



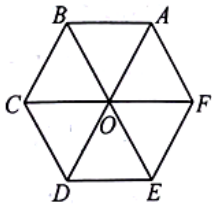
# 2023 北京高中合格考数学

## (第一次)

第一部分 (选择题 共 60 分)

一、选择题共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

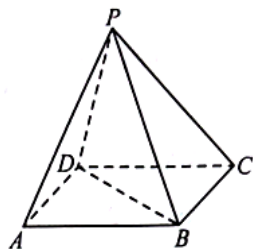
1. 已知全集  $U = \{1, 2, 3, 4\}$ ，集合  $A = \{1, 2\}$ ，则  $\complement_U A = ( )$ 
  - A.  $\{1, 3\}$
  - B.  $\{2, 3\}$
  - C.  $\{1, 4\}$
  - D.  $\{3, 4\}$
2. 不等式  $x^2 > 0$  的解集是  $( )$ 
  - A.  $\{x|x=0\}$
  - B.  $\{x|x \neq 0\}$
  - C.  $\{x|x > 0\}$
  - D.  $\{x|x < 0\}$
3. 函数  $f(x) = x - 1$  的零点是  $( )$ 
  - A.  $-2$
  - B.  $-1$
  - C.  $1$
  - D.  $2$
4. 在平面直角坐标系  $xOy$  中，角  $\alpha$  以  $O$  为顶点，以  $Ox$  为始边，终边经过点  $(-1, 1)$ ，则角  $\alpha$  可以是  $( )$ 
  - A.  $\frac{\pi}{4}$
  - B.  $\frac{\pi}{2}$
  - C.  $\frac{3\pi}{4}$
  - D.  $\pi$
5. 已知三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  的体积为 12，则三棱锥  $A - A_1B_1C_1$  的体积为  $( )$ 
  - A. 3
  - B. 4
  - C. 6
  - D. 8
6. 已知  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ，则  $\sin(-\alpha) = ( )$ 
  - A.  $-\frac{1}{2}$
  - B.  $\frac{1}{2}$
  - C.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
  - D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
7.  $\lg 100 = ( )$ 
  - A.  $-100$
  - B.  $100$
  - C.  $-2$
  - D.  $2$
8. 如图，点  $O$  为正六边形  $ABCDEF$  的中心，下列向量中，与  $\overrightarrow{OA}$  相等的是  $( )$ 



  - A.  $\overrightarrow{DO}$
  - B.  $\overrightarrow{EO}$
  - C.  $\overrightarrow{FO}$
  - D.  $\overrightarrow{CO}$
9. 下列函数中，在  $\mathbf{R}$  上为增函数的是  $( )$ 
  - A.  $f(x) = -x$
  - B.  $f(x) = x^2$
  - C.  $f(x) = 2^x$
  - D.  $f(x) = \cos x$
10. 已知向量  $\vec{a} = (2, 1)$ ， $\vec{b} = (m, 2)$ 。若  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，则实数  $m = ( )$ 
  - A. 0
  - B. 2
  - C. 4
  - D. 6
11. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ ，且  $a + b = 2$ 。当  $ab$  取最大值时， $( )$ 
  - A.  $a = 0, b = 2$
  - B.  $a = 2, b = 0$
  - C.  $a = 1, b = 1$
  - D.  $a = -1, b = 3$
12. 将函数  $y = \log_2 x$  的图象向上平移 1 个单位长度，得到函数  $y = f(x)$  的图象，则  $f(x) = ( )$ 
  - A.  $\log_2(x+1)$
  - B.  $1 + \log_2 x$
  - C.  $\log_2(x-1)$
  - D.  $-1 + \log_2 x$



13. 四棱锥  $P-ABCD$  如图所示, 则直线  $PC$  ( )



- A. 与直线  $AD$  平行  
 B. 与直线  $AD$  相交  
 C. 与直线  $BD$  平行  
 D. 与直线  $BD$  是异面直线

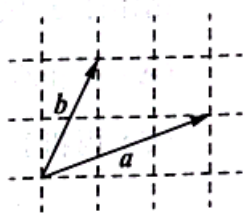
14. 在  $\triangle ABC$  中,  $a=1, b=1, c=\sqrt{3}$ , 则  $\angle C =$  ( )

- A.  $60^\circ$                       B.  $75^\circ$                       C.  $90^\circ$                       D.  $120^\circ$

15. 已知  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则 “ $a=b=0$ ” 是 “ $a+b=0$ ” 的 ( )

- A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
 C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件

16. 向量  $\vec{a}, \vec{b}$  在正方形网格中的位置如图所示. 若网格中每个小正方形的边长为 1, 则  $|\vec{a}-\vec{b}| =$  ( )



- A. 2                      B.  $\sqrt{5}$                       C.  $2\sqrt{2}$                       D. 3

17. 已知函数  $f(x) = \sqrt{x+a}$ . 若  $y = f(x)$  的图象经过原点, 则  $f(x)$  的定义域为 ( )

- A.  $[0, +\infty)$                       B.  $[-\infty, 0)$                       C.  $[1, +\infty)$                       D.  $[-\infty, 1)$

18. 某银行客户端可通过短信验证码登录, 验证码由 0, 1, 2, ..., 9 中的四个数字随机组成 (如 “0013”). 用户使用短信验证码登录该客户端时, 收到的验证码的最后一个数字是奇数的概率为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C.  $\frac{1}{8}$                       D.  $\frac{1}{16}$

19. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的最小值是 ( )

- A. 2                      B. 1                      C. -2                      D. -1

20. 某校学生的体育与健康学科学年成绩  $s$  由三项分数构成, 分别是体育与健康知识测试分数  $a$ , 体质健康测试分数  $b$  和课堂表现分数  $c$ , 计算方式为  $s = a \times 20\% + b \times 40\% + c \times 40\%$ . 学年成绩  $s$  不低于 85 时为优秀, 若该校 4 名学生的三项分数如下:

	$a$	$b$	$c$
甲	85	85	90
乙	90	85	80
丙	85	80	85
丁	85	80	90

则体育与健康学科学年成绩为优秀的学生是 ( )



- A. 甲和乙                  B. 乙和丙                  C. 丙和丁                  D. 甲和丁

第二部分（非选择题 共 40 分）

二、填空题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分。

21. 已知复数  $z_1 = 1 + 2i$ ， $z_2 = 2 - i$ ，则  $z_1 + z_2 =$  \_\_\_\_\_.

22. 在  $\triangle ABC$  中， $a = 2$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，则  $\frac{b}{\sin B} =$  \_\_\_\_\_.

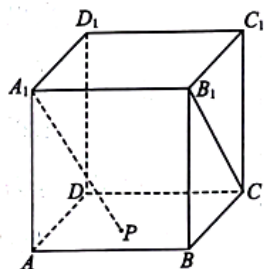
23. 某校初一年级共有三个班，为了解课外阅读情况，随机抽取部分学生调查他们一周的课外阅读时长（单位：小时），整理数据得到下表：

1 班	8	9	10	11	11	15	
2 班	7	7	8	9	9	11	12
3 班	5	7	9	9	9	10	14

① 设样本中 1 班数据的均值为  $\mu_1$ ，2 班数据的均值为  $\mu_2$ ，则  $\mu_1$  \_\_\_\_\_  $\mu_2$ （填“>”或“<”）；

② 设样本中 2 班数据的方差为  $s_2^2$ ，3 班数据的方差为  $s_3^2$ ，则  $s_2^2$  \_\_\_\_\_  $s_3^2$ （填“>”或“<”）。

24. 如图，在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $\Omega$  是正方形  $ABCD$  及其内部的点构成的集合。给出下列三个结论：



①  $\forall P \in \Omega$ ， $A_1P \geq A_1A$ ；

②  $\exists P \in \Omega$ ， $A_1P \parallel B_1C$ ；

③  $\forall P \in \Omega$ ， $A_1P$  与  $B_1C$  不垂直。

其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_。

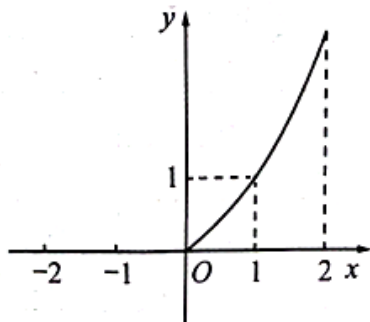
三、解答题共 4 小题，共 28 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

25.（本小题 7 分）已知函数  $f(x) = 1 + \sin 2x$ 。

(1) 求  $f(x)$  的最小正周期；

(2) 求  $f(x)$  的最大值，并写出相应的一个  $x$  的值。

26.（本小题 7 分）已知  $y = f(x)$  是定义在区间  $[-2, 2]$  上的偶函数，其部分图象如图所示。



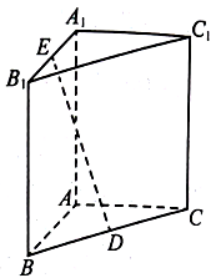
(1) 求  $f(-1)$  的值；



(2) 补全  $y = f(x)$  的图象，并写出不等式  $f(x) \geq 1$  的解集.

27. (本小题 7 分) 阅读下面题目及其解答过程.

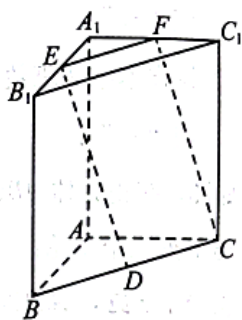
如图，在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中， $AB \perp AC$ ， $D$ ， $E$  分别为  $BC$ ， $A_1B_1$  的中点.



(1) 求证： $DE \parallel$  平面  $A_1ACC_1$ ；

(2) 求证： $AB \perp DE$ .

解：(1) 取  $A_1C_1$  的中点  $F$ ，连接  $EF$ ， $FC$ ，如图所示.



在  $\triangle A_1B_1C_1$  中， $E$ ， $F$  分别为  $A_1B_1$ ， $A_1C_1$  的中点，

所以  $EF \parallel B_1C_1$ ， $EF = \frac{1}{2} B_1C_1$ .

由题意知，四边形  $B_1BCC_1$  为 ①.

因为  $D$  为  $BC$  的中点，所以  $DC \parallel B_1C_1$ ， $DC = \frac{1}{2} B_1C_1$ .

所以  $EF \parallel DC$ ， $EF = DC$ .

所以四边形  $DCFE$  为平行四边形，

所以  $DE \parallel CF$ .

又 ②， $CF \subset$  平面  $A_1ACC_1$ ，

所以， $DE \parallel$  平面  $A_1ACC_1$ .

(2) 因为  $ABC - A_1B_1C_1$  为直三棱柱，所以  $A_1A \perp$  平面  $ABC$ .

又  $AB \subset$  平面  $ABC$ ，所以 ③.

因为  $AB \perp AC$ ，且  $A_1A \cap AC = A$ ，所以 ④.

又  $CF \subset$  平面  $A_1ACC_1$ ，所以  $AB \perp CF$ .

因为 ⑤，所以  $AB \perp DE$ .

以上题目的解答过程中，设置了①~⑤五个空格，如下的表格中为每个空格给出了两个选项，其中只有一个符合逻辑推理。请选出符合逻辑推理的选项，并填写在答题卡的指定位置（只需填写“A”或“B”）.

空格序号	选项
①	A. 矩形                  B. 梯形



- ② A.  $DE \not\subset$  平面  $A_1ACC_1$  B.  $DE \subset$  平面  $A_1ACC_1$   
③ A.  $BC \perp A_1A$  B.  $AB \perp A_1A$   
④ A.  $AB \perp$  平面  $A_1ACC_1$  B.  $BC \perp$  平面  $A_1ACC_1$   
⑤ A.  $DE = CF$  B.  $DE \parallel CF$

28. (本小题 7 分) 给定正整数  $k \geq 2$ , 设集合  $M = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, k\}$ . 对于集合  $M$  的子集  $A$ , 若任取  $A$  中两个不同元素  $(y_1, y_2, \dots, y_k), (z_1, z_2, \dots, z_k)$ , 有  $y_1 + y_2 + \dots + y_k = z_1 + z_2 + \dots + z_k$ , 且  $y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_k + z_k$  中有且只有一个为 2, 则称  $A$  具有性质  $P$ .

(1) 当  $k = 2$  时, 判断  $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$  是否具有性质  $P$ ; (结论无需证明)

(2) 当  $k = 3$  时, 写出一个具有性质  $P$  的集合  $A$ ;

(3) 当  $k = 4$  时, 求证: 若  $A$  中的元素个数为 4, 则  $A$  不具有性质  $P$ .



## 参考答案

一、选择题 (共 20 小题, 每小题 3 分, 共 60 分)

1. D 2. B 3. C 4. C 5. B 6. A 7. D 8. A 9. C 10. C  
11. C 12. B 13. D 14. D 15. A 16. B 17. A 18. A 19. D 20. D

二、填空题 (共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

21.  $3+i$  22. 4 23.  $> <$  24. ①②③

三、解答题 (共 4 小题, 共 28 分)

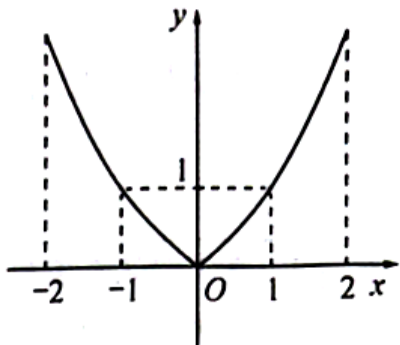
25. (共 7 分) 解: (1)  $f(x)$  的最小正周期  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ .

(2) 因为  $\sin 2x \leq 1$ , 所以  $f(x) = 1 + \sin 2x \leq 2$ , 且  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ .

所以  $f(x)$  的最大值为 2, 相应的一个  $x$  的值为  $\frac{\pi}{4}$ .

26. (共 7 分) 解: (1) 由图可知,  $f(1) = 1$ .

因为  $f(x)$  是偶函数, 所以  $f(-1) = f(1) = 1$ .



(2)  $y = f(x)$  的图象如图. 不等式  $f(x) \geq 1$  的解集为  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ .

27. (共 7 分) 解: (1) ①A ②A (2) ③B ④A ⑤B

28. (共 7 分) 解: (1)  $A$  不具有性质  $P$ .

(2)  $A = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ . (答案不唯一)

(3) 当  $k = 4$  时, 若  $A$  中的元素个数为 4, 假设  $A$  具有性质  $P$ ,

即任取  $A$  中两个不同元素  $(y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4)$ ,

有  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ , ①

$y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3, y_4 + z_4$  中有且只有一个为 2. ②

设  $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = m$ ; 则  $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

当  $m = 1$  时, 由①得  $A = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ , 不满足②, 矛盾.

当  $m = 2$  时, 由①得  $A \subseteq \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ .

由②得  $(1, 1, 0, 0)$  与  $(0, 0, 1, 1)$  不同时在  $A$  中;  $(1, 0, 1, 0)$  与  $(0, 1, 0, 1)$  不同时在  $A$  中;  $(1, 0, 0, 1)$  与  $(0, 1, 1, 0)$  不同时在  $A$  中, 所以  $A$  中元素个数至多为 3, 矛盾.

当  $m = 3$  时, 由①得  $A = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ , 不满足②, 矛盾.

当  $m = 0$  或  $m = 4$  时, 矛盾.



所以假设不成立，即  $A$  不具有性质  $P$ .