2023 北京交大附中高一 12 月月考

数　　学

2023.12

说明：本试卷共 4 页，共 120 分.考试时长 90 分钟.

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1. 已知命题 $p:\forall x>0$，$5x^2-4x+1\geq 0$，则命题 p 的否定为（　）

A. $\forall x>0$，$5x^2-4x+1<0$　　B. $\forall x<0$，$5x^2-4x+1<0$

C. $\exists x>0$，$5x^2-4x+1<0$　　D. $\exists x<0$，$5x^2-4x+1<0$

2. 设集合 $A=\left\{x\middle|3^x>3\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-3x<0\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $(1,3)$　　B. $[1,3)$

C. $(0,3)$　　D. $[0,3)$

3. 以下函数既是偶函数又在 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　）

A. $f(x)=x^4$　　B. $f(x)=\sqrt{x}$

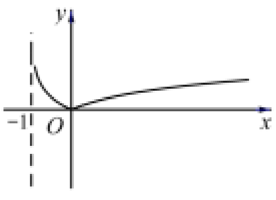
C. $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　D. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$

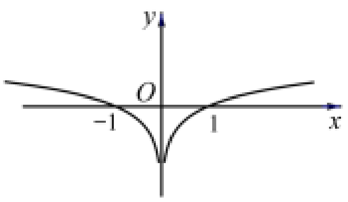
4. 已知 $x<y$，则下列不等式一定成立的是（　）

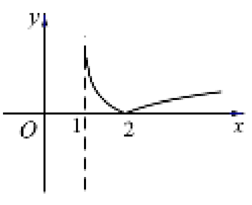
A. $x^3<y^3$　　B. $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$

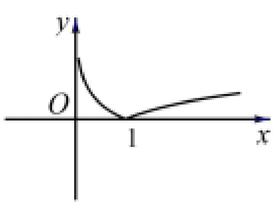
C. $2^{-x}<2^{-y}$　　D. $\lg\left(x^2+1\right)<\lg\left(y^2+1\right)$

5. 函数 $y=\left|\lg\left(x-1\right)\right|$ 的图象是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

6. 已知 $f\left(x\right)$ 是定义域为 **R** 的奇函数，当 $x>0$ 时，$f\left(x\right)$ 单调递增，且 $f\left(4\right)=0$，则满足不等式 $x\cdot f\left(x-1\right)<0$ 的 x 的取值范围是（　）

A. $(-3,1)$ B. $(1,5)$ C. $(-3,0)\cup(1,5)$ D. $(-\infty,-3)\cup(1,5)$

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-a, x\le 1\\ -x+a, x>1\end{cases}$，则“函数 $f(x)$ 有两个零点”成立的充分不必要条件是 $a\in$

A. $(0,2]$ B. $(1,2]$ C. $(1,2)$ D. $(0,1]$

8. 在一个不透明的袋子里装有四个小球，球上分别标有6，7，8，9四个数字，这些小球除数字外都相同. 甲、乙两人玩“猜数字”游戏，甲先从袋中任意摸出一个小球，将小球上的数字记为 m，再由乙猜这个小球上的数字，记为 n.如果 m，n 满足 $|m-n|\le 1$，那么就称甲、乙两人“心领神会”，则两人“心领神会”的概率是（ ）

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{8}$

9. 函数 $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-ax+3\right)$ 在 $[1,2]$ 上恒为正数，则实数 a 的取值范围是（ ）

A. $2\sqrt{2}<a<2\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{2}<a<\frac{7}{2}$

C. $3<a<\frac{7}{2}$ D. $3<a<2\sqrt{3}$

10. 形如 $2^{2^n}+1$(n 是非负整数)的数称为费马数，记为 F_n.数学家费马根据 F_0,F_1,F_2,F_3,F_4 都是质数提出了猜想:费马数都是质数.多年之后，数学家欧拉计算出 F_5 不是质数，那 F_5 的位数是（ ）

(参考数据: $lg2\approx 0.3010$)

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

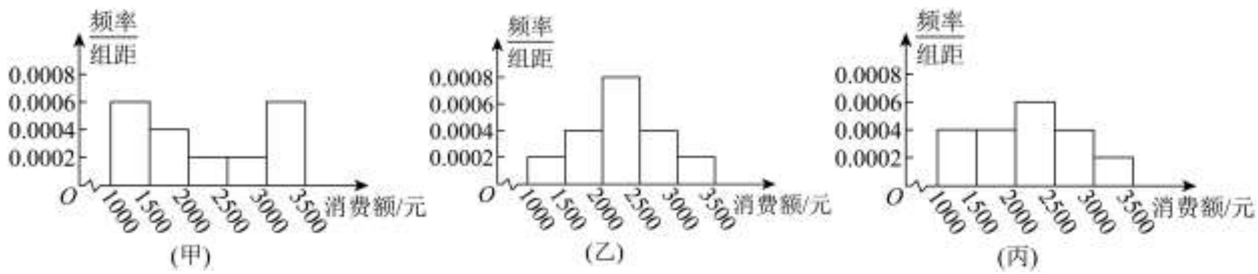
二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分，把答案填在题中横线上）

11. 函数 $y=\lg\left(x^2-5x+4\right)$ 的定义域为__________.

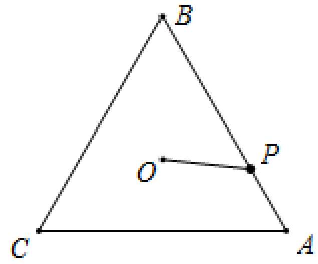
12. 某高中学校进行问卷调查，用比例分配的分层随机抽样方法从该校三个年级中抽取36人进行问卷调查，其中高一年级抽取了15人，高二年级抽取了12人，且高三年级共有学生900人，则该高中的学生总数为__________人.

13. 令 $a=6^{0.7}$，$b=0.7^6$，$c=\log_{0.7}6$，则三个数 a，b，c 的大小顺序是______.（用“<”连接）

14. 为了解本书居民的生活成本，甲、乙、丙三名同学利用假期分别对三个社区进行了“家庭每月日常消费额”的调查.他们将调查所得的数据分别绘制成频率分布直方图（如图所示），记甲、乙、丙所调查数据的标准差分别为 s_1，s_2，s_3，则它们的大小关系为______.（用“<”连接）



15. 如图，在等边三角形 ABC 中， AB=6.动点 P 从点 A 出发，沿着此三角形三边逆时针运动回到 A 点，记 P 运动的路程为 x，点 P 到此三角形中心 O 距离的平方为 $f(x)$，给出下列三个结论：



①函数 $f(x)$的最大值为 12；

②函数 $f(x)$的图象的对称轴方程为 x=9；

③关于 x 的方程 $f\left(x\right)=kx+3$ 最多有 5 个实数根.

其中，所有正确结论的序号是____.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 已知集合 $A=\left\{x\left|\frac{2}{x-3}>1\right.\right\}$， $B=\left\{x\left|m-2\le x\le 2m+1,m\in\mathbf{R}\right.\right\}$.

（1）当 $m=6$ 时，求集合 $A\cup B$；

（2）若 $A\bigcap B=B$，求实数 m 的取值范围.

17. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2+2$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的定义域和值域；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[t,t+1\right]\left(t\in\mathbf{R}\right)$ 上的最小值.

18. 在新高考背景下，北京高中学生需从思想政治、历史、地理、物理、化学、生物这 6 个科目中选择 3 个科目学习并参加相应的等级性考试.为提前了解学生的选科意愿，某校在期中考试之后，组织该校高一学生进行了模拟选科.为了解物理和其他科目组合的人数分布情况，某教师整理了该校高一（1）班和高一（2）班的相关数据，如下表：

	物理+化学	物理+生物	物理+思想政治	物理+历史	物理+地理
高一（1）班	10	6	2	1	7
高一（2）班.	15	9	3	1	6

其中高一（1）班共有 40 名学生，高一（2）班共有 38 名学生.假设所有学生的选择互不影响.

（1）从该校高一（1）班和高一（2）班所有学生中随机选取 1 人，求此人在模拟选科中选择了“物理+化学”的概率；

（2）从表中选择“物理+思想政治”的学生中随机选取 2 人参加座谈会，求这 2 人均来自高一（2）班的概

率；

（3）该校在本学期期末考试之后组织高一学生进行了第二次选科，现从高一（1）班和高一（2）班各随机选取 1 人进行访谈，发现他们在第二次选科中都选择了“物理+历史”.根据这一结果，能否认为在第二次选科中选择“物理+历史”的人数发生了变化？说明理由.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\log_a \dfrac{x-2}{x+2}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

（1）求 $f\left(x\right)$ 的定义域；

（2）若当 $a=2$ 时，函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-b$ 在 $\left(2,+\infty\right)$ 有且只有一个零点，求实数 b 的范围；

（3）是否存在实数 a，使得当 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[m,n\right]$ 时，值域为 $\left[1+\log_a n,1+\log_a m\right]$，若存在，求出实数 a 的范围；若不存在，请说明理由.

20. 对于函数 $f\left(x\right)$，若在定义域内存在实数 x_0，且 $x_0\neq 0$，满足 $f\left(-x_0\right)=f\left(x_0\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 为“弱偶函数”.若在定义域内存在实数 x_0，满足 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 为“弱奇函数”.

（1）判断函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},x>0\\ x^3,x<0\end{cases}$ 是否为“弱奇函数”或“弱偶函数”；（直接写出结论）

（2）已知函数 $g\left(x\right)=\left(x-2\right)\left|x+1\right|$，试判断 $g\left(x\right)$ 为其定义域上的“弱奇函数”，若是，求出所有满足 $g\left(-x_0\right)=-g\left(x_0\right)$ 的 x_0 的值，若不是，请说明理由；

（3）若 $h\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x^2-mx},x\geq 4\\ x+3,x<4\end{cases}$ 为其定义域上的“弱奇函数”.求实数 m 取值范围.

参考答案

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.）

1.【答案】C

【分析】根据全称量词命题的否定为存在量词命题易求.

【详解】根据全称量词命题的否定为存在量词命题知：

命题 $p:\forall x>0$，$5x^2-4x+1\geq 0$ 的否定为：$\exists x>0$，$5x^2-4x+1<0$.

故选：C

2.【答案】A

【分析】先化简集合 A，B，再根据集合的运算得解.

【详解】由 $3^x>3$，即 $3^x>3^1$，因为 $y=3^x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调递增函数，

所以 $x>1$，$\therefore A=\left\{x\middle|x>1\right\}$；

又 $x^2-3x<0$，解得 $0<x<3$，

$\therefore B=\left\{x\middle|0<x<3\right\}$；

$\therefore A\cap B=\left(1,3\right)$.

故选：A.

3.【答案】D

【分析】

利用奇偶性的定义和指数函数、对数函数、幂函数的性质，对选项逐一判断即可.

【详解】选项 A 中，$f(x)=x^4$，满足 $f(-x)=\left(-x\right)^4=x^4=f(x)$，$f(x)$ 是偶函数，但由幂函数性质知 $f(x)=x^4$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故不符合题意；

选项 B 中，由幂函数性质知，$f(x)=\sqrt{x}$ 在定义域 $\left[0,+\infty\right)$ 内单调递增，$x<0$ 无意义，故不具有奇偶性，不符合题意；

选项 C 中，由指数函数性质可知，$f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在 R 上单调递减，但 $f(-x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=2^x\neq f(x)$，故不是偶函数，不符合题意；

选项 D 中，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$ 定义域 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$，满足 $f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}|-x|=\log_{\frac{1}{2}}|x|=f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，由对数函数性质可知，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x|$ 符合题意.

故选：D.

4.【答案】A

【分析】根据不等式的性质，幂函数，指数函数和对数函数的性质判断.

【详解】对 A，根据幂函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增得 $x<y$ 时，$x^3<y^3$，故 A 正确；

对 B，当 $x<0<y$ 时，$\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$，B 错；

对 C，$x<y$，则 $-x>-y$，根据指数函数 $y=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增得 $2^{-x}>2^{-y}$，故 C 错误；

对 D，$x<y$ 时，例如，$x=-2, y=1$，

则 $x^2+1>y^2+1$，根据对数函数 $y=\lg x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $\lg\left(x^2+1\right)>\lg\left(y^2+1\right)$，因此 D 错；

故选：A.

5.【答案】C

【分析】将函数 $y=\lg x$ 的图象进行变换可得出函数 $y=\left|\lg(x-1)\right|$ 的图象，由此可得出合适的选项.

【详解】将函数 $y=\lg x$ 的图象先向右平移1个单位长度，可得到函数 $y=\lg(x-1)$ 的图象，

再将所得函数图象位于 x 轴下方的图象关于 x 轴翻折，位于 x 轴上方图象不变，可得到函数 $y=\left|\lg(x-1)\right|$ 的图象.

故合乎条件的图象为选项 C 中的图象.

故选：C.

【点睛】结论点睛：两种常见的图象翻折变换：

$f(x) \xrightarrow{\text{保留}x\text{轴上方，将}x\text{轴下方的图象沿}x\text{轴对称}} \left|f(x)\right|$，

$f(x) \xrightarrow{\text{保留}y\text{轴右方图像，将}y\text{轴右方图象沿着}y\text{轴对称}} f(|x|)$.

6.【答案】C

【分析】由奇函数的定义和单调性的性质，即可求解不等式.

【详解】因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，$x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增，且 $f(4)=0$，

所以当 $x\in(-\infty,-4)\cup(0,4)$ 时，$f(x)<0$，

当 $x\in(-4,0)\cup(4,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，

不等式 $x\cdot f(x-1)<0$，则

当 $x<0$ 时，有 $f(x-1)>0$，即 $-4<x-1<0$ 或 $x-1>4$，解得 $-3<x<1$ 或 $x>5$，又 $x<0$，

$\therefore -3<x<0$；

当 $x>0$ 时，有 $f(x-1)<0$，即 $x-1<-4$ 或 $0<x-1<4$，又 $x>0$，解得 $1<x<5$；

综上，不等式 $x\cdot f(x-1)<0$ 的解集为 $(-3,0)\cup(1,5)$.

故选：C.

7.【答案】C

【分析】根据 $f\left(x\right)$ 单调性，结合已知条件，求得 $f\left(x\right)$ 有两个零点的充要条件，再结合选项进行选择即可.

【详解】$\because f(x)=\begin{cases}2^{x}-a,x\le 1\\-x+a,x>1\end{cases}$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

故“函数 $f(x)$ 有两个零点” $\Leftrightarrow f(1)=2-a\ge 0,-a<0,f(1)>-1+a>0$，

解得 $1<a\le 2$，

“函数 $f(x)$ 有两个零点”成立的充分不必要条件必须为 $(1,2]$ 的子集，只有 C 符合，

故选：C.

【点睛】本题考查充分不必要条件的判断，涉及由函数零点个数求参数范围问题，属综合基础题.

8.【答案】D

【分析】根据古典概型的计算公式，结合绝对值不等式进行求解即可.

【详解】根据题意，m，n 的情况如下：$\left(6,6\right),\left(6,7\right),\left(6,8\right),\left(6,9\right),\left(7,6\right),\left(7,7\right),\left(7,8\right),\left(7,9\right)$,

$\left(8,6\right),\left(8,7\right),\left(8,8\right),\left(8,9\right),\left(9,6\right),\left(9,7\right),\left(9,8\right),\left(9,9\right)$, 共 16 种情况，

其中 m，n 满足 $\left|m-n\right|\le 1$ 的情况如下：

$\left(6,6\right),\left(6,7\right),\left(7,6\right),\left(7,7\right),\left(7,8\right),\left(8,7\right),\left(8,8\right),\left(8,9\right),\left(9,8\right),\left(9,9\right)$, 共 10 种情况，

所以两人“心领神会”的概率是 $\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$，

故选：D

9.【答案】D

【分析】根据底数是 $\dfrac{1}{3}$， $y=f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^{2}-ax+3)$ 在 $[1,2]$ 上恒为正数，故 $0<x^{2}-ax+3<1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，进而解不等式就可以了.

【详解】解：由于底数是 $\dfrac{1}{3}$，从而 $y=f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^{2}-ax+3)$ 在 $[1,2]$ 上恒为正数，

故 $0<x^{2}-ax+3<1$ 在 $[1,2]$ 上恒成立，

即 $x+\dfrac{2}{x}<a<x+\dfrac{3}{x}$

由于 $x\in[1,2]$， $x+\dfrac{3}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{3}{x}}=2\sqrt{3}$ 当且仅当 $x=\dfrac{3}{x}$ 即 $x=\sqrt{3}$ 时取等号；

由对勾函数的性质可知，函数 $g\left(x\right)=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $\left[1,\sqrt{2}\right]$ 上单调递减，在 $\left[\sqrt{2},2\right]$ 上单调递增，且

$g\left(1\right)=g\left(2\right)=3$

所以$3<a<2\sqrt{3}$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查对数型函数，一元二次函数值域问题，属于中档题.

10.【答案】B

【分析】

$F_5=2^{32}+1$,设$m=2^{32}$,两边取常用对数估算m的位数即可.

【详解】$\because F_5=2^{32}+1$,设$m=2^{32}$，则两边取常用对数得

$\lg m=\lg 2^{32}=32\lg 2=32\times 0.3010=9.632$.

$m=10^{9.632}\approx 10^{9}$，

故F_5的位数是10，

故选：B.

【点睛】解决对数运算问题的常用方法：

(1)将真数化为底数的指数幂的形式进行化简.

(2)将同底对数的和、差、倍合并.

(3)利用换底公式将不同底的对数式转化成同底的对数式，要注意换底公式的正用、逆用及变形应用.

(4)利用常用对数中的$\lg 2+\lg 5=1$简化计算.

二、填空题（本大题共5小题，每小题4分，共20分，把答案填在题中横线上）

11.【答案】$(4,+\infty)\cup(-\infty,1)$

【分析】利用对数函数真数大于零，解不等式即可求得结果.

【详解】由对数函数定义可得$x^2-5x+4>0$，解得$x>4$或$x<1$，

所以函数定义域为$(4,+\infty)\cup(-\infty,1)$.

故答案为：$(4,+\infty)\cup(-\infty,1)$

12.【答案】3600

【分析】根据分层抽样的抽样比即可求解.

【详解】由题意可知：高三年级抽取了$36-15-12=9$人，

由于高三共有900人，所以抽样比为$\frac{1}{100}$，

所以高中学生总数为$36\times 100=3600$，

故答案为：3600

13.【答案】$c<b<a$

【分析】根据指数函数和对数函数单调性，结合临界值$0,1$即可确定大小关系.

【详解】$\because 6^{0.7}>6^{0}=1=0.7^{0}>0.7^{0.6}>0=\log_{0.7}1>\log_{0.7}6$，$\therefore c<b<a$.

故答案为：$c<b<a$.

14.【答案】$s_2<s_3<s_1$

【分析】根据平均数公式及方差公式分别计算s_1^2、s_2^2、s_3^2，即可判断；

【详解】由图甲：平均值为

$\overline{x_1}=500\left(1250\times0.0006+1750\times0.0004+2250\times0.0002+2750\times0.0002+3250\times0.0006\right)=2200$，

$s_1^2=(1250-2200)^2\times0.3+(1750-2200)^2\times0.2+(2250-2200)^2\times0.1$

$+(2750-2200)^2\times0.1+(3250-2200)^2\times0.3$

$=672500$，

$\overline{x_2}=1250\times0.1+1750\times0.2+2250\times0.4+2750\times0.2+3250\times0.1=2250$，

$s_2^2=(1250-2250)^2\times0.1+(1750-2250)^2\times0.2+(2250-2250)^2\times0.4$

$+(2750-2250)^2\times0.2+(3250-2250)^2\times0.1$

$=300000$，

$\overline{x_3}=1250\times0.2+1750\times0.2+2250\times0.3+2750\times0.2+3250\times0.1=2150$，

$s_3^2=(1250-2150)^2\times0.2+(1750-2150)^2\times0.2+(2250-2150)^2\times0.3$

$+(2750-2150)^2\times0.2+(3250-2150)^2\times0.1$

$=390000$，

则标准差$s_2<s_3<s_1$，

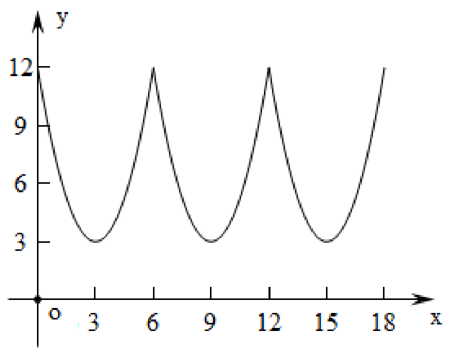
故答案为：$s_2<s_3<s_1$.

15.【答案】①②

【分析】

写出P分别在AB,BC,CA上运动时的函数解析式$f(x)=|OP|^2$，利用分段函数图象可解.

【详解】

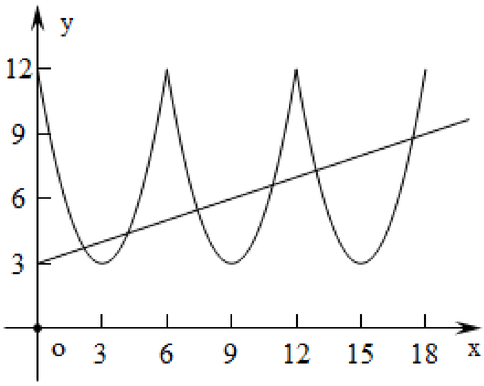


P分别在AB上运动时的函数解析式$f(x)=|OP|^2=3+(x-3)^2,(0\le x\le6)$，

P分别在BC上运动时的函数解析式$f(x)=|OP|^2=3+(x-9)^2,(6\le x\le12)$，

P 分别在 CA 上运动时的函数解析式 $f(x)=|OP|^2=3+(x-15)^2,(12\le x\le 18)$，

$$f(x)=|OP|^2=\begin{cases}3+(x-3)^2,(0\le x\le 6)\\3+(x-9)^2,(6\le x\le 12)\\3+(x-15)^2,(12\le x\le 18)\end{cases},$$



由图象可得，方程 $f(x)=kx+3$ 最多有6个实数根

故正确的是①②.

故答案为：①②

【点睛】利用函数图象可以解决很多与函数有关的问题，如利用函数的图象解决函数性质问题，函数的零点、方程根的问题，有关不等式的问题等.解决上述问题的关键是根据题意画出相应函数的图象，利用数形结合思想求解.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16.【答案】（1） $A\cup B=\{x|3<x\le 13\}$

（2）$(-\infty,-3)$

【分析】（1）直接代入计算，再根据并集含义即可；

（2）分集合 B 是否为空集讨论即可.

【小问 1 详解】

由集合 A 有意义可知分母不为零， $x\ne 3$，

$$\frac{2}{x-3}>1\Rightarrow\frac{2}{x-3}-1>0\Rightarrow\frac{2}{x-3}-\frac{x-3}{x-3}>0\Rightarrow(x-5)(x-3)<0$$

解得 $A=\{x|3<x<5\}$.

当 $m=6$ 时， $B=\{x|4\le x\le 13\}$，

则 $A\cup B=\{x|3<x\le 13\}$

【小问 2 详解】

由 $A\cap B=B$，得 $B\subseteq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，有 $m-2>2m+1$，解得 $m<-3$.

当 $B \neq \varnothing$ 时，有 $\begin{cases} m \geq -3 \\ m-2>3 \\ 2m+1<5 \end{cases}$，无解.

综上，$m \in (-\infty, -3)$.

17.【答案】（1） 定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[2, +\infty)$

（2） 答案见解析

【分析】（1）根据二次函数的性质可得答案;

（2）讨论对称轴与区间的关系，结合二次函数性质可得答案.

【小问 1 详解】

由题意定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $x^2 \geq 0$，所以 $x^2+2 \geqslant 2$，即值域为 $[2, +\infty)$.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 图象的对称轴为 $x=0$，

当 $t+1 \leq 0$ 时，即 $t \leq -1$ 时，$f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上单调递减，

则 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(t+1)=(t+1)^2+2$；

当 $t<0<t+1$ 时，即 $-1<t<0$ 时，$f(x)$ 在 $[t, 0)$ 上单调递减，在 $(0, t+1]$ 上单调递增，

则 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(0)=2$；

当 $t \geq 0$ 时，$f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上单调递增，

$f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最小值为 $f(t)=t^2+2$；

综上可得 $t \leq -1$ 时，最小值为 $(t+1)^2+2$；

$-1<t<0$ 时，最小值为 2；

$t \geq 0$ 时，最小值为 t^2+2.

18.【答案】（1） $\dfrac{25}{78}$

（2） $\dfrac{3}{10}$

（3）答案见解析

【分析】（1）（2）根据古典概型的概率公式即可求解，

（3）根据小概率事件即可求解.

【小问 1 详解】

依题意得高一（1）班和高一（2）班学生共有 $40+38=78$ 人，即该随机试验的样本空间有 78 个样本点.

设事件 $A=$“此人在模拟选科中选择了“物理+化学”，

则事件 A 包含 $10+15=25$ 个样本点，

所以 $P(A)=\dfrac{25}{78}$.

【小问 2 详解】

依题意得高一（1）班选择“物理+思想政治”的学生有 2 人，分别记为 A_1, A_2；

高一（2）班选择“物理+思想政治”的学生有 3 人，分别记为 B_1, B_2, B_3.

该随机试验的样本空间可以表示为:

$\Omega=\{A_1A_2, A_1B_1, A_1B_2, A_1B_3, A_2B_1, A_2B_2, A_2B_3, B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$

即 $n(\Omega)=10$.

设事件 $B=$“这 2 人均来自高一（2）班”，则 $B=\{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$，

所以 $n(B)=3$，故 $P(B)=\dfrac{n(B)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{10}$.

【小问 3 详解】

设事件 $C=$“从高一（1）随机选取 1 人，此人在第二次选科中选择了“物理+历史”，

事件 $D=$“从高一（2）班随机选取 1 人，此人在第二次选科中选择了“物理+历史”，

事件 $E=$“这两人在第二次选科中都选择了“物理+历史”.

假设第二次选科中选择“物理+历史”的人数没有发生变化，

则由模拟选科数据可知，$P(C)=\dfrac{1}{40}, P(D)=\dfrac{1}{38}$.

所以 $P(E)=P(CD)=P(C)P(D)=\dfrac{1}{40}\times\dfrac{1}{38}=\dfrac{1}{1520}$.

答案示例 1：可以认为第二次选科中选择“物理+历史”的人数发生变化.理由如下：

$P(E)$ 比较小，概率比较小的事件一般不容易发生.一旦发生，就有理由认为第二次选科中选择“物理+历史”的人数发生了变化.

答案示例 2：无法确定第二次选科中选择“物理+历史”的人数是否发生变化.理由如下：

事件 E 是随机事件，$P(E)$ 虽然比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生，所以无法确定第二次选科中选择“物理+历史”的人数是否有变化.

19. 【答案】（1）$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

（2）$(-\infty,0)$

（3）存在；$a\in\left(0,\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$

【分析】（1）由 $\dfrac{x-2}{x+2}>0$ 可得 $f(x)$ 的定义域；

（2）注意到$t\left(x\right)=\frac{x-2}{x+2}=1-\frac{4}{x+2}$在$\left(2,+\infty\right)$上单调递增，则$f\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$，即$b$的范围是就是$f\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$上的值域；

（3）由题可得$0<a<1$，则问题转化为$\frac{x-2}{x+2}=ax$在$\left(2,+\infty\right)$上有两个互异实根，即可得答案.

【小问1详解】

由$\frac{x-2}{x+2}>0$，得$x<-2$或$x>2$.

$\therefore f\left(x\right)$的定义域为$\left(-\infty,-2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$；

【小问2详解】

令$t\left(x\right)=\frac{x-2}{x+2}=1-\frac{4}{x+2}$，

因函数$y=\frac{4}{x+2}$在$\left(2,+\infty\right)$上单调递减，则$t\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$上为增函数，

又$a=2$，$\therefore f\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$上为增函数；函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-b$在$\left(2,+\infty\right)$有且只有一个零点，

即$f\left(x\right)=b$在$\left(2,+\infty\right)$有且只有一个解，$\because$函数$f\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$的值域为$\left(-\infty,0\right)$，

$\therefore b$的范围是$\left(-\infty,0\right)$.

【小问3详解】

假设存在这样的实数a，使得当$f\left(x\right)$的定义域为$\left[m,n\right]$时，值域为$\left[1+\log_a n,1+\log_a m\right]$，

由$m<n$且$1+\log_a n<1+\log_a m$，可得$0<a<1$.

又由（2）$t\left(x\right)=1-\frac{4}{x+2}$在$\left(2,+\infty\right)$上为增函数，$y=\log_a x$在$\left(2,+\infty\right)$上为减函数.

则$f\left(x\right)$在$\left(2,+\infty\right)$上为减函数，得$\begin{cases}f\left(m\right)=\log_a\frac{m-2}{m+2}=1+\log_a m=\log_a\left(am\right)\\ f\left(n\right)=\log_a\frac{n-2}{n+2}=1+\log_a n=\log_a\left(an\right)\end{cases}$.

即$\frac{x-2}{x+2}=ax$在$\left(2,+\infty\right)$上有两个互异实根，因$\frac{x-2}{x+2}=ax\Rightarrow ax^2+\left(2a-1\right)x+2=0$

即$g\left(x\right)=ax^2+\left(2a-1\right)x+2$，有两个大于2的相异零点.

设$g\left(x\right)$零点为x_1,x_2，则$\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>4\\ \left(x_1-2\right)\left(x_2-2\right)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(2a-1\right)^2-8a>0\\ -\frac{2a-1}{a}>4\\ \frac{2}{a}+\frac{2\left(2a-1\right)}{a}+4>0\end{cases}$.解得$0<a<\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

又∵ $0<a<1$，故存在这样的实数 $a\in\left(0,\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$ 符合题意.

20.【答案】（1）弱奇函数

（2）$g\left(x\right)$ 不是其定义域上的“弱奇函数”.

（3）$\left[\dfrac{15}{4},4\right]$

【分析】（1）根据所给定义判断即可；

（2）对 x 分类讨论即可；

（3）首先由 $x^2-mx\geq 0$ 在 $\left[4,+\infty\right)$ 上恒成立，求出 m 的取值范围，依题意存在实数 x_0 使得 $h\left(-x_0\right)=-h\left(x_0\right)$，分 $x_0\geq 4$、$-4<x_0<4$、$x_0\leq -4$ 三种情况讨论，分别结合方程有解求出 m 的取值范围，即可得解.

【小问 1 详解】

当 $x<0$ 时，则 $-x>0$，若 $\dfrac{1}{-x}=x^3$，无实数解，舍去；

若 $\dfrac{1}{-x}=-x^3$，解得 $x=-1$（正舍），

当 $x>0$ 时，则 $-x<0$，若 $-x^3=\dfrac{1}{x}$，无实数解，舍去；

若 $-x^3=-\dfrac{1}{x}$，解得 $x=1$（负舍），

则存在实数 $x_0=\pm 1$，满足 $f\left(-x_0\right)=-f\left(x_0\right)$，

则 $f\left(x\right)$ 是“弱奇函数”，

【小问 2 详解】

假设 $g\left(x\right)=\left(x-2\right)\left|x+1\right|$ 为其定义域上的“弱奇函数”，则 $\left(x-2\right)\left|x+1\right|=\left(x+2\right)\left|x-1\right|$，

若 $x>1$，则 $\left(x-2\right)\left(x+1\right)=\left(x+2\right)\left(x-1\right)$，则 $x=0$，舍去；

若 $-1\leq x\leq 1$，则 $\left(x-2\right)\left(x+1\right)=\left(x+2\right)\left(1-x\right)$，则 $x=\pm\sqrt{2}$，舍去；

若 $x\leq -1$，则 $\left(x-2\right)\left(x+1\right)=\left(x+2\right)\left(x-1\right)$，则 $x=0$，舍去；

从而 $g\left(-x_0\right)=-g\left(x_0\right)$ 无解，所以 $g\left(x\right)$ 不是其定义域上的“弱奇函数”.

【小问 3 详解】

由 $x^2-mx\geq 0$ 在 $\left[4,+\infty\right)$ 上恒成立，

转化为 $m\leq x$ 在 $\left[4,+\infty\right)$ 上恒成立，即 $m\leq 4$.

因为$h\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x^2-mx},x\ge 4\\ x+3,x<4\end{cases}$为其定义域上的“弱奇函数”，

所以存在实数x_0使得$h\left(-x_0\right)=-h\left(x_0\right)$，

当$x_0\ge 4$时，则$-x_0\le -4$，所以$-x_0+3=-\sqrt{x_0^2-mx_0}$，即$x_0-3=\sqrt{x_0^2-mx_0}$，

所以$\left(x_0-3\right)^2=x_0^2-mx_0$，$-6x_0+9=-mx_0$，

即$m=6-\dfrac{9}{x_0}$在$\left[4,+\infty\right)$有解可保证$f\left(x\right)$是“弱奇函数"，所以$m\in\left[\dfrac{15}{4},6\right)$，又因为$m\le 4$，所以$m\in\left[\dfrac{15}{4},4\right]$；

当$-4<x_0<4$时，$-4<-x_0<4$，此时$x_0-3+\left(-x_0-3\right)=0$，不成立；

当$x_0\le -4$时，则$-x_0\ge 4$，所以$\sqrt{x_0^2+mx_0}=-\left(x_0+3\right)$，则${x_0}^2+mx_0={x_0}^2+6x_0+9$，

即$\left(m-6\right)x_0=9$，即$m=6+\dfrac{9}{x_0}$在$\left(-\infty,-4\right]$有解可保证$f\left(x\right)$是“弱奇函数”，

所以$m\in\left[\dfrac{15}{4},6\right)$，由$m\le 4$可知$m\in\left[\dfrac{15}{4},4\right]$；

综上所述，实数m的取值范围为$m\in\left[\dfrac{15}{4},4\right]$.

【点睛】关键点睛：本题属于新定义问题，对于新定义问题，关键是理解所给定义，将问题转化为方程有解，分段函数注意分类讨论.