



# 初二数学

2023.1

学校 \_\_\_\_\_ 班级 \_\_\_\_\_ 姓名 \_\_\_\_\_ 教育 ID 号 \_\_\_\_\_

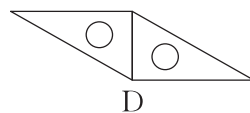
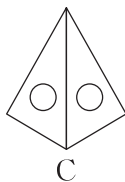
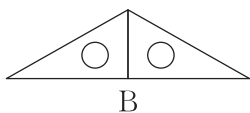
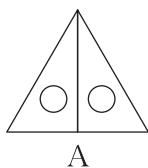
考生须知

1. 本试卷共 8 页,共三道大题,28 道小题,满分 100 分,考试时间 100 分钟.
2. 在试卷上和答题卡上准确填写学校、班级、姓名和教育 ID 号.
3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效.
4. 在答题卡上,选择题、作图题用 2B 铅笔作答,其他试题用黑色字迹签字笔作答.
5. 考试结束后,请将答题卡交回.

## 一、选择题(本题共 20 分,每小题 2 分)

第 1—10 题均有四个选项,符合题意的选项只有一个.

1. 如图,两个全等的直角三角板有一条边重合,组成的四个图形中,不是轴对称图形的是



2. 下列四个式子中,计算正确的是

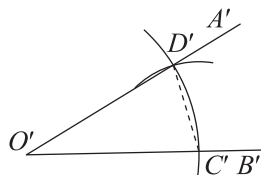
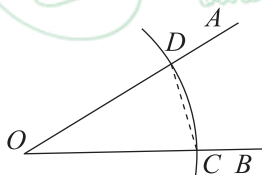
A.  $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B.  $(-a^3)^2 = a^9$

C.  $(2a^2)^3 = 8a^6$

D.  $a^6 \div a^3 = a^2$

3. 已知  $\angle AOB$ . 下面是“作一个角等于已知角,即作  $\angle A'O'B' = \angle AOB$ ”的尺规作图痕迹.



该尺规作图的依据是

A. SAS

B. SSS

C. AAS

D. ASA

4. 计算  $(2m+1)(3m-2)$ , 结果正确的是

A.  $6m^2 - m - 2$

B.  $6m^2 + m - 2$

C.  $6m^2 - 2$

D.  $5m - 1$



正六边形的外角和为

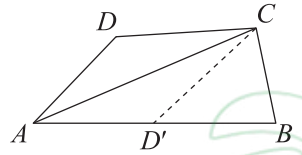
- A.  $180^\circ$                       B.  $360^\circ$                       C.  $720^\circ$                       D.  $1080^\circ$

6. 长方形的面积是  $12a^2 - 6ab$ . 若一边长是  $3a$ , 则另一边长是

- A.  $4a + 2b$                       B.  $4a - 2b$                       C.  $2a - 4b$                       D.  $2a + 4b$

7. 如图, 将一张四边形纸片  $ABCD$  沿对角线  $AC$  翻折, 点  $D$  恰好落在边  $AB$  的中点  $D'$  处. 设  $S_1, S_2$  分别为  $\triangle ADC$  和  $\triangle ABC$  的面积, 则  $S_1$  和  $S_2$  的数量关系是

- A.  $S_1 = \frac{1}{3}S_2$                       B.  $S_1 = \frac{1}{2}S_2$   
C.  $S_1 = 2S_2$                       D.  $S_1 = 3S_2$



8. 若一个多边形的内角和是  $1800^\circ$ , 则这个多边形的边数是

- A. 5                      B. 8                      C. 10                      D. 12

9. 生物小组的同学想用 18 米长的篱笆围成一个等腰三角形区域作为苗圃, 如果苗圃的一边长是 4 米, 那么苗圃的另外两边长分别是

- A. 4 米, 4 米                      B. 4 米, 10 米  
C. 7 米, 7 米                      D. 7 米, 7 米, 或 4 米, 10 米

10. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 长方形  $ABCD$  的两条对称轴是坐标轴, 邻边长分别为 4, 6. 若点  $A$  在第一象限, 则点  $C$  的坐标是

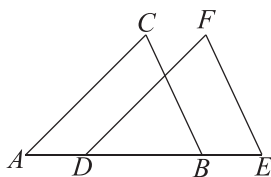
- A.  $(-2, -3)$                       B.  $(2, 3)$   
C.  $(-2, -3)$ , 或  $(-3, -2)$                       D.  $(2, 3)$ , 或  $(3, 2)$

二、填空题(本题共 12 分, 每小题 2 分)

11. 若分式  $\frac{x}{x-1}$  的值等于零, 则  $x$  的值是\_\_\_\_\_.

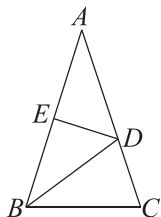
12. 分解因式:  $2m^2 - 8 =$ \_\_\_\_\_.

13. 如图, 点  $A, D, B, E$  在同一条直线上,  $AD = BE, AC \parallel DF$ . 添加一个条件, 使得  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ . 不增加任何新的字母或线, 这个条件可以是\_\_\_\_\_.

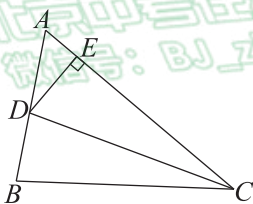




如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$ , $\angle A=36^\circ$ , $BD$ 平分 $\angle ABC$ 交 $AC$ 于点 $D$ ,点 $E$ 为 $AB$ 的中点,连接 $DE$ .则 $\angle ADE$ 的度数是\_\_\_\_\_.



15. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $BC=9$ , $CD$ 是 $\angle ACB$ 的平分线, $DE \perp AC$ 于点 $E$ , $DE=3$ . 则 $\triangle BCD$ 的面积为\_\_\_\_\_.



16. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中,已知点 $A(4,0)$ , $B(0,4)$ , $P(1,2)$ , $Q(2,-1)$ ,连接 $AB$ . 在线段 $AB$ 上作点 $M$ ,使得 $PM+QM$ 最小,并求点 $M$ 的坐标.

在探索过程中,同学们提出了三种不同的方法,作法与图示如下表:

方法①	方法②	方法③
过点 $P$ 作 $PM \perp AB$ 于点 $M$ ,则点 $M$ 为所求.	作点 $P$ 关于直线 $AB$ 的对称点 $P'$ ,连接 $P'Q$ 交 $AB$ 于点 $M$ ,则点 $M$ 为所求.	过点 $P$ 作 $PC \perp AB$ 于点 $C$ ,过点 $Q$ 作 $QD \perp AB$ 于点 $D$ ,取 $CD$ 中点 $M$ ,则点 $M$ 为所求.

其中正确的方法是\_\_\_\_\_ (填写序号),点 $M$ 的坐标是\_\_\_\_\_.



二、解答题(本题共 68 分,第 17 题 4 分,第 18 题 9 分,第 19—25 题,每小题 5 分,第 26 题 6 分,第 27—28 题,每小题 7 分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

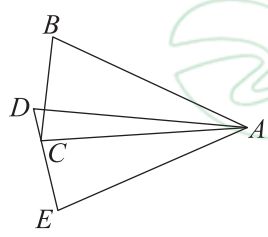
17. 计算:  $|-5| + 2^{-2} - (\pi - 2022)^0$ .

18. 化简: (1)  $(-ab)^3 \div \left(-\frac{3a^3b}{c}\right)$ ;

(2)  $(a+4)(a-4) - (a-1)^2$ .

19. 如图,  $AB=AD, AC=AE, \angle BAD=\angle CAE$ .

求证:  $BC=DE$ .







26. 在化简分式  $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$  时, 甲同学的解法如下. 阅读甲同学的解法, 完成下列问题.

解: 原式 =  $\frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1}$  ..... ①

=  $\frac{2x}{(x+1)(x-1)} \cdot (x+1)(x-1) - \frac{1}{x-1} \cdot (x+1)(x-1)$  ..... ②

=  $2x - (x+1)$  ..... ③

=  $2x - x - 1$  ..... ④

=  $x - 1$  ..... ⑤

(1) 甲同学从第 \_\_\_\_\_ 步开始出错(填序号);

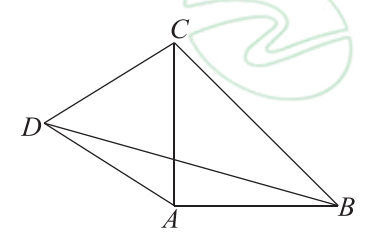
(2) 请你写出正确的解法.

21. 先化简, 再求值:  $\left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{6}{x+2}\right) \cdot \frac{x^2+4x+4}{x-3}$ , 其中  $x$  从  $-2, 2, 3$  三个数中任取一个合适的值.

22. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $AB=AC=8, \angle CBA=45^\circ$ .

(1) 求证:  $AC \perp AB$ ;

(2) 分别以点  $A, C$  为圆心,  $AC$  长为半径作弧, 两弧交于点  $D$  (点  $D$  在  $AC$  的左侧), 连接  $CD, AD, BD$ . 求  $\triangle ABD$  的面积.



23. 解分式方程:  $1 - \frac{x}{x-1} = \frac{2}{(x-5)(x-1)}$ .



课堂上,老师提出问题:

如图1,  $OM, ON$  是两条马路, 点  $A, B$  处是两个居民小区. 现要在两条马路之间的空场处建活动中心  $P$ , 使得活动中心  $P$  到两条马路的距离相等, 且到两个小区的距离也相等. 如何确定活动中心  $P$  的位置?

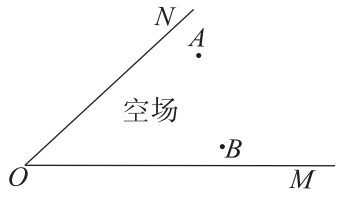


图 1

小明通过分析、作图、证明三个步骤正确地解决了问题, 请你将小明的证明过程补充完整.

**步骤 1 分析:** 若要使得点  $P$  到点  $A, B$  的距离相等, 则只需点  $P$  在线段  $AB$  的垂直平分线上; 若要使得点  $P$  到  $OM, ON$  的距离相等, 则只需点  $P$  在  $\angle MON$  的平分线上.

**步骤 2 作图:** 如图 2, 作  $\angle MON$  的平分线  $OC$ , 线段  $AB$  的垂直平分线  $DE$ ,  $DE$  交  $OC$  于点  $P$ , 则点  $P$  为所求.

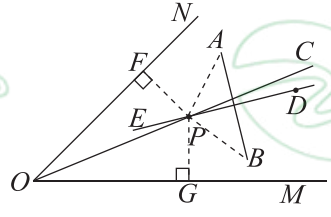


图 2

**步骤 3 证明:** 如图 2, 连接  $PA, PB$ , 过点  $P$  作  $PF \perp ON$  于点  $F, PG \perp OM$  于点  $G$ .

$\because PF \perp ON, PG \perp OM,$

且 \_\_\_\_\_ ① (填写条件),

$\therefore PF = PG$  ( \_\_\_\_\_ ② ) (填写理由).

$\because$  点  $P$  在线段  $AB$  的垂直平分线  $DE$  上,

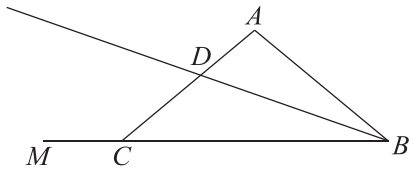
$\therefore PA = PB$  ( \_\_\_\_\_ ③ ) (填写理由).

$\therefore$  点  $P$  为所求作的点.

25. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC, \angle A = 100^\circ$ . 点  $M$  在  $BC$  的延长线上,  $\angle ABC$  的平分线交  $AC$  于点  $D$ .  $\angle MCA$  的平分线与射线  $BD$  交于点  $E$ .

(1) 依题意补全图形: 用尺规作图法作  $\angle MCA$  的平分线;

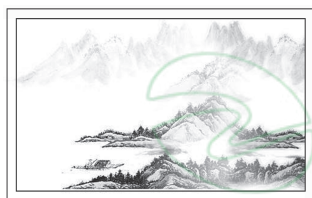
(2) 求  $\angle BEC$  的度数.





列分式方程解应用题.

当矩形(即长方形)的短边为长边的 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 倍时,称这个矩形为黄金矩形.黄金矩形更具美感.下图是某位同学的书画作品,装裱前是一个长为150厘米,宽为82厘米的矩形.现要在作品四周加上等宽的白色边衬装裱.为了使装裱后的作品接近黄金矩形,要求装裱后的矩形宽与长之比等于0.6.边衬的宽度应设置为多少厘米?  
(注: $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$ )



27. 已知:在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB=2\angle B$ .点D与点C关于直线AB对称,连接AD,CD,CD交直线AB于点E.

(1)当 $\angle CAB=60^\circ$ 时,如图1.用等式表示,

AD与AE的数量关系是:\_\_\_\_\_,BE与AE的数量关系是:\_\_\_\_\_;

(2)当 $\angle CAB$ 是锐角( $\angle CAB \neq 60^\circ$ )时,如图2;当 $\angle CAB$ 是钝角时,如图3.

在图2,图3中任选一种情况,

①依题意补全图形;

②用等式表示线段AD,AE,BE之间的数量关系,并证明.

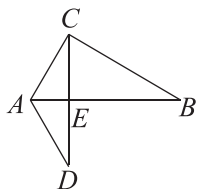


图1

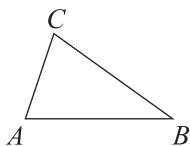


图2

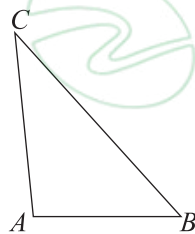


图3



28. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 对于点  $P$  和正方形  $OABC$ , 给出如下定义: 若点  $P$  关于  $y$  轴的对称点  $P'$  到正方形  $OABC$  的边所在直线的最大距离是最小距离的  $k$  倍, 则称点  $P$  是正方形  $OABC$  的“ $k$  倍距离点”.

已知: 点  $A(a, 0), B(a, a)$ .

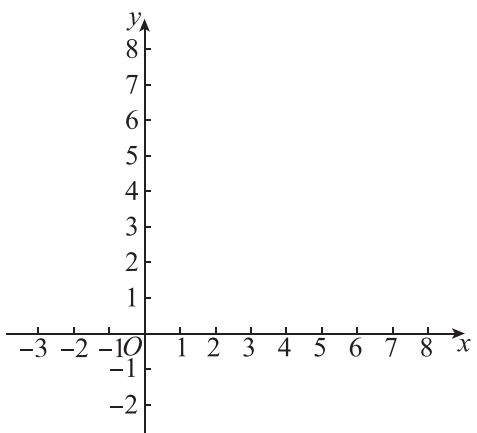
(1) 当  $a=4$  时,

① 点  $C$  的坐标是 \_\_\_\_\_;

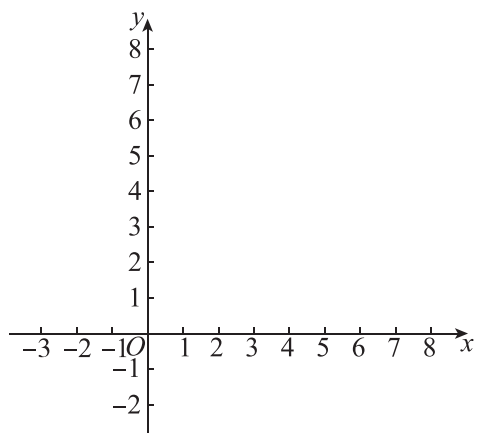
② 在  $P_1(-1, 1), P_2(-2, 2), P_3(2, 2)$  三个点中, \_\_\_\_\_ 是正方形  $OABC$  的“3 倍距离点”;

(2) 当  $a=6$  时, 点  $P(-2, n)$  (其中  $n > 0$ ) 是正方形  $OABC$  的“2 倍距离点”, 求  $n$  的取值范围;

(3) 点  $M(-2, 2), N(-3, 3)$ . 当  $0 < a < 6$  时, 线段  $MN$  上存在正方形  $OABC$  的“2 倍距离点”, 直接写出  $a$  的取值范围.



备用图 1



备用图 2



# 东城区 2022—2023 学年度第一学期期末统一检测

## 初二数学参考答案及评分标准

2023.1

### 一、选择题(本题共 20 分,每小题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	B	A	B	B	B	D	C	C

### 二、填空题(本题共 12 分,每小题 2 分)

11. 0    12.  $2(m+2)(m-2)$

13. 答案不唯一,可以是  $AC=DF, CB//FE, \angle CBA=\angle FED, \angle C=\angle F$

14.  $54^\circ$     15. 13.5    16. ②, (2,2)

### 三、解答题(本题共 68 分,第 17 题 4 分,第 18 题 9 分,第 19—25 题,每小题 5 分,第 26 题 6 分,第 27—28 题,每小题 7 分)解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解:原式  $= 5 + \frac{1}{4} - 1$  ..... 3 分

$= \frac{17}{4}$ . ..... 4 分

18. 解:(1)原式  $= -a^3b^3 \cdot \left(-\frac{c}{3a^3b}\right)$  ..... 4 分

$= \frac{b^2c}{3}$ . ..... 5 分

(2)原式  $= a^2 - 16 - (a^2 - 2a + 1)$  ..... 2 分

$= a^2 - 16 - a^2 + 2a - 1$  ..... 3 分

$= 2a - 17$ . ..... 4 分

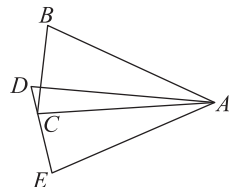
19. 证明:  $\because \angle BAD = \angle CAE,$   
 $\therefore \angle BAC = \angle DAE.$  ..... 1 分

在  $\triangle ABC$  和  $\triangle ADE$  中,

$$\begin{cases} AB=AD, \\ \angle BAC=\angle DAE, \\ AC=AE, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADE(SAS).$  ..... 4 分

$\therefore BC=DE.$  ..... 5 分



20. 解:(1)②; ..... 1 分



$$\begin{aligned} & \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots 2 \text{分} \\ &= \frac{2x-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots 3 \text{分} \\ &= \frac{2x-x-1}{(x+1)(x-1)} \dots\dots\dots 4 \text{分} \\ &= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{x+1} \dots\dots\dots 5 \text{分} \end{aligned}$$

21. 解: 原式 =  $\frac{x+3-6}{x+2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x-3}$  ..... 1分

$$= \frac{x-3}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x-3} \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

$$= x+2. \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

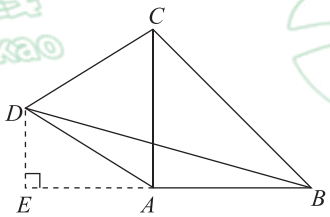
由分式有意义, 得  $x \neq -2$ , 且  $x \neq 3$ ,  
 因此,  $x=2$ . ..... 4分  
 所以, 原式 =  $2+2=4$ . ..... 5分

22. (1) 证明: 在  $\triangle ABC$  中,

- $\because AB=AC,$
- $\therefore \angle CBA=\angle ACB.$  ..... 1分
- $\because \angle CBA=45^\circ,$
- $\therefore \angle CAB=90^\circ.$
- $\therefore AC \perp AB.$  ..... 2分

(2) 解: 过点  $D$  作  $DE \perp BA$  的延长线于点  $E$ .

- 由作图得,  $CD=AC=AD.$
- $\therefore \triangle ADC$  为等边三角形. .... 3分
- $\therefore \angle DAC=60^\circ.$
- $\therefore \angle DAB=\angle DAC + \angle CAB=90^\circ+60^\circ=150^\circ.$
- $\therefore \angle DAE=180^\circ-\angle DAB = 180^\circ-150^\circ=30^\circ.$  ..... 4分



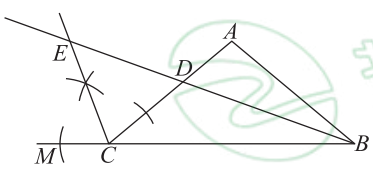
- 在  $Rt\triangle ADE$  中,
- $\because \angle DAE=30^\circ, AD=AC=8,$
- $\therefore DE=4.$
- $\therefore \triangle ABD$  的面积  $S = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16.$  ..... 5分



23. 解: 两边同时乘  $(x-5)(x-1)$ , ..... 1 分  
 得  $(x-5)(x-1) - x(x-5) = 2$ . ..... 2 分  
 解得  $x = 3$ . ..... 3 分  
 检验: 当  $x = 3$  时,  $(x-5)(x-1) \neq 0$ . ..... 4 分  
 所以, 原分式方程的解为  $x = 3$ . ..... 5 分

24. 解: ①点  $P$  在  $\angle MON$  的平分线上; ..... 1 分  
 ②角的平分线上的点到角的两边的距离相等; ..... 3 分  
 ③线段垂直平分线上的点与这条线段两端的距离相等. .... 5 分

25. 解: (1) 如图:



(2)  $\because AB = AC$ ,  
 $\therefore \angle ACB = \angle ABC$ .  
 $\because \angle A = 100^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ACB = \angle ABC = 40^\circ$ . ..... 3 分

$\therefore \angle ACM = 140^\circ$ .  
 $\because BD$  平分  $\angle ABC$ ,  
 $\therefore \angle EBC = \angle ABE = 20^\circ$ .  
 $\because CE$  平分  $\angle ACM$ ,  
 $\therefore \angle ACE = \angle ECM = 70^\circ$ . ..... 4 分

$\therefore \angle ECB = 110^\circ$ .  
 在  $\triangle ECB$  中,  
 $\angle BEC = 180^\circ - (\angle ECB + \angle EBC)$   
 $= 180^\circ - (110^\circ + 20^\circ)$   
 $= 50^\circ$ . ..... 5 分

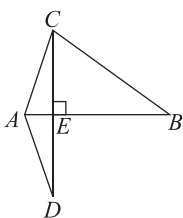
26. 解: 设边衬的宽度为  $x$  厘米, 则装裱后作品的长为  $(150 + 2x)$  厘米, 宽为  $(82 + 2x)$  厘米.  
 根据题意列方程, 得  $\frac{82 + 2x}{150 + 2x} = 0.6$ . ..... 3 分  
 解得  $x = 10$ . ..... 4 分  
 经检验,  $x = 10$  是原分式方程的解, 且符合实际意义. .... 5 分  
 答: 边衬宽度应是 10 厘米. .... 6 分



解：(1)  $AD=2AE, BE=3AE$ . ..... 3分

(2) 选择图 2 时，

① 补全图形，如图，



..... 4分

② 数量关系： $AD=BE-AE$ . ..... 5分

证明：在  $EB$  上取点  $F$ ，使  $FE=AE$ ，连接  $CF$ 。

∵ 点  $C$  与点  $D$  关于直线  $AB$  对称，

∴  $CD \perp AB, CE=DE$ .

∴  $AD=AC, AC=FC$ .

∴  $AD=FC, \angle CFA=\angle CAB$ . ..... 6分

∵  $\angle CAB=2\angle B$ ,

∴  $\angle CFA=2\angle B$ .

∵  $\angle CFA=\angle B+\angle BCF$ ,

∴  $\angle BCF=\angle B$ .

∴  $FC=FB$ .

∴  $FB=AD$ .

∵  $FB=BE-EF$ ,

∴  $AD=BE-AE$ . ..... 7分

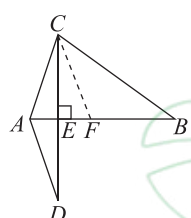
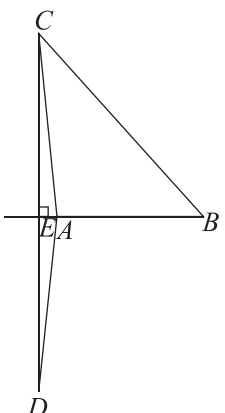


图 2

选择图 3 时，

① 补全图形，如图，



..... 4分





②数量关系:  $AD=BE+AE$ . ..... 5分

证明: 在  $BE$  的延长线上取点  $F$ , 使  $FE=AE$ , 连接  $FC$ .

$\because$  点  $C$  与点  $D$  关于直线  $AB$  对称,

$\therefore CD \perp AB, CE=DE$ .

$\therefore AD=AC, AC=FC$ .

$\therefore AD=FC, \angle CFA=\angle CAF$ . ..... 6分

$\because \angle CAF + \angle BAC = 180^\circ,$

$\therefore \angle CFA + \angle BAC = 180^\circ.$

$\because \angle BAC = 2\angle B,$

$\therefore \angle CFA + 2\angle B = 180^\circ.$

$\because \angle CFA + \angle B + \angle BCF = 180^\circ,$

$\therefore \angle BCF = \angle B.$

$\therefore FC = FB.$

$\therefore FB = AD.$

$\because FB = BE + FE,$

$\therefore AD = BE + AE$ . ..... 7分

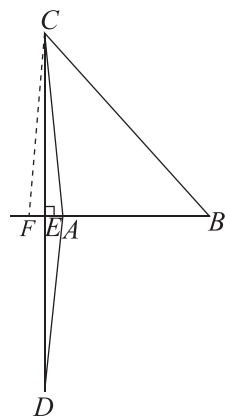


图 3

28. 解: (1) ①  $(0, 4)$ ; ②  $P_1, P_3$ ; ..... 3分

(2) 由题意可知点  $P$  在直线  $x = -2$  上, 且位于  $x$  轴上方,

则点  $P'$  在直线  $x = 2$  上, 且位于  $x$  轴上方.

当  $a = 6$  时,  $A(6, 0), B(6, 6), C(0, 6)$ , 点  $P'$  到直线  $OC$  的距离是 2, 到直线  $AB$  的距离是 4.

记点  $P'$  到直线  $OA$  的距离为  $d_{OA}$ , 到直线  $BC$  的距离为  $d_{BC}$ .

i. 当  $0 < n < 2$  时, 点  $P'$  在线段  $DE$  上 (不含端点),

$$\therefore \begin{cases} 0 < d_{OA} < 2, \\ 4 < d_{BC} < 6. \end{cases}$$

$\therefore$  点  $P'$  到正方形  $OABC$  的边所在直线的最大距离是  $d_{BC}$ ,

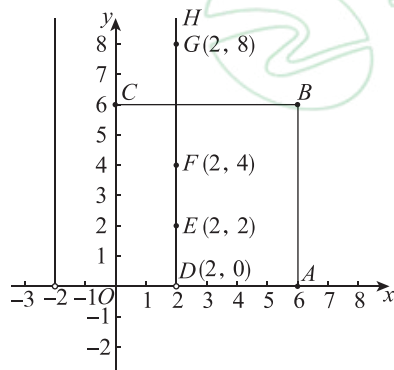
最小距离是  $d_{OA}$ .

$\therefore k > 2$ , 不符合题意;

$$\text{ii. 当 } 2 \leq n \leq 4 \text{ 时, 点 } P' \text{ 在线段 } EF \text{ 上, } \therefore \begin{cases} 2 \leq d_{OA} \leq 4, \\ 2 \leq d_{BC} \leq 4. \end{cases}$$

$\therefore$  点  $P'$  到正方形  $OABC$  的边所在直线的最大距离是 4, 最小距离是 2.

$\therefore k = 2$ , 符合题意;





ii. 当  $2 < n < 8$  时, 点  $P'$  在线段  $FG$  (不包含端点) 上,

$$\begin{cases} d_{OA} < 8, \\ \dots \\ 0 < d_{BC} < 2. \end{cases}$$

$\therefore$  点  $P'$  到正方形  $OABC$  的边所在直线的最大距离是  $d_{OA}$ , 最小距离是  $d_{BC}$ .

$\therefore k > 2$ , 不符合题意;

iv. 当  $n \geq 8$  时, 即点  $P'$  在射线  $GH$  上,

$$\begin{cases} d_{OA} \geq 8, \\ \dots \\ d_{OA} > d_{BC}. \end{cases}$$

$\therefore$  点  $P'$  到正方形  $OABC$  的边所在直线的最大距离是  $d_{OA}$ , 最小距离是 2.

$\therefore k \geq 4$ , 不符合题意.

综上所述,  $n$  的取值范围是  $2 \leq n \leq 4$ . ..... 5 分

(3)  $1 \leq a \leq \frac{3}{2}$  或  $3 \leq a \leq \frac{9}{2}$ . ..... 7 分

