 题 8 分，26 题 9 分，共 54 分）

19. $(-2m^2)^3 \cdot m^2 \div (m^4)^2$

解：原式 = $-8m^6 \cdot m^2 \div m^8$ _____ 2 分

= $-8m^8 \div m^8$

= -8 _____ 4 分

20. $(2x-3)(x-4) - (x+2)(3x-1)$

解：原式 = $2x^2 - 3x - 8x + 12 - (3x^2 + 6x - x - 2)$

= $2x^2 - 11x + 12 - (3x^2 + 5x - 2)$ _____ 2 分

= $2x^2 - 11x + 12 - 3x^2 - 5x + 2$ _____ 3 分

= $-x^2 - 16x + 14$ _____ 4 分



21. (1) $x^3y - xy^3$

解：原式 = $xy(x^2 - y^2)$ ----- 2分

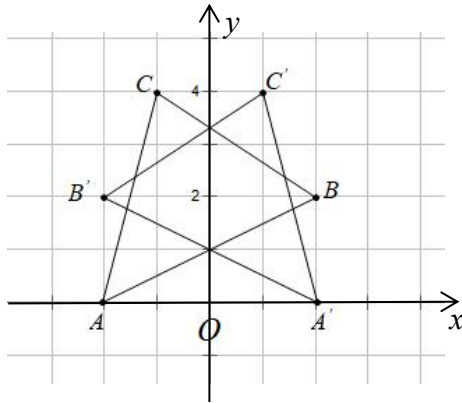
= $xy(x + y)(x - y)$ ----- 4分

(2) $-2a^2b + 16ab - 32b$

解：原式 = $-2b(a^2 - 8a + 16)$ ----- 2分

= $-2b(a - 4)^2$ ----- 4分

22. (1) 如图所示：

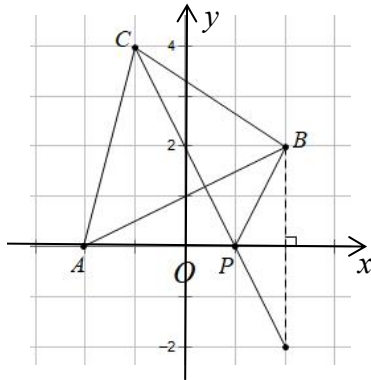


----- 2分

$B'(-2,2), C'(1,4)$

----- 4分

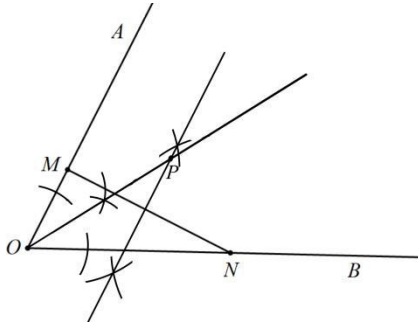
(2) 如图所示：



----- 7分

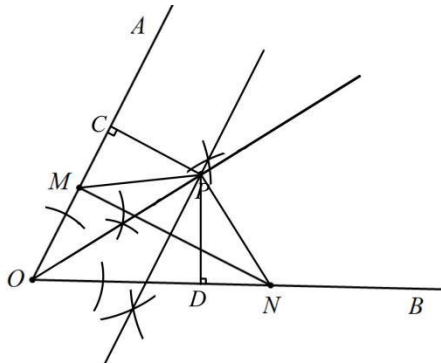


23. (1)



----- 4分

(2) 如图所示,



证明: $\because P$ 在线段 MN 的垂直平分线上,

$\therefore MP = NP$. (垂直平分线上的点与这条线段两个端点的距离相等) ----- 5分

$\because P$ 在 $\angle AOB$ 的角平分线上, $PC \perp OA$, $PD \perp OB$,

$\therefore PC = PD$. (角平分线上的点到角的两边的距离相等) ----- 6分

补全证明如下:

$\because PC \perp OA$, $PD \perp OB$,

$\therefore \angle PCM = \angle PDN = 90^\circ$.

在 $Rt\triangle PCM$ 和 $Rt\triangle PDN$ 中,

$$\begin{cases} PM = PN, \\ PC = PD, \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle PCM \cong Rt\triangle PDN$ (HL)

$\therefore MC = ND$. ----- 8分

24. (1) $\angle CDE = 60^\circ$ ----- 2分

(2) 猜想线段 BC 与 $AB + CE$ 的数量关系为 $BC = AB + CE$. ----- 3分



证明：∵ BD 平分 $\angle ABC$ ， $\angle ABC=50^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC=95^\circ$$

$$\therefore \angle ADB=180^\circ - \angle ABD - \angle BAD = 60^\circ.$$

如图，在线段 BC 上截取线段 $BF=BA$ ，连接 DF 。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle FBD$ 中，

$$\begin{cases} BA = BF, \\ \angle ABD = \angle FBD, \\ BD = BD, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle FBD \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle FDB = \angle ADB = 60^\circ, \quad DA = DF,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle ADB,$$

$$\therefore \angle EDC = \angle FDC = 60^\circ.$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore DE = DF.$$

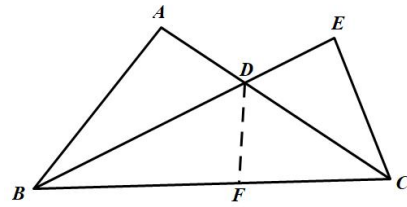
在 $\triangle EDC$ 和 $\triangle FDC$ 中，

$$\begin{cases} DE = DF, \\ \angle EDC = \angle FDC, \\ DC = DC, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EDC \cong \triangle FDC \text{ (SAS)}$$

$$\therefore CE = CF.$$

$$\therefore BC = BF + CF = AB + CE.$$



8分

25. (1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ ----- 2分

(2) 解：由(1)知： $ab + ac + bc = \frac{(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}$,

当 $a+b+c=10$ ， $a^2 + b^2 + c^2 = 64$ 时， $ab + ac + bc = \frac{100 - 64}{2} = 18$. ----- 4分

(3) 图不唯一，例如：



	a	a	a	b	b
a	a^2	a^2	a^2	ab	ab
a	a^2	a^2	a^2	ab	ab
b	ab	ab	ab	b^2	b^2

6分

26. (1) (i) 证明:

$\because \angle PDC$ 是 $\triangle BDP$ 的外角,
 $\therefore \angle PDC = \angle B + \angle BPD$.
 $\because \angle PDC = \angle PDF + \angle FDG$
 $\therefore \angle B + \angle BPD = \angle PDF + \angle FDG$.
 $\because \triangle ABC, \triangle PDF$ 是等边三角形,
 $\therefore \angle B = \angle PDF = 60^\circ$,
 $\therefore \angle EPD = \angle FDG$.
 $\because DE \perp AB, FG \perp BC$,
 $\therefore \angle DEP = \angle FGD = 90^\circ$.
 $\because \triangle PDF$ 是等边三角形,
 $\therefore PD = FD$.

在 $\triangle PDE$ 和 $\triangle DFG$ 中,

$$\begin{cases} \angle EPD = \angle GDF, \\ \angle PED = \angle DGF, \\ PD = DF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDE \cong \triangle DFG$ (AAS)

$\therefore DE = FG$.

(1) (ii) 解: 由 (1) (i) 知 $FG = DE$,

$\therefore FG$ 为定值.

$\because FG \perp BC$,

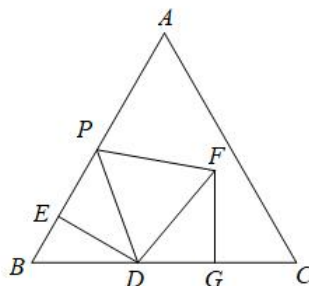
如图③所示, 当点 P 从点 E 运动到点 A 时, F 在线段 F_1F_2

上运动,

$\because \triangle EDF_1$ 与 $\triangle ADF_2$ 是等边三角形,

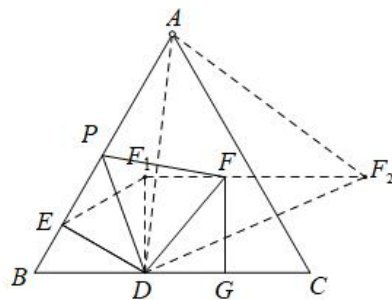
$\therefore \angle EDF_1 = \angle ADF_2 = 60^\circ, DE = DF_1, DA = DF_2$,

$\therefore \angle EDA = \angle F_1DF_2$.



图①

3分



图③



在 $\triangle EDA$ 和 $\triangle F_1DF_2$ 中,

$$\begin{cases} ED = F_1D, \\ \angle EDA = \angle F_1DF_2, \\ DA = DF_2, \end{cases}$$

$\therefore \triangle EDA \cong \triangle F_1DF_2$ (SAS)

$\therefore EA = F_1F_2$.

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle B=60^\circ$, $BD=2$,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BD = 1.$$

$\therefore AB = 5$, $BE = 1$

$\therefore F_1F_2 = AE = 4$, 即点 F 运动的路径长 4. ----- 6 分

(2) 解: 如图④, 作顶角为 $\angle BEM = 45^\circ$ 的等腰 $\triangle BEM$, 连接 MG .

同 (1) (ii) 可证 $\triangle FBE \cong \triangle GME$ (SAS),

$\therefore \angle FBE = 90^\circ$, $\triangle FBE \cong \triangle GME$,

$\therefore \angle GME = \angle FBE = 90^\circ$.

\therefore 点 G 在垂直于线段 EM 的射线 l 上.

作 $CN \perp l$, 垂足为 N ,

$\therefore CG$ 的最小值为 CN .

如图⑤, 反向延长射线 l , 与 CB 的延长线交于点 P .

$\therefore CN \perp l$,

$\therefore \angle EMP = \angle CNP = 90^\circ$,

$\therefore CN \parallel ME$.

$\therefore \angle NCP = \angle MEP = 45^\circ$,

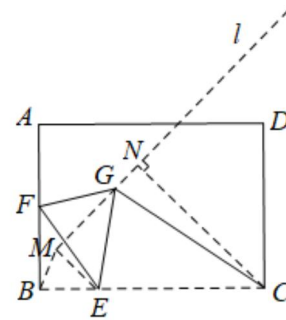
$\therefore \triangle MEP$ 与 $\triangle NCP$ 为等腰直角三角形.

$\therefore EM = EB = 1$,

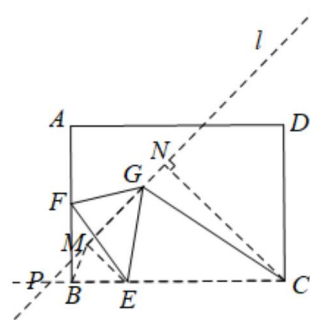
$\therefore EP = \sqrt{2}$.

$\therefore CP = CE + PE = 3\sqrt{2}$,

$\therefore CN = 3$.



图④



图⑤

----- 9 分



B 卷

四、探究题（本题共 3 道小题，27 题 4 分，28 题 8 分，29 题 8 分，共 20 分）

27. (1) 10 (2) 128 _____ 每空 2 分

28. (1)

$$\begin{array}{r}
 \boxed{2x^2} + 4x + \boxed{5} \\
 x^2 - 2x + 3 \overline{) 2x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 - x + 2} \\
 \underline{2x^4 - 4x^3 + 6x^2} \\
 4x^3 - 3x^2 - x \\
 \underline{4x^3 - 8x^2 + 12x} \\
 5x^2 - 13x + 2 \\
 \underline{\boxed{5x^2 - 10x + 15}} \\
 \boxed{-3x - 13}
 \end{array}$$

商式为 $2x^2 + 4x + 5$ ，余式为 $-3x - 13$ 。 _____ 6 分

(2) 通过大除法可得

$$(x^4 + px^2 + x + q) \div (x^2 + 3x + 4) = [x^2 - 3x + (p+5)] \dots [(-3p-2)x + (q-4p-20)]$$

$$\text{对比余式得到} \begin{cases} -3p-2=1 \\ q-4p-20=-1 \end{cases} \text{解得} \begin{cases} p=-1 \\ q=15 \end{cases}$$

所以 $p^2 + q^2 = 226$ _____ 8 分

29. (1) ① $(-1, 2)$; _____ 1 分

② 点 P 的坐标为 $(-2, 3)$ 或 $(2, -1)$ _____ 3 分

(2) ① $-4 < m \leq -1$ 或 $1 \leq m < 4$; _____ 6 分

② 45. _____ 8 分