

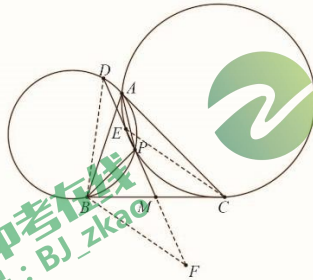


2019 年全国高中数学联合竞赛加试 (A 卷)
参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不得增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分) 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 边的中点. 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 使得 AP 平分 $\angle BAC$. 直线 MP 与 $\triangle ABP, \triangle ACP$ 的外接圆分别相交于不同于点 P 的两点 D, E . 证明: 若 $DE = MP$, 则 $BC = 2BP$.



证明: 延长 MP 到点 F , 使得 $MF = ME$. 连接 BF, BD, CE .

由条件可知 $\angle BDP = \angle BAP = \angle CAP = \angle CEP = \angle CEM$10 分

因为 $BM = CM$ 且 $EM = FM$, 所以 $BF = CE$ 且 $BF \parallel CE$.

于是 $\angle F = \angle CEM = \angle BDP$, 进而 $BD = BF$20 分

又 $DE = MP$, 故 $DP = EM = FM$.

于是在等腰 $\triangle BDF$ 中, 由对称性得 $BP = BM$. 从而 $BC = 2BM = 2BP$.

.....40 分

二、(本题满分 40 分) 设整数 $a_1, a_2, \dots, a_{2019}$ 满足 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2019} = 99$.

记 $f = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2019}^2) - (a_1 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_5 + \dots + a_{2017} a_{2019})$.

求 f 的最小值 f_0 . 并确定使 $f = f_0$ 成立的数组 $(a_1, a_2, \dots, a_{2019})$ 的个数.

解: 由条件知

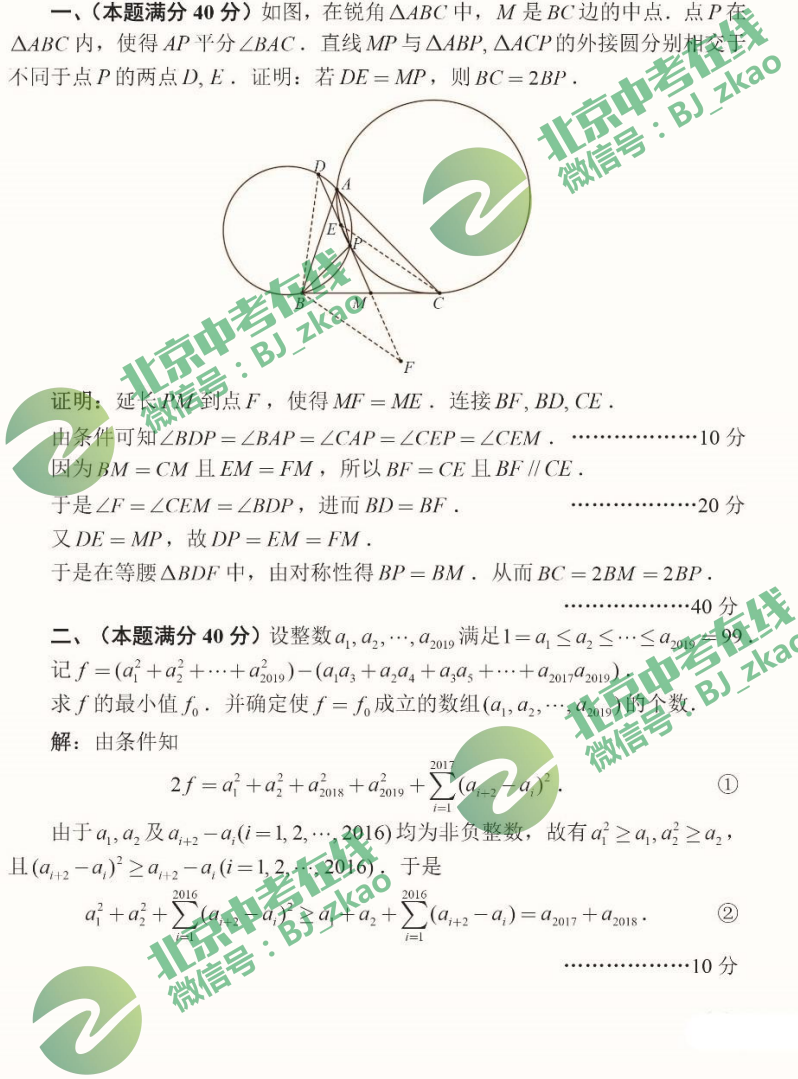
$$2f = a_1^2 + a_2^2 + a_{2018}^2 + a_{2019}^2 + \sum_{i=1}^{2017} (a_{i+2} - a_i)^2. \quad \text{①}$$

由于 a_1, a_2 及 $a_{i+2} - a_i (i = 1, 2, \dots, 2016)$ 均为非负整数, 故有 $a_1^2 \geq a_1, a_2^2 \geq a_2$,

且 $(a_{i+2} - a_i)^2 \geq a_{i+2} - a_i (i = 1, 2, \dots, 2016)$. 于是

$$a_1^2 + a_2^2 + \sum_{i=1}^{2016} (a_{i+2} - a_i)^2 \geq a_1 + a_2 + \sum_{i=1}^{2016} (a_{i+2} - a_i) = a_{2017} + a_{2018}. \quad \text{②}$$

.....10 分





由①、②得

$$2f \geq a_{2017} + a_{2018} + (a_{2019} - a_{2017})^2 + a_{2018}^2 + a_{2019}^2,$$

结合 $a_{2019} = 99$ 及 $a_{2018} \geq a_{2017} > 0$, 可知

$$f \geq \frac{1}{2}(2a_{2017} + (99 - a_{2017})^2 + a_{2017}^2 + 99^2) = (a_{2017} - 49)^2 + 7400 \geq 7400. \quad \textcircled{3}$$

.....20分

另一方面, 令

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{1920} = 1, a_{1920+2k-1} = a_{1920+2k} = k (k = 1, 2, \dots, 49), a_{2019} = 99,$$

此时验证知上述所有不等式均取到等号, 从而 f 的最小值 $f_0 = 7400$.

.....30分

以下考虑③的取等条件. 此时 $a_{2017} = a_{2018} = 49$, 且②中的不等式均取等, 即 $a_1 = a_2 = 1, a_{i+2} - a_i \in \{0, 1\} (i = 1, 2, \dots, 2016)$.

因此 $1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2018} = 49$, 且对每个 $k (1 \leq k \leq 49)$, $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ 中至少有两项等于 k . 易验证知这也是③取等的充分条件.

对每个 $k (1 \leq k \leq 49)$, 设 $a_1, a_2, \dots, a_{2018}$ 中等于 k 的项数为 $1 + n_k$, 则 n_k 为正整数, 且 $(1 + n_1) + (1 + n_2) + \dots + (1 + n_{49}) = 2018$, 即

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{49} = 1969.$$

该方程的正整数解 $(n_1, n_2, \dots, n_{49})$ 的组数为 C_{1968}^{48} , 且每组解唯一对应一个使④取等的数组 $(a_1, a_2, \dots, a_{2019})$, 故使 $f = f_0$ 成立的数组 $(a_1, a_2, \dots, a_{2019})$ 有 C_{1968}^{48} 个.

.....40分

三、(本题满分 50 分) 设 m 为整数, $|m| \geq 2$. 整数数列 a_1, a_2, \dots 满足: a_1, a_2 不全为零, 且对任意正整数 n , 均有 $a_{n+2} = a_{n+1} - ma_n$.

证明: 若存在整数 $r, s (r > s \geq 2)$ 使得 $a_r = a_s = a_1$, 则 $r - s \geq |m|$.

证明: 不妨设 a_1, a_2 互素 (否则, 若 $(a_1, a_2) = d > 1$, 则 $\frac{a_1}{d}$ 与 $\frac{a_2}{d}$ 互素, 并且用 $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \frac{a_3}{d}, \dots$ 代替 a_1, a_2, a_3, \dots , 条件与结论均不改变).

由数列递推关系知

$$a_2 \equiv a_3 \equiv a_4 \equiv \dots \pmod{|m|}. \quad \textcircled{1}$$

以下证明: 对任意整数 $n \geq 3$, 有

$$a_n \equiv a_2 - (a_1 + (n-3)a_2)m \pmod{m^2}. \quad \textcircled{2}$$

.....10分

事实上, 当 $n = 3$ 时②显然成立. 假设 $n = k$ 时②成立 (其中 k 为某个大于 2 的整数), 注意到①, 有 $ma_{k-1} \equiv ma_2 \pmod{m^2}$, 结合归纳假设知

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k - ma_{k-1} \equiv a_2 - (a_1 + (k-3)a_2)m - ma_2 \\ &\equiv a_2 - (a_1 + (k-2)a_2)m \pmod{m^2}, \end{aligned}$$



即 $n = k + 1$ 时②也成立. 因此②对任意整数 $n \geq 3$ 均成立.20分

注意, 当 $a_1 = a_2$ 时, ②对 $n = 2$ 也成立.

设整数 $r, s (r > s \geq 2)$, 满足 $a_r = a_s = a_1$.

若 $a_1 = a_2$, 由②对 $n \geq 2$ 均成立, 可知

$$a_2 - (a_1 + (r-3)a_2)m \equiv a_r = a_s \equiv a_2 - (a_1 + (s-3)a_2)m \pmod{m^2},$$

即 $a_1 + (r-3)a_2 \equiv a_1 + (s-3)a_2 \pmod{|m|}$, 即

$$(r-s)a_2 \equiv 0 \pmod{|m|}. \quad \textcircled{3}$$

若 $a_1 \neq a_2$, 则 $a_r = a_s = a_1 \neq a_2$, 故 $r > s \geq 3$. 此时由于②对 $n \geq 3$ 均成立, 故类似可知③仍成立.30分

我们证明 a_2, m 互素.

事实上, 假如 a_2 与 m 存在一个公共素因子 p , 则由①得 p 为 a_2, a_3, a_4, \dots 的公因子, 而 a_1, a_2 互素, 故 $p \nmid a_1$, 这与 $a_r = a_s = a_1$ 矛盾.

因此, 由③得 $r-s \equiv 0 \pmod{|m|}$. 又 $r > s$, 所以 $r-s \geq |m|$.

.....50分

四、(本题满分 50 分) 设 V 是空间中 2019 个点构成的集合, 其中任意四点不共面. 某些点之间连有线段, 记 E 为这些线段构成的集合. 试求最小的正整数 n , 满足条件: 若 E 至少有 n 个元素, 则 E 一定含有 908 个二元子集, 其中每个二元子集中的两条线段有公共端点, 且任意两个二元子集的交为空集.

解: 为了叙述方便, 称一个图中的两条相邻的边构成一个“角”.

先证明一个引理: 设 $G = (V, E)$ 是一个简单图, 且 G 是连通的, 则 G 含有

$$\left\lfloor \frac{|E|}{2} \right\rfloor \text{ 个两两无公共边的角 (这里 } \lfloor \alpha \rfloor \text{ 表示实数 } \alpha \text{ 的整数部分).}$$

引理的证明: 对 E 的元素个数 $|E|$ 归纳证明. 当 $|E| = 0, 1, 2, 3$ 时, 结论显然成立. 下面假设 $|E| \geq 4$, 并且结论在 $|E|$ 较小时均成立. 只需证明, 在 G 中可以选择两条边 a, b 构成一个角, 在 G 中删去 a, b 这两条边后, 剩下的图含有一个连通分支包含 $|E| - 2$ 条边. 对这个连通分支应用归纳假设即得结论成立.

考虑 G 中的最长路 $P: v_1 v_2 \dots v_k$, 其中 v_1, v_2, \dots, v_k 是互不相同的顶点. 因为 G 连通, 故 $k \geq 3$.

情形 1: $\deg(v_1) \geq 2$. 由于 P 是最长路, v_1 的邻点均在 v_2, \dots, v_k 中, 设 $v_1 v_i \in E$, 其中 $3 \leq i \leq k$. 则 $\{v_1 v_2, v_1 v_i\}$ 是一个角, 在 E 中删去这两条边. 若 v_1 处还有第三条边, 则剩下的图是连通的; 若 v_1 处仅有被删去的两条边, 则 v_1 成为孤立点, 其余顶点仍互相连通. 总之在剩下的图中有一个连通分支含有 $|E| - 2$ 条边.

情形 2: $\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 2$. 则 $\{v_1 v_2, v_2 v_3\}$ 是一个角, 在 G 中删去这两条边后, v_1, v_2 都成为孤立点, 其余的点互相连通, 因此有一个连通分支含有 $|E| - 2$ 条边.

情形 3: $\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) \geq 3$, 且 v_2 与 v_4, \dots, v_k 中某个点相邻. 则 $\{v_1 v_2, v_2 v_3\}$



是一个角，在 G 中删去这两条边后， v_1 成为孤立点，其余点互相连通，因此有一个连通分支含有 $|E|-2$ 条边。

情形 4: $\deg(v_1)=1$, $\deg(v_2)\geq 3$, 且 v_2 与某个 $u \in \{v_1, v_3, \dots, v_k\}$ 相邻. 由于 P 是最长路, 故 u 的邻点均在 v_2, \dots, v_k 之中. 因 $\{v_1v_2, v_2u\}$ 是一个角, 在 G 中删去这两条边, 则 v_1 是孤立点. 若 u 处仅有边 uv_2 , 则删去所述边后 u 也是孤立点, 而其余点互相连通. 若 u 处还有其他边 uv_i , $3 \leq i \leq k$, 则删去所述边后, 除 v_1 外其余点互相连通. 总之, 剩下的图中有一个连通分支含有 $|E|-2$ 条边.

引理获证.20 分

回到原题, 题中的 V 和 E 可看作一个图 $G=(V, E)$.

首先证明 $n \geq 2795$.

设 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2019}\}$. 在 v_1, v_2, \dots, v_{61} 中, 首先两两连边, 再删去其中 15 条边 (例如 $v_1v_2, v_1v_3, \dots, v_1v_{16}$), 共连了 $C_{61}^2 - 15 = 1815$ 条边, 则这 61 个点构成的图是连通图. 再将剩余的 $2019 - 61 = 1958$ 个点配成 979 对, 每对两点之间连一条边, 则图 G 中一共连了 $1815 + 979 = 2794$ 条线段. 由上述构造可见, G 中的任何一个角必须使用 v_1, v_2, \dots, v_{61} 相连的边, 因此至多有 $\left\lfloor \frac{1815}{2} \right\rfloor = 907$ 个两两无公共边的角. 故满足要求的 n 不小于 2795.30 分

另一方面, 若 $|E| \geq 2795$, 可任意删去若干条边, 只考虑 $|E| = 2795$ 的情形.

设 G 有 k 个连通分支, 分别有 m_1, \dots, m_k 个点, 及 e_1, \dots, e_k 条边. 下面证明 e_1, \dots, e_k 中至多有 979 个奇数.

反证法, 假设 e_1, \dots, e_k 中有至少 980 个奇数, 由于 $e_1 + \dots + e_k = 2795$ 是奇数, 故 e_1, \dots, e_k 中至少有 981 个奇数, 故 $k \geq 981$. 不妨设 e_1, e_2, \dots, e_{981} 都是奇数, 显然 $m_1, m_2, \dots, m_{981} \geq 2$.

令 $m = m_{981} + \dots + m_k \geq 2$, 则有 $C_{m_i}^2 \geq e_i (1 \leq i \leq 980)$, $C_m^2 \geq e_{981} + \dots + e_k$, 故

$$2795 = \sum_{i=1}^k e_i \leq C_m^2 + \sum_{i=1}^{980} C_{m_i}^2. \quad \text{①}$$

利用组合数的凸性, 即对 $x \geq y \geq 3$, 有 $C_x^2 + C_y^2 \leq C_{x+1}^2 + C_{y-1}^2$, 可知当 m_1, \dots, m_{980}, m

由 980 个 2 以及一个 59 构成时, $C_m^2 + \sum_{i=1}^{980} C_{m_i}^2$ 取得最大值. 于是

$$C_m^2 + \sum_{i=1}^{980} C_{m_i}^2 \leq C_{59}^2 + 980C_2^2 = 2691 < 2795,$$

这与①矛盾. 从而 e_1, \dots, e_k 中至多有 979 个奇数.40 分

对每个连通分支应用引理, 可知 G 中含有 N 个两两无公共边的角, 其中

$$N = \sum_{i=1}^k \left\lfloor \frac{e_i}{2} \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k e_i - 979 \right) = \frac{1}{2} (2795 - 979) = 908.$$

综上, 所求最小的 n 是 2795.50 分