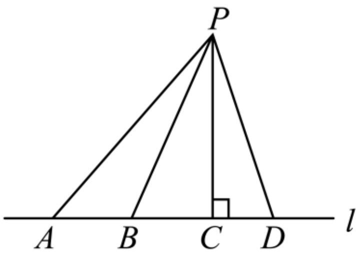
2022 北京北大附中初三 11 月月考

数　学

班级__________　姓名__________

一、选择题（本题共 32 分，每小题 4 分，请把选择题答案写在答题卡中，试卷上作答无效）

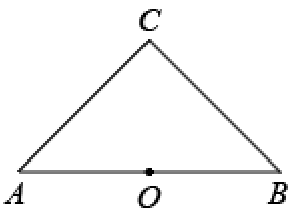
1. 如图，以点 P 为圆心作圆，所得的圆与直线 l 相切的是（　　）



A. 以 PA 为半径的圆　　B. 以 PB 为半径的

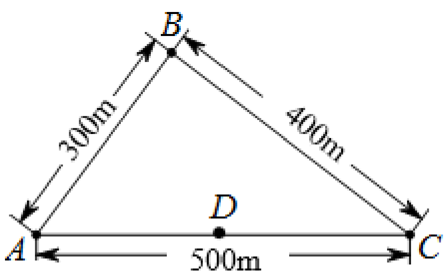
C. 以 PC 为半径的圆　　D. 以 PD 为半径的圆

2. 如图，$\triangle ABC$ 中，$CA = CB$，O 是底边 AB 的中点，若腰 CB 与 $\odot O$ 相切，则 CA 与 $\odot O$ 的位置关系为（　　）



A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不确定

3. 如图，A，B，C 是某社区　三栋楼，若在 AC 中点 D 处建一个 5G 基站，其覆盖半径为 300 m，则这三栋楼中在该 5G 基站覆盖范围内的是（　　）



A. A，B，C 都不在　　B. 只有 B

C. 只有 A，C　　D. A，B，C

4. 若扇形的半径为 2，圆心角为 90°，则这个扇形的面积为（　　）

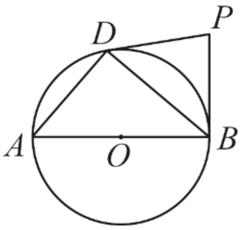
A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. π　　C. 2π　　D. 4π

5. 用一张半圆形铁皮，围成一个底面半径为 4cm 的圆锥形工件的侧面（接缝忽略不计），则圆锥的母线长

为（　　）

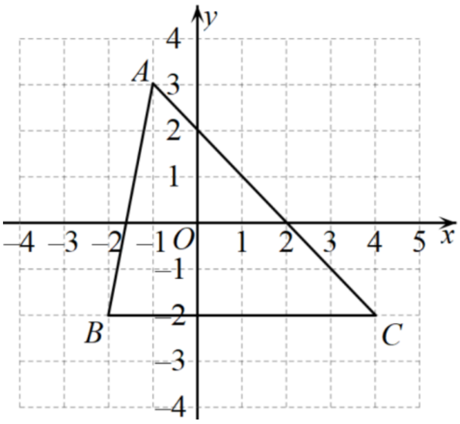
A. 4cm　　B. 8cm　　C. 12cm　　D. 16cm

6. 如图，过⊙O外一点P作⊙O的两条切线PD、PB，切点分别为D、B，作直径AB，连接AD、BD，若$\angle P=80^\circ$，则$\angle A$的度数为（　　）



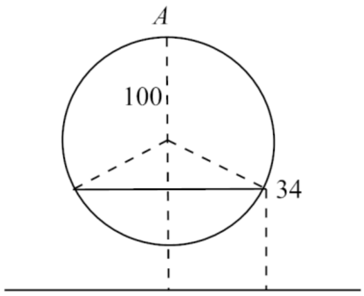
A. 50°　　B. 60°　　C. 70°　　D. 80°

7. 如图，$\triangle ABC$，$A(-1,3)$，$B(-2,-2)$，$C(4,-2)$，则$\triangle ABC$外心的坐标为（　　）



A. $(0,0)$　　B. $(1,1)$　　C. $(1,0)$　　D. $(1,-2)$

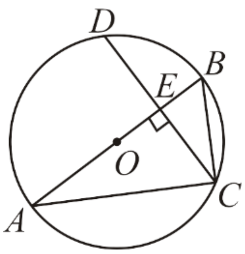
8. 京西某游乐园的摩天轮采用了国内首创的横梁结构，风格更加简约．如图，摩天轮直径88米，最高点A距离地面100米，匀速运行一圈的时间是18分钟．由于受到周边建筑物的影响，乘客与地面的距离超过34米时，可视为最佳观赏位置，在运行的一圈里最佳观赏时长为（　　）分钟．



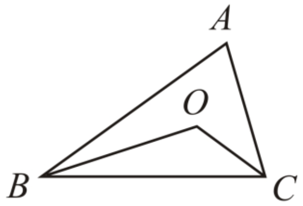
A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

二、填空题（本题共32分，每小题4分，请把填空题答案写在答题卡中，试卷上作答无效）

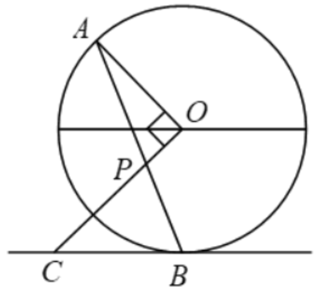
9. 如图，⊙O的直径AB垂直于弦CD，垂足为E．若$\angle B=60^\circ$，$AC=3$，则CD的长为________．



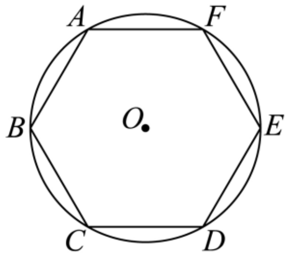
10. 如图，点 O 为 $\triangle ABC$ 的内心，$\angle A=70°$，则 $\angle BOC$ 的度数为________.



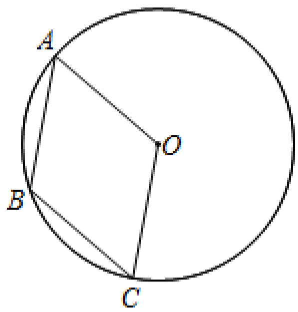
11. 如图，AB 是 $\odot O$ 的弦，点 C 在过点 B 的切线上，且 $OC\perp OA$，OC 交 AB 于点 P，已知 $\angle OAB=23°$，则 $\angle OCB=$________.



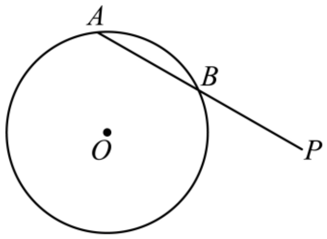
12. 如图，已知正六边形的边心距为 3，则它的周长是________.



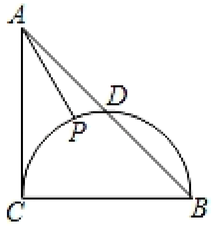
13. 如图，点 A，B，C 在 $\odot O$ 上，顺次连接 A，B，C，O．若四边形 $ABCO$　平行四边形，则 $\angle AOC=$________°.



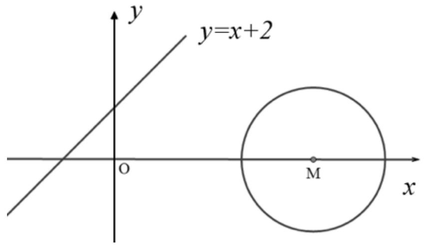
14. 如图，PA 交 $\odot O$ 于点 B，$PB=4$，$AB=4$，$\odot O$ 的半径为 5，则 OP 的长为________.



15. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=4$，以 BC 为直径的半圆交 AB 于 D，P 是弧 CD 上的一个动点，连接 AP，则 AP 的最小值是_____.



16. 已知如图，$M(m,0)$ 是 x 轴上动点，$\odot M$ 半径 $r=2\sqrt{2}$，若 $\odot M$ 与直线 $y=x+2$ 相交，则 m 取值范围是________.



三、解答题（本题共 36 分，第 18、19 每题 6 分，第 17、20、21 每题 8 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 下面是小石设计的“过圆上一点作圆的切线”的尺规作图的过程.

已知：如图 1，⊙ 及⊙ 上一点 .

求作：直线 PN，使得 PN 与⊙ 相切.

作法：如图 2，

①作射线 OP；

②在⊙ 外取一点 Q（点 Q 不在射线 OP 上），以 Q 圆心，QP 为半径作圆，⊙Q 与射线 OP 交于另一点 M；

③连接 MQ 并延长交⊙Q 于点 N；

④作直线 PN.

所以直线 PN 即为所求作直线.

根据小石设计的尺规作图的过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面 证明.

证明：$\because MN$ 是⊙ 的直径，

$\therefore \angle MPN=$ ________ （ ）（填推理的依据）.

$\therefore OP\perp PN$.

又$\because$ 是⊙ 的半径，

$\therefore PN$ 是⊙ 的切线（ ）（填推理的依据）.

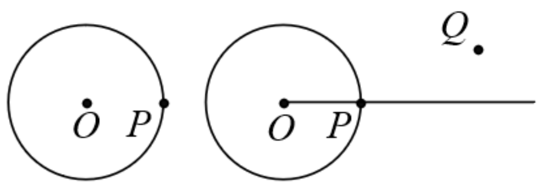
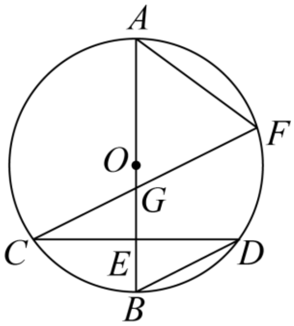


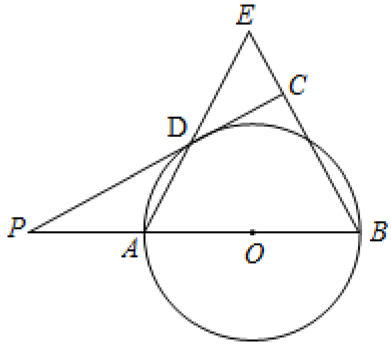
图1　　　图2

18. 已知$m^2+m-3=0$，求代数式$(m+1)(m-1)+m(m+2)$的值.

19. 如图，在$\odot O$中，点E是弦CD的中点，过点O，E作直径AB（$AE>BE$），连接BD，过点C作$CF \parallel BD$交AB于点G，交$\odot O$于点F，连接AF．求证：$AG=AF$．



20. 如图，已知AB是$\odot O$的直径，点P在BA的延长线上，$AB=BE$，PD切$\odot O$于点D，交EB于点C，连接AE．



（1）求证：$BE \perp PC$；

（2）连结OC，如果$PD=2\sqrt{3}$，$\angle ABC=60°$，求OC的长.

21. 在平面直角坐标系xOy中，点$(-1,m)$，$(-4,n)$在抛物线$y=ax^2+bx+c(a>0)$上，设抛物线的对称轴为$x=t$．

（1）当$c=2$，$m=n$时，求抛物线与y轴交点的坐标及t的值；

（2）点$\left(x_0,m\right)\left(x_0 \neq -1\right)$在抛物线上．若$m<n<c$，求$t$的取值范围及$x_0$的取值范围．

参考答案

一、选择题（本题共32分，每小题4分，请把选择题答案写在答题卡中，试卷上作答无效）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】根据直线与圆的位置关系的判定方法进行判断即可得出．

【详解】解：$\because PC \perp l$ 于 C，

$\therefore$ 以点 P 为圆心，PC 为半径的圆与直线 l 相切．

故选：C．

【点睛】本题考查了直线与圆的位置关系：判断直线和圆的位置关系:设⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d，若直线 l 和⊙O 相交 $\Leftrightarrow d < r$，直线 l 和⊙O 相切 $\Leftrightarrow d = r$，直线 l 和⊙O 相离 $\Leftrightarrow d > r$．

2. 【答案】B

【解析】

【分析】腰 BC 与⊙O 相切，设切点为 F，连接 OC，OF，过 O 点作 $OE \perp AC$，如图，如图，根据等腰三角形的性质得到CO平分 $\angle ACB$，则利用角平分线的性质得 $OE = OF$，然后根据切线的判定定理可判断 AC 与⊙O 相切．

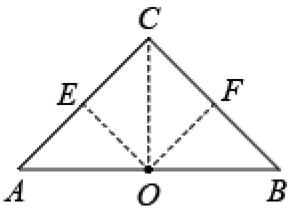
【详解】解：$\because CA = CB$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形，

$\because$ 腰 BC 与⊙O 相切，设切点为 F，

$\therefore OF$ 为⊙O 的半径，$OF \perp BC$，

连接 OC，OF，过 O 点作 $OE \perp AC$，如图，



$\because O$ 是等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 的中点，

$\therefore OC$ 平分 $\angle ACB$，

$\because OE \perp AC$，$OF \perp BC$，

$\therefore OE = OF$，

$\therefore AC$ 与⊙O 相切．

故选B．

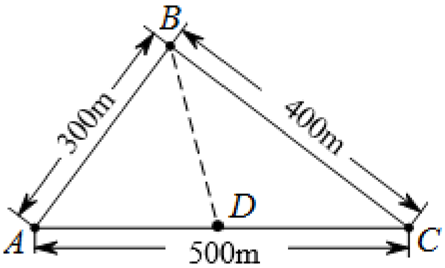
【点睛】本题考查了切线的性质和判定：圆的切线垂直于经过切点的半径．也考查了等腰三角形的性质、角平分线的性质和切线的判定．

3. 【答案】D

【解析】

【分析】根据三角形边长然后利用勾股定理逆定理可得ΔABC为直角三角形，由直角三角形斜边上的中线性质即可得.

【详解】解：如图所示：连接BD，



$\because AB=300$，$BC=400$，$AC=500$，

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2$，

$\therefore \Delta ABC$为直角三角形，

$\because D$为AC中点，

$\therefore AD=CD=BD=250$，

$\because$覆盖半径为300，

$\therefore A$、B、C三个点都被覆盖，

故选：D.

【点睛】题目主要考查勾股定理逆定理，直角三角形斜边中线的性质等，理解题意，综合运用两个定理是解题关键.

4. 【答案】B

【解析】

【分析】直接利用扇形的面积公式计算.

【详解】这个扇形的面积：$S=\dfrac{n\pi r^2}{360}=\dfrac{90\times\pi\times 2^2}{360}=\pi$.

故选：B.

【点睛】本题考查了扇形面积的计算：扇形面积计算公式：设圆心角是$n°$，圆的半径为R的扇形面积为S，则$S_{扇形}=\dfrac{n}{360}\pi R^2$或$S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lR$（其中$l$为扇形的弧长）.

5. 【答案】B

【解析】

【分析】设圆锥的母线长为l，根据圆锥的底面圆周长为半圆形铁皮的周长（不包括直径）列式求解即可.

【详解】解：设圆锥的母线长为l，

由题意得：$2\times 4\pi=\dfrac{180\times\pi\cdot l}{180}$，

$\therefore l = 8\text{cm}$，

故选 B.

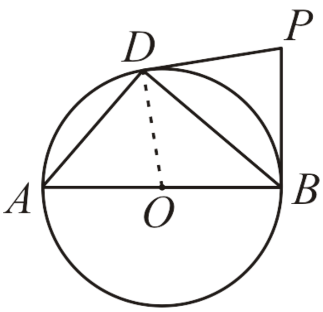
【点睛】本题主要考查了求圆锥的母线长，熟知圆锥的底面圆周长为半圆形铁皮的周长（不包括直径）是解题的关键.

6. 【答案】A

【解析】

【分析】如图，连接OD，可得$\angle ODP = \angle OBP = 90°$，再利用四边形的内角和定理求解$\angle BOD$，从而可得答案.

【详解】解：如图，连接OD，



$\because$过$\odot O$外一点P作$\odot O$的两条切线PD、PB，

$\therefore \angle ODP = \angle OBP = 90°$，

$\because \angle P = 80°$，

$\therefore \angle DOB = 360° - 90° - 90° - 80° = 100°$，

$\therefore \angle A = \frac{1}{2}\angle DOB = 50°$，

故选 A.

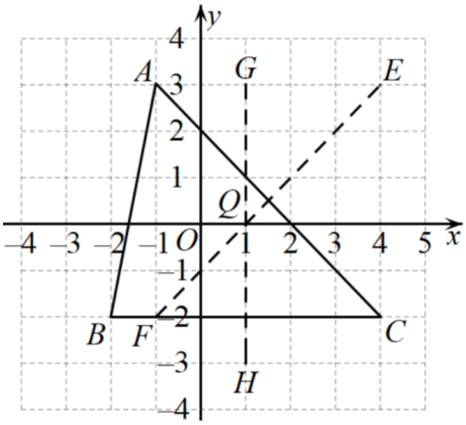
【点睛】本题考查的是切线的性质，四边形的内角和定理的应用，圆周角定理的应用，作出过切点的半径是解本题的关键.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】如图，取格点E，F，G，H，且直线GH是线段BC的垂直平分线，四边形$AFCE$是正方形，则可得GH，EF的交点为Q为$\triangle ABC$的外心，再分别求解GH，EF的解析式即可得到答案.

【详解】解：如图，取格点E，F，G，H，则直线GH是线段BC的垂直平分线，四边形$AFCE$是正方形，



∴直线 是线段 的垂直平分线，

记 ， 的交点为 ，则 为△ 的外心，

∵ ， ， ，

∴直线 为 $x=1$，$E(4,3)$，$F(-1,-2)$，

设直线 为 $y=kx+b$，

∴ $\begin{cases}4k+b=3\\-k+b=-2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=1\\b=-1\end{cases}$，

∴直线 为 $y=x-1$，

当 $x=1$ 时，$y=0$，

∴ $Q(1,0)$，即△ 的外心坐标为：$(1,0)$.

故选C.

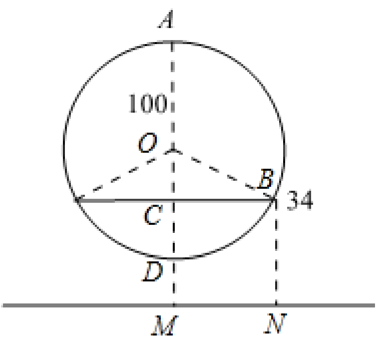
【点睛】本题考查的是坐标与图形，正方形的性质，三角形的外心的性质，利用待定系数法求解一次函数的解析式，掌握“三角形的外心是三角形的三边垂直平分线的交点”是解本题的关键.

8. 【答案】D

【解析】

【分析】先求摩天轮转动的角速度为每分钟 20°，再求出 $OC=22$ 米，则 $OC=\frac{1}{2}OB$，得 $\angle OBC=30^\circ$，然后求出最佳观赏位置的圆心角为 240°，即可求解.

【详解】解：如图所示：



摩天轮转动的角速度为每分钟：$\frac{360°}{18}=20°$，

由题意得：$AD\perp BC$，$AD=88$米，$AM=100$米，$CM=BN=34$米，

则$OB=OD=44$（米），$DM=AM-AD=12$（米），

$\therefore CD=CM-DM=34-12=22$（米），

$\therefore OC=OD-CD=22$（米），

$\therefore OC=\frac{1}{2}OB$，

$\because \angle OCB=90°$，

$\therefore \sin\angle OBC=\frac{1}{2}$，$\angle OBC=30°$，

$\therefore \angle BOC=90°-30°=60°$，

$\therefore \angle AOB=180°-\angle BOC=120°$，

$\therefore$最佳观赏位置的圆心角为$2\times120°=240°$，

$\therefore$在运行的一圈里最佳观赏时长为：$\frac{240°}{20°}=12$（分钟），

故选D．

【点睛】本题考查了垂径定理的应用、锐角三角函数的应用等知识，熟练掌握垂径定理，求出$\angle OBC=30°$是解题的关键．

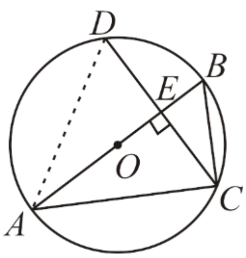
二、填空题（本题共32分，每小题4分，请把填空题答案写在答题卡中，试卷上作答无效）

9. 【答案】3

【解析】

【分析】连接　　，推出直径　　是弦　　的垂直平分线，得到$\triangle ADC$是等边三角形，据此求解即可．

【详解】解：连接　　，



$\because$　　　　，

$\therefore \angle D=\angle B=60°$，

$\because \odot$　的直径　　垂直于弦　　，

$\therefore CE=DE$，即直径　　是弦　　的垂直平分线，

$\therefore AD=AC$，

$\therefore \triangle ADC$是等边三角形，

$\therefore CD = AC = 3$，

故答案　：3．

【点睛】本题考查了圆周角定理，垂径定理，等边三角形的判定和性质，证明$\triangle ADC$是等边三角形是解题的关键．

10．【答案】$125°$ ##125 度

【解析】

【分析】利用内心的性质得出$\angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2}\angle ACB$，进而利用三角形内角和定理得出$\angle OBC + \angle OCB$，进而求出答案．

【详解】解：$\because O$是$\triangle$　　的内心，

$\therefore \angle ABO = \angle CBO = \frac{1}{2}\angle ABC$，$\angle ACO = \angle BCO = \frac{1}{2}\angle ACB$，

$\because$　　　　，

$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180° - 70° = 110°$，

$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}\left(\angle ABC + \angle ACB\right) = 55°$，

$\therefore \angle BOC = 180° - \left(\angle OBC + \angle OCB\right) = 125°$．

故答案为$125°$．

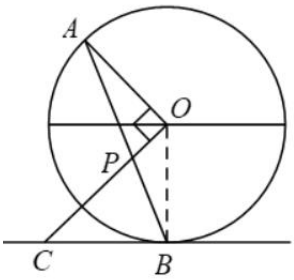
【点睛】此题主要考查了三角形内心的性质以及三角形内角和定理，正确得出$\angle OBC + \angle OCB = 55°$是解题关键．

11．【答案】$46°$ ##46 度

【解析】

【分析】首先连接OB，由点 C 在过点 B 的切线上，且　　　　，根据等角的余角相等，易证得$\angle CBP = \angle CPB = 67°$，利用三角形的内角和定理解答即可．

【详解】解：连接OB，



$\because$　　是$\odot$　的切线，

$\therefore OB \perp BC$，

$\therefore \angle OBA + \angle CBP = 90°$，

$\because$　　　　，

$\therefore \angle A+\angle APO=90^{\circ}$，

$\because OA=OB$，　　　　　　，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=23^{\circ}$，

$\therefore \angle APO=\angle CBP=90^{\circ}-23^{\circ}=67^{\circ}$，

$\because \angle APO=\angle CPB$，

$\therefore \angle CPB=\angle APO=67^{\circ}$，

$\therefore \angle OCB=180^{\circ}-67^{\circ}-67^{\circ}=46^{\circ}$，

故答案为：46．

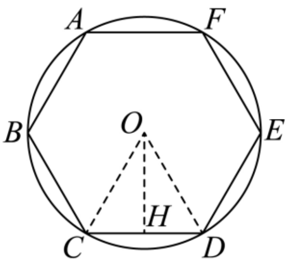
【点睛】此题考查了切线的性质．此题难度适中，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想的应用．

12．【答案】$12\sqrt{3}$

【解析】

【分析】连接　　、　　，作$OH\perp CD$于　，由正六边形的性质得出$HC=HD=\dfrac{1}{2}CD$，$\angle COD=60^{\circ}$，得出$\triangle COD$为等边三角形，$\angle COH=\angle DOH=30^{\circ}$，由三角函数求出　　，得出　　，即可求出正六边形的周长．

【详解】解：如图所示：



连接　　、　　，作$OH\perp CD$于　，

则$\angle OHC=\angle OHD=90^{\circ}$，$HC=HD=\dfrac{1}{2}CD$，$\angle COD=60^{\circ}$，

$\therefore \triangle COD$为等边三角形，$\angle COH=\angle DOH=30^{\circ}$，

$\therefore CO=CD$，

$\because OH=3$，

$\therefore OC=\dfrac{OH}{\cos 30^{\circ}}=2\sqrt{3}$，

$\therefore CD=2\sqrt{3}$，

$\therefore$正六边形的周长$=6AB=12\sqrt{3}$．

故答案为：$12\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了正多边形和圆、正六边形的性质、三角函数等知识；熟练掌握正六边形的性质，运用三角函数求出　　是解决问题的关键．

13. 【答案】120

【解析】

【分析】连接OB，先证明四边形ABCD是菱形，然后再说明△AOB、△OBC为等边三角形，最后根据等边三角形　性质即可解答.

【详解】解：如图：连接OB

∵点　，　，　在⊙　上

∴OA=OC=OB

∵四边形　　　为平行四边形

∴四边形　　　是菱形

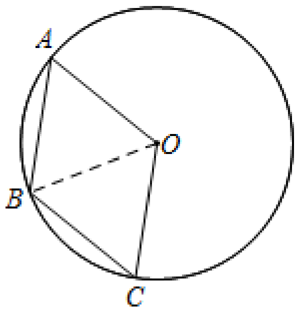
∴OA=OC=OB=AB=BC

∴△AOB、△OBC为等边三角形

∴∠AOB=∠BOC=60°

∴∠AOC=120°.

故答案为120.



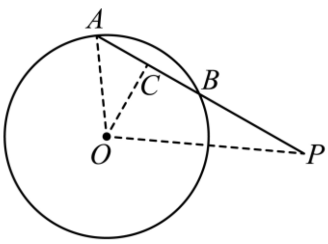
【点睛】本题主要考查了圆的性质和等边三角形的性质，根据题意证得△AOB、△OBC为等边三角形是解答本题的关键.

14. 【答案】$\sqrt{57}$

【解析】

【分析】利用垂径定理，构造直角三角形，再运用勾股定理解题.

【详解】过O点作$OC\perp PA$于P，连接OA，OP，



则$AC=BC=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 4=2$，$PC=6$，

在Rt$\triangle OAC$中，$OC=\sqrt{OA^2-AC^2}=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$，

在Rt△OPC中，$OP=\sqrt{OC^2+PC^2}=\sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2+6^2}=\sqrt{57}$．

【点睛】本题考查垂径定理，勾股定理，作辅助线构造直角三角形是解题的关键.

15. 【答案】$2\sqrt{5}-2$

【解析】

【分析】连接OA交弧CD于P，利用三角形三边的关系可判断此时AP的值最小，然后利用勾股定理计算出OA，从而可计算出此时AP的长.

【详解】解：连接OA交弧CD于P，如图，

∵$AP \geq OA - OP$（当O、P、A共线时取等号），

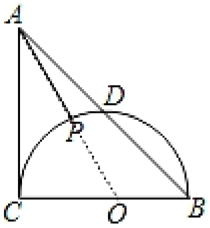
∴此时AP的值最小，

∵$OA=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，

∴$AP=OA-OP=2\sqrt{5}-2$，

即AP的最小值是$2\sqrt{5}-2$.

故答案为：$2\sqrt{5}-2$.



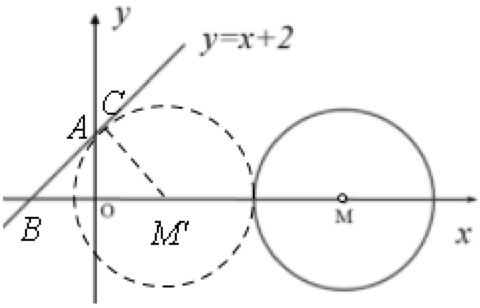
【点睛】此题考查勾股定理，最短路径问题，正确理解题意得到连接OA交弧CD得到点P是解题的关键

16. 【答案】$-6<m<2$

【解析】

【分析】如图，当点M在x正半轴且$\odot M$与直线$y=x+2$相切于点C时，设直线$y=x+2$是x轴，y轴分别交于B、A，连接CM'，先求出A、B坐标，进而求出$AB=2\sqrt{2}$，证明$\triangle AOB\backsim\triangle M'CB$，求出$OM'=2$，得到$M'\left(2,0\right)$，同理求出当$M$在$x$轴负半轴且$\odot M$与直线$y=x+2$相切时的坐标为$\left(-6,0\right)$，由此即可得到答案.

【详解】解：如图，当点M在x正半轴且$\odot M$与直线$y=x+2$相切于点C时，设直线$y=x+2$是x轴，y轴分别交于B、A，连接CM'，



$\therefore \angle BCM' = 90°$，$CM' = 2\sqrt{2}$，$A(0,2)$，$B(-2,0)$，

$\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 2\sqrt{2}$，

$\because \angle ABO = \angle M'BC$，$\angle AOB = \angle M'CB = 90°$，

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle M'CB$，

$\therefore \dfrac{M'B}{AB} = \dfrac{CM'}{OA}$，即 $\dfrac{M'B}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore M'B = 4$，

$\therefore OM' = 2$，

$\therefore M'(2,0)$，

同理可求出当 M 在 x 轴负半轴且 $\odot M$ 与直线 $y = x + 2$ 相切时的坐标为 $(-6,0)$，

$\therefore$ 当 $\odot M$ 与直线 $y = x + 2$ 相交，m 的取值范围是 $-6 < m < 2$，

故答案　：$-6 < m < 2$.

【点睛】本题主要考查了切线的性质，相似三角形的性质与判定，一次函数与几何综合，正确求出当圆与直线相切时圆心的坐标是解题的关键.

三、解答题（本题共 36 分，第 18、19 每题 6 分，第 17、20、21 每题 8 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

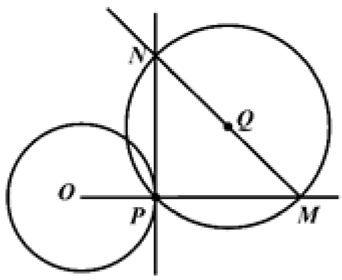
17. 【答案】(1) 作图见解析；(2) 90，直径所对的圆周角是直角；经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线

【解析】

【分析】(1) 根据题意作出图形即可；

(2) 根据圆周角定理可得∠MPN=90°，根据切线的判定定理即可得结论.

【详解】(1)(1) 补全图形如下图；



（2）证明：∵ MN 是⊙ 的直径，

∴ $\angle MPN =$ $\underline{\quad 90 \quad}$ （直径所对的圆周角是直角）（填推理的依据）.

∴ $OP \perp PN$.

又∵ 是⊙ 的半径，

∴ PN 是⊙ 的切线（经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线 ）（填推理的依据）.

故答案为：90，直径所对的圆周角是直角；经过半径的外端，并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

【点睛】本题考查了切线的判定及圆周角定理，正确作出图形是解题关键.

18. 【答案】5

【解析】

【分析】先将 变形为 $m^2=3-m$，再将 去括号变形为 m^2-1+m^2+2m，最后代入 $m^2=3-m$ 即可化简求值.

【详解】解：∵ ，

∴ $m^2=3-m$，

$=m^2-1+m^2+2m$

$=3-m-1+3-m+2m$，

$=5$

所以该代数式的值为 5.

【点睛】本题考查了整式运算、平方差公式，熟练掌握运算法则是解题关键.

19. 【答案】证明见解析

【解析】

【分析】根据垂径定理得到 $AB \perp CD$，则 $AD=AC$ ，根据圆周角定理得到 $\angle B=\angle F$，根据平行线的性质得出 $\angle AGF=\angle B$，等量代换得到 $\angle AGF=\angle F$，再根据等角对等边即可得解.

【详解】证明：∵ 为⊙ 的直径，点 E 是弦 的中点，

∴ $AB \perp CD$，

∴ $AD=AC$，

∴ $\angle B=\angle F$，

∵ $CF \parallel BD$，

$\therefore \angle AGF = \angle B$，

$\therefore \angle AGF = \angle F$，

$\therefore$ 　　　　　.

【点睛】此题考查了圆周角定理、垂径定理、平行线的性质等知识，熟练掌握圆周角定理和垂径定理是解题的关键.

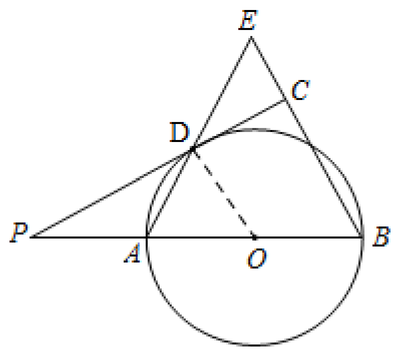
20. 【答案】（1）见解析　（2）$\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）连接 OD，由 OA=OD，BA=BE，得 $\angle DAO = \angle ADO = \angle BEA$，从而 OD//BE；由 PD 切圆 O 于点 D 得 $\angle PDO = 90°$，从而 $\angle PCB = \angle PDO = 90°$，即 BE⊥PC；

（2）在 Rt△PDO 中，先求出∠POD=60°，再求出 OD，OP，PB，在 Rt△PCB 中，求出 PC，再求 CD，最后在 Rt△CDO 中，利用勾股定理求出 OC.

【详解】（1）证明：连结　　.



$\because OA = OD$，$\therefore \angle DAO = \angle ADO$，

$\because PD$ 切圆　于点　，$\therefore PD \perp OD$，

$\therefore \angle PDO = 90°$

$\because AB = BE$，$\therefore \angle E = \angle DAO$，$\therefore \angle E = \angle ADO$，

$\therefore OD // BE$，$\therefore \angle PCB = \angle PDO = 90°$

$\therefore BE \perp PC$.

（2）解：$\because OD // BE$，　　　　　　，

$\therefore \angle DOP = \angle ABC = 60°$，

$\because PD \perp OD$，$\therefore \tan \angle DOP = \dfrac{DP}{OD}$，

$\therefore \dfrac{2\sqrt{3}}{OD} = \sqrt{3}$，$\therefore OD = 2$，

$\therefore OP = 4$，$\therefore PB = 6$.

$\therefore \sin \angle ABC = \dfrac{PC}{PB}$，$\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{PC}{6}$，$\therefore PC = 3\sqrt{3}$，

$\therefore DC = \sqrt{3}$，$\therefore DC^2 + OD^2 = OC^2$，$\therefore OC^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 7$

$\therefore OC=\sqrt{7}$（舍负）.

故答案为：$\sqrt{7}$.

【点睛】本题考查了圆的切线性质及解直角三角形的知识，运用切线的性质来进行计算或论证，常通过作辅助线连接圆心和切点，利用垂直构造直角三角形解决有关问题.

21. 【答案】（1）抛物线与 轴的交点坐标为：$\left(0,2\right)$， $x=t=-\dfrac{5}{2}$.

（2）$-\dfrac{5}{2}<t<-2$， 的取值范围 $-4<x_0<-3$.

【解析】

【分析】（1）由 可得抛物线与 y 轴的交点坐标，由 可得点 ， 关于抛物线对称轴对称，从而可得答案；

（2）再根据 ，可确定出 $-5a<-b<-4a$， 结合 $2a>0$，可得对称轴的取值范围，再利用对称轴可表示为直线 $x=\dfrac{x_0-1}{2}$，进而可确定 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：∵ ，

∴抛物线为：$y=ax^2+bx+2(a>0)$，

∴当 $x=0$，则 $y=2$，

∴抛物线与 轴的交点坐标为：$\left(0,2\right)$，

∵ ，

∴点 ， 关于抛物线的对称轴对称，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=t=\dfrac{-1-4}{2}=-\dfrac{5}{2}$.

【小问 2 详解】

∵ ，

$\therefore a-b+c<16a-4b+c<c$，

解得 $4a<b<5a$，

$\therefore -5a<-b<-4a$， 而 $2a>0$，

$\therefore -\dfrac{5}{2}<-\dfrac{b}{2a}<-2$，即 $-\dfrac{5}{2}<t<-2$，

∵点 ， 在抛物线上，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{x_0-1}{2}$，

$\therefore -\dfrac{5}{2}<\dfrac{x_0-1}{2}<-2$，

解得：$-4<x_0<-3$，

∴　的取值范围$-4<x_0<-3$．

【点睛】本题考查二次函数　性质，二次函数图象上点的坐标特征，掌握关于抛物线对称轴对称的两个点的坐标关系是解题关键．