北京一六一中学2023—2024学年度第一学期12月阶段测试

高 三 数 学 试 卷

班级__________ 姓名__________ 学号__________

考	1. 本试卷共3页，满分150分，考试时长120分钟。
生	2. 试题答案一律书写在答题纸上，在试卷上作答无效。
须	3. 在答题纸上，选择题用2B铅笔作答，非选择题用黑色字迹签字笔作答。
知	4. 考试结束后，将答题纸、试卷和草稿纸一并交回。

一、选择题：本大题共10道小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求。把正确答案涂写在答题卡上相应的位置。

1. 设全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，集合M满足$\complement_U M=\{1,3\}$，则

A. $2\in M$　　B. $3\in M$　　C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

2. 已知向量$\vec{a}=(m,1),\vec{b}=(-1,2)$．若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$m=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. $-\dfrac{1}{2}$

3. 下列函数中，值域为$(1,+\infty)$的是

A. $y=\dfrac{1}{\sin x}$　　B. $y=\sqrt{x}+1$　　C. $y=\lg(|x|+1)$　　D. $y=2^x+1$

4. 在$\triangle ABC$中，点D在边AB上，$BD=2DA$．记$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m},\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则$\overrightarrow{CB}=$

A. $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B. $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　C. $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D. $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

5. 若$ab>0$，且$a<b$，则下列不等式一定成立的是

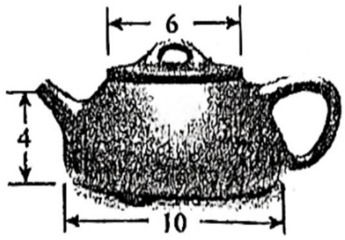
A. $a^2<b^2$　　B. $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　C. $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}>2$　　D. $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

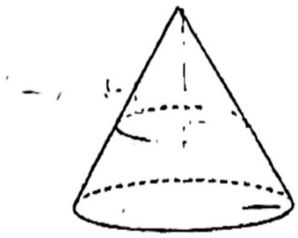
6. 设F为抛物线$C:y^2=4x$的焦点，点A在C上，点$B(3,0)$，若$|AF|=|BF|$，则$|AB|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. $3\sqrt{2}$

7. 紫砂壶是中国特有的手工制造陶土工艺品，其制作始于明朝正德年间．紫砂壶的壶型众多，经典的有西施壶、掇球壶、石瓢壶、潘壶等．其中，石瓢壶的壶体可以近似看成一个圆台（即圆锥用平行

于底面的平面截去一个锥体得到的).下图给出了一个石瓢壶的相关数据(单位:cm),那么该壶的容量约为





A. 100cm^3

B. 200cm^3

C. 300cm^3

D. 400cm^3

8. "$\sin\theta+\tan\theta>0$"是"θ为第一或第三象限角"的

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

9. 在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知B_1D与平面$ABCD$和平面AA_1B_1B所成的角均为$30°$，则

A. $AB=2AD$　　　　B. AB_1与A_1D所成的角为$60°$

C. $AC=CB_1$　　　　D. B_1D与平面BB_1C_1C所成的角为$45°$

10. 黎曼函数由德国著名数学家黎曼（Riemann）发现提出.黎曼函数定义在$[0,1]$上，其解析式为：

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & 当x=\dfrac{q}{p}(p,q均为正整数，且\dfrac{q}{p}为既约真分数)\\ 0, & 当x=0,1或[0,1]上的无理数\end{cases}$$，若函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)+f(x+2)=0$，当$x\in[0,1]$时，$f(x)=R(x)$，则：

$f(\pi)-f(\dfrac{2023}{5})=$

A. $-\dfrac{2}{5}$　　　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　　　C. $\dfrac{1}{5}$　　　　D. $\dfrac{2}{5}$

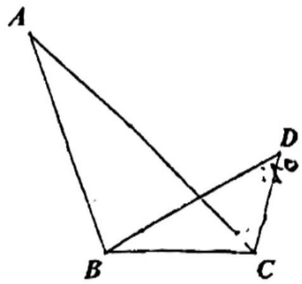
二、填空题：本大题共5小题，共25分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

11. 函数$f(x)=\log_2(1-x)+\sqrt{x}$的定义域是__________

12. 复数z满足：$(1-i)z=2i$，则$|z|=$________

13. 记双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为e, 写出满足条件“直线$y=3x$与$C$无公共点”的e的一个值____________.

14. 如图，为了测量湖两侧的A，B两点之间的距离，某观测小组的三位同学分别在B点，距离A点30km处的C点，以及距离C点10km处的D点进行观测.甲同学在B点测得$\angle DBC=30^\circ$，乙同学在C点测得$\angle ACB=45^\circ$，丙同学在D点测得$\angle BDC=45^\circ$，则A，B两点间的距离为______km.



15. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}2^x+a,x<a\\x^2+2ax,x\geq a\end{cases}$给出下列四个结论：

①当$a=0$时，$f\left(x\right)$的最小值为0；

②当$a\in(-1,0)\cup(\dfrac{1}{3},+\infty)$时，$f\left(x\right)$不存在最小值；

③$f\left(x\right)$ 零点个数为$g\left(a\right)$，则函数$g\left(a\right)$的值域为$\{0,1,2,3\}$；

④当$a\geq 1$时，对任意$x_1,x_2\in\mathbf{R},f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\geq 2f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$.

其中所有正确结论的序号是________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分. 把答案填在答题纸中相应的位置上.

16. （本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos x\cdot\cos(x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在.

条件①：$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$；

条件②：函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上是增函数；

条件③：$\forall x\in\mathrm{R},f(x)\geq f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

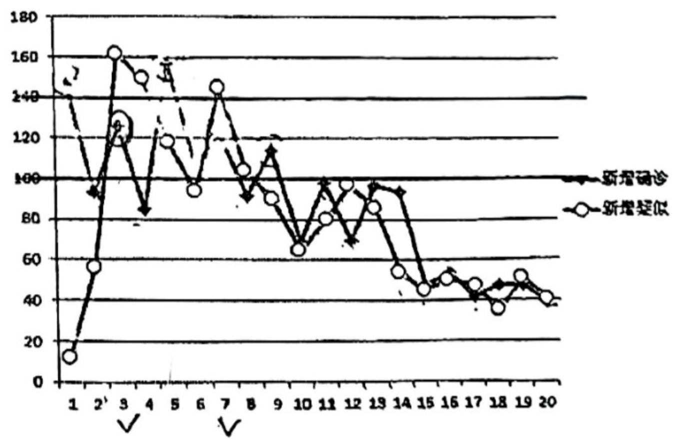
注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

（Ⅰ）求 φ 的值；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上的最大值和最小值.

17. （本小题 13 分）

右图是 2023 年 11 月 1 日到 11 月 20 日，某地区甲流疫情新增数据的走势图.



（Ⅰ）从这 20 天中任选 1 天，求新增确诊和新增疑似的人数都超过 100 的概率；

（Ⅱ）从新增确诊的人数超过 100 的日期中任选两天，用 X 表示新增确诊的人数超过 140 的天数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）记每天新增确诊的人数为 X，每天新增疑似的人数 Y，根据这 20 天统计数据，试判断 DX 与 DY 的大小关系（结论不要求证明）.

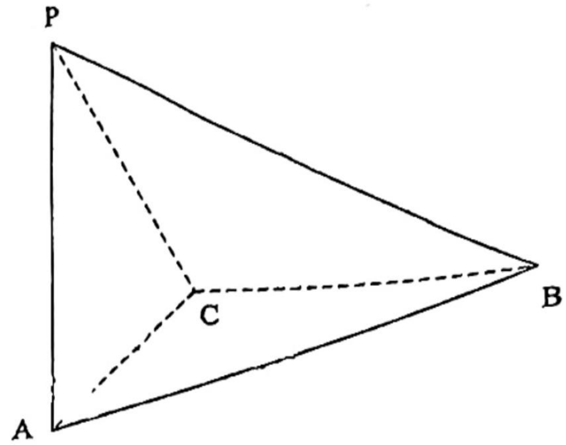
18. （本小题 14 分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PA\perp$平面$ABC, PA=AC=BC=2, PB=2\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求证：$BC\perp$平面PAC；

（Ⅱ）求二面角$A-PB-C$的大小；

（Ⅲ）求点C到平面PAB的距离.



19.（本小题 14 分）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$过点$P(1,\dfrac{3}{2})$，焦距为 2.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）设椭圆E的右焦点为点F，右顶点为点A. 过点F的直线l交椭圆E于不同的两点M,N，直线AM,AN与y轴分别交于点B,C.当$\left|BC\right|=12$时，求直线l的方程.

20．（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=mx\ln x-x^2+1(m\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）当 $m=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)\le 0$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上恒成立，求 m 的取值范围；

（Ⅲ）试比较 $\ln 4$ 与 $\sqrt{2}$ 的大小，并说明理由．

21．（本小题 15 分）

设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\{i_n\}$ 为单调递增的无穷正整数数列，记 $A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}$，$(n=1,2,\cdots)$，定义 $\Omega=\left\{j\in\mathbf{N}^*\,\middle|\,S_k-S_j\ge 0,k=j+1,j+2,\cdots\right\}$．

（Ⅰ）若 $a_n=n,i_n=n^2\ (n=1,2,\cdots)$，写出 A_1,A_2 的值；

（Ⅱ）若 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n=1,2,\cdots)$，求 Ω；

（Ⅲ）设 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 求证：对任意的无穷数列 $\{a_n\}$，存在数列 $\{i_n\}$，使得 $\{\operatorname{sgn}(A_n)\}$ 为常数列．