2023 北京海淀高三（上）期中

数　　学

2023.11

本试卷共 6 页，150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回.

第一部分(选择题共 40 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知集合 $A=\{x|x<2\}$，$B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=$

(A) $(-\infty,2)$　　(B) $(-\infty,2]$

(C) $\{1\}$　　(D) $\{1,2\}$

(2)若复数 z 满足 $z\cdot \mathrm{i}=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $z=$

(A) $-1-\mathrm{i}$　　(B) $-1+\mathrm{i}$

(C) $1-\mathrm{i}$　　(D) $1+\mathrm{i}$

(3)下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y=\ln x$　　(B) $y=x^3$

(C) $y=|\tan x|$　　(D) $y=2^{|x|}$

(4)已知向量 a，b 满足 $a=(2,1)$，$a-b=(-1,2)$，则 $a\cdot b=$

(A)-5　　(B)0

(C)5　　(D)7

(5)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=15$，则 $a_2\cdot a_4$ 的最大值为

(A) $\dfrac{9}{4}$　　(B)3

(C)9　　(D)36

(6)设 $a=\log_4 6$，$b=\log_2 3$，$c=\dfrac{3}{2}$，则

(A) $a>b>c$　　(B) $c>b>a$

(C) $b>a>c$　　(D) $b>c>a$

(7)“$\sin\theta+\tan\theta>0$”是“θ 为第一或第三象限角”的

(A)充分而不必要条件　　(B)必要而不充分条件

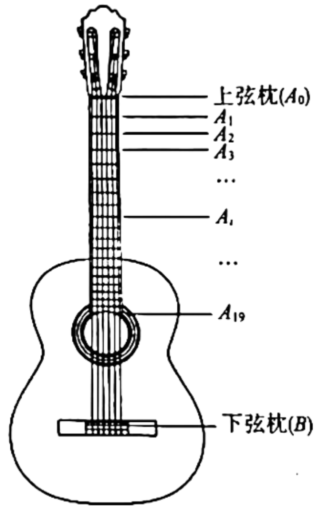
(C)充分必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(8)在 ΔABC 中，$\sin B=\sin 2A$，$c=2a$，则|

(A) $\angle B$ 为直角　　(B) $\angle B$ 为钝角

(C) $\angle C$ 为直角　　(D) $\angle C$ 为钝角

(9)古典吉他的示意图如图所示. A_0，B 分别是上弦枕、下弦枕，$A_i(i=1,2\cdots,19)$ 是第 i 品丝.记 a_i 为 A_i 与 A_i-1 的距离，L_i 为 A_i 与 A_0 的距离，且满足 $a_i=\dfrac{X_L-L_{i-1}}{M}$，$i$=1，2，…，19，其中 X_L 为弦长(A_0 与 B 的距离)，M 为大于 1 的常数，并规定 $L_0=0$.则



(A)数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 是等差数列，且公差为 $-\dfrac{X_L}{M^2}$

(B)数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\dfrac{M-1}{M}$

(C)数列 $L_1,L_2,\cdots,L_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\dfrac{2M-1}{M}$

(D)数列 $L_1,L_2,\cdots,L_{19}$ 是等差数列，且公差为 $\dfrac{(M-1)X_L}{M^2}$

(10)在等腰直角三角形 ABC 中，AB=2，M 为斜边 BC 的中点，以 M 为圆心，MA 为半径作 $\overset{\frown}{AC}$，点 P 在线段 BC 上，点 Q 在 $\overset{\frown}{AC}$ 上，则 $\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{MQ}\right|$ 的取值范围是

(A) $[0,\sqrt{10}]$　　(B) $[0,2+\sqrt{2}]$

(C) $[2-\sqrt{2},\sqrt{10}]$　　(D) $[2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$

第二部分(非选择题共 110 分)

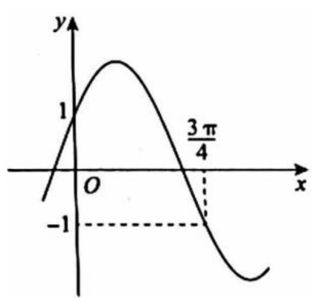
二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)函数 $f\left(x\right)=\lg\left(x+1\right)+\dfrac{1}{x}$ 的定义域是________.

(12)在平面直角坐标系 xOy 中，角 a 以 Ox 为始边，终边经过点 $P(1,-2)$，则 $\tan 2\alpha=$________.

(13)已知非零向量 $a=x\left(e_1+e_2\right)$，$b=e_1+ye_2$，其中 e_1，e_2 是一组不共线的向量.能使得 a 与 b 的方向相反的一组实数 x，y 的值为 x=_____，y=_____.

(14)已知函数 $f\left(x\right)=2\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的部分图象如图所示.



①函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期为__________；

②将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $t\left(t>0\right)$ 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象.若函数 $g\left(x\right)$ 为奇函数，则 t 的最小值是__________.

(15)已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x}+a,x<a,\\x^{2}+2ax,x\geq a.\end{cases}$ 给出下列四个结论:

①当 a=0 时， $f\left(x\right)$ 的最小值为 0；

②当 $a\leq\dfrac{1}{3}$ 时， $f\left(x\right)$ 存在最小值;

③记 $f\left(x\right)$ 的零点个数为 $g\left(a\right)$，则函数 $g\left(a\right)$ 的值域为 $\{0,1,2,3\}$；

④当 $a\geq1$ 时，对任意 $x_1,x_2\in R$， $f(x_1)+f\left(x_2\right)\geq2f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$

其中所有正确结论的序号是____________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 14 分)

已知无穷等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 的各项均为整数，其前 n 项和为 S_n， $a_2=3$， $a_1+a_3=10$.

(I)求 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

(II)证明：对 $\forall k\in\mathrm{N}^*,3S_k,2S_{k+1},S_{k+2}$ 这三个数成等差数列.

(17)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x)=2\cos x\cdot\cos(x+\varphi)(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数 $f\left(x\right)$ 存在.

(I)求 φ 的值；

(II)求 $f\left(x\right)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 上的最大值和最小值.

条件①: $f(\dfrac{\pi}{3})=1$；

条件②：函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{4}]$ 上是增函数；

条件③： $\forall x\in R,f(x)\geq f(\dfrac{2\pi}{3})$

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(18)(本小题 14 分)

已知曲线 $C:y=4-x^2$ 与 x 轴交于不同的两点 A，B(点 A 在点 B 的左侧)，点 $P(t,0)$ 在线段 AB 上(不与端点重合)，过点 P 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 Q.

(I)若 ΔAPQ 为等腰直角三角形，求 ΔAPQ 的面积；

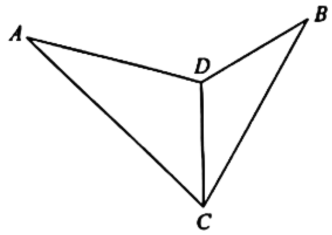
(D)记 ΔAPQ 的面积为 $S\left(t\right)$，求 $S\left(t\right)$ 的最大值.

(19)(本小题 14 分)

某景区有一人工湖，湖面有 A，B 两点，湖边架有直线型栈道 CD，长为 50m，如图所示.现要测量 A，B 两点之间的距离，工作人员分别在 C，D 两点进行测量，在 C 点测得 $\angle ACD = 45°$， $\angle BCD = 30°$;在 D 点测得 $\angle ADB = 135°$， $\angle BDC = 120°$.(A，B，C，D 在同一平面内)

(I)求 A，B 两点之间的距离；

(n)判断直线 CD 与直线 AB 是否垂直，并说明理由.



(20)(本小题 14 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}+a}{x^2+b}$，且 $f\left(1\right)=\dfrac{1}{4}$， $f\left(4\right)=\dfrac{2}{19}$

(I)求 a，b 的值；

(II)求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(III)设实数 m 满足：存在 $k \in R$，使直线 $y=kx+m$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线，且 $kx+m \geq f\left(x\right)$ 对 $x \in [0,+\infty)$ 恒成立，求 m 的最大值.

(21)(本小题 15 分)

设无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 S_n，$\left\{i_n\right\}$ 为单调递增的无穷正整数数列，记 $A_n = S_{i_{n+1}} - S_{i_n} (n=1,2,\ldots)$，定义 $\Omega = \left\{ j \in \mathrm{N}^* \middle| S_k - S_j \geq 0, k=j+1, j+2, \cdots \right\}$.

(I)若 $a_n = n$，$i_n = n^2 (n=1,2,\cdots)$，写出 A_1，A_2 的值；

(II)若 $a_n = (-\dfrac{1}{2})^{n-1} (n=1,2,\ldots)$，求 Ω；

(III)设 $\operatorname{sgn}\left(x\right)=\begin{cases} 1, x>0, \\ 0, x=0, \\ -1, x<0. \end{cases}$ 求证：对任意的无穷数列 $\left\{a_n\right\}$，存在数列 $\left\{i_n\right\}$，使得 $\left\{\operatorname{sgn}(A_n)\right\}$ 为常数列.

海淀区 2023—2024 学年第一学期期中练习

高三数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B	（2）A	（3）D	（4）C	（5）C
（6）D	（7）C	（8）C	（9）B	（10）A

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

（11）$(-1,0)\cup(0,+\infty)$　　（12）$\dfrac{4}{3}$

（13）-1　1（答案不唯一）　　（14）$\dfrac{3}{2}\pi$　$\dfrac{\pi}{8}$

（15）①③

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

（16）（共 14 分）

解：（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为q.

因为$a_2=3$，$a_1+a_3=10$，

所以$a_1\cdot q=3$，$a_1+a_1\cdot q^2=10$.

所以$\begin{cases}q=3,\\a_1=1,\end{cases}$或$\begin{cases}q=\dfrac{1}{3},\\a_1=9.\end{cases}$

因为a_n均为整数，

所以$\begin{cases}q=3,\\a_1=1.\end{cases}$

所以$a_n=3^{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots)$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$S_n=\dfrac{3^n-1}{2}\ (n=1,2,3,\cdots)$.

所以$2S_{k+1}-3S_k=2\cdot\dfrac{3^{k+1}-1}{2}-3\cdot\dfrac{3^k-1}{2}=\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$，

$S_{k+2}-2S_{k+1}=\dfrac{3^{k+2}-1}{2}-2\cdot\dfrac{3^{k+1}-1}{2}=\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$.

所以 $2S_{k+1}-3S_k=S_{k+2}-2S_{k+1}=\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$.

所以 $3S_k$， $2S_{k+1}$， S_{k+2} 是以 $\dfrac{1+3^{k+1}}{2}$ 为公差的等差数列.

（17）（共 14 分）

解：选择条件①： $f(\dfrac{\pi}{3})=1$.

（Ⅰ）因为 $f(x)=2\cos x\cdot\cos(x+\varphi)$，

所以 $2\cos\dfrac{\pi}{3}\cdot\cos(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=1$，即 $\cos(\dfrac{\pi}{3}+\varphi)=1$.

所以 $\varphi=2k\pi-\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得：

$$\begin{aligned} f(x)&=2\cos x\cdot\cos(x-\frac{\pi}{3})\\ &=2\cos x(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x)\\ &=\frac{1}{2}\cdot 2\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\\ &=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\\ &=\cos(2x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

因为 $x\in[-\dfrac{\pi}{2},0]$，所以 $-\dfrac{4\pi}{3}\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant-\dfrac{\pi}{3}$.

所以当 $2x-\dfrac{\pi}{3}=-\pi$，即 $x=-\dfrac{\pi}{3}$ 时， $\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 取得最小值 -1.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 上的最小值是 $-\dfrac{1}{2}$；

当 $2x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 时， $\cos(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 取得最大值 $\dfrac{1}{2}$.

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\dfrac{\pi}{2},0]$ 上的最大值是 1.

选择条件③：$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\ge f(\frac{2\pi}{3})$.

（Ⅰ）由题意得：$f(x)=2\cos x\cdot\cos(x+\varphi)$

$$=2\cos x(\cos x\cdot\cos\varphi-\sin x\cdot\sin\varphi)$$

$$=2\cos^2 x\cdot\cos\varphi-\sin 2x\cdot\sin\varphi$$

$$=\cos 2x\cdot\cos\varphi-\sin 2x\cdot\sin\varphi+\cos\varphi$$

$$=\cos(2x+\varphi)+\cos\varphi.$$

因为$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\ge f(\frac{2\pi}{3})$，

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\frac{2\pi}{3})$，即$\cos(\frac{4\pi}{3}+\varphi)=-1$.

所以$\varphi=(2k+1)\pi-\frac{4\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）同选择条件①的（Ⅱ）.

（18）（共 12 分）

解：（Ⅰ）由题意令$4-x^2=0$得$x=\pm 2$．所以$A(-2,0)$，$B(2,0)$.

因为点$P(t,0)$在线段AB上（不与端点重合），

所以$-2<t<2$.

因为$\triangle APQ$为等腰直角三角形，

所以$|PQ|=|AP|$.

由题意可知点Q在x轴上方，

所以$Q(t,t+2)$.

因为点Q在曲线C上，

所以$t+2=4-t^2$.

所以$t_1=-2$（舍），$t_2=1$，即$Q(1,3)$.

所以$\triangle APQ$的面积为$\frac{1}{2}|AP||PQ|=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$.

（Ⅱ）由题意可知 $Q(t, 4-t^2)$，$-2<t<2$.

所以 $S(t)=\frac{1}{2}(t+2)(4-t^2)=\frac{1}{2}(-t^3-2t^2+4t+8)$.

所以 $S'(t)=\frac{1}{2}(-3t^2-4t+4)$.

令 $-3t^2-4t+4=0$，得 $t_1=-2$，$t_2=\frac{2}{3}$.

$S(t)$ 与 $S'(t)$ 在区间 $(-2,2)$ 上的情况如下：

t	$(-2,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},2)$
$S'(t)$	+	0	−
$S(t)$	↗	极大值	↘

因为 $S(\frac{2}{3})=\frac{128}{27}$，

所以当 $t=\frac{2}{3}$ 时，$S(t)$ 取得最大值 $\frac{128}{27}$.

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）连接 AB .因为 $\angle ADB=135°$，$\angle BDC=120°$，

所以 $\angle ADC=105°$.

因为 $\angle ACD=45°$，

所以 $\angle CAD=30°$.

在 $\triangle ACD$ 中，$\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}$.

所以 $AD=\sqrt{2}CD$.

因为 $\angle BCD=30°$，

所以 $\angle DBC=30°$.

所以 $BD=CD$.

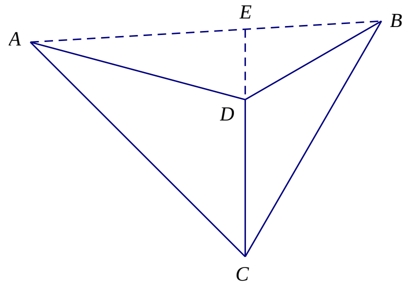
在 $\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos135°$

$=5CD^2$.

因为 $CD=50$，

所以 $AB=\sqrt{5}CD=50\sqrt{5}$，即 A，B 两点之间的距离为 $50\sqrt{5}$ m．

（Ⅱ）CD 与 AB 不垂直．理由如下：



延长 CD 交 AB 于点 E．

在 $\triangle ABD$ 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ADB}=\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}$．

所以 $\sin\angle ABD=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<\dfrac{1}{2}$．

因为 $0^\circ<\angle ABD<90^\circ$，

所以 $\angle ABD<30^\circ$．

所以 $\angle BEC=180^\circ-\angle CBE-\angle BCD>90^\circ$．

所以直线 CD 与直线 AB 不垂直．

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f(4)=\dfrac{2}{19}$，

所以 $\begin{cases}\dfrac{a+1}{b+1}=\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{a+2}{b+16}=\dfrac{2}{19},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\ b=3.\end{cases}$

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}$．

所以 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x^2+3)-\sqrt{x}\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$=\dfrac{3(1-x^2)}{2\sqrt{x}(x^2+3)^2}$．

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$．

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$．

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$；单调递减区间是 $(1,+\infty)$．

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{4}$．

①当 $m=\dfrac{1}{4}$ 时，存在直线 $y=\dfrac{1}{4}$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,\dfrac{1}{4})$ 处的切线，且 $f(x)\le\dfrac{1}{4}$

对 $x\in[0,+\infty)$ 恒成立，符合题意.

②当 $m>\frac{1}{4}$ 时，设直线 $y=kx+m$ 为曲线 $y=f(x)$ 的切线，切点为 (x_0,y_0)，则

$$\begin{cases} x_0>0, \\ y_0\le\frac{1}{4}. \end{cases}$$

所以 $k=\frac{y_0-m}{x_0}<0$.

取 $x_1=-\frac{m}{k}$，则 $x_1>0$.

因为 $f(x_1)=\frac{\sqrt{x_1}}{x_1^2+3}>0$， $kx_1+m=0$，

所以 $kx_1+m<f(x_1)$，即存在 $x_1\in(0,+\infty)$， $kx_1+m<f(x_1)$，不符合题意.

综上可知， m 的最大值是 $\frac{1}{4}$.

（21）（共 15 分）

解：（Ⅰ） $A_1=9$，$A_2=35$.

（Ⅱ）由题意知 $S_n=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times(-\frac{1}{2})^n$.

①若 j 为奇数，则 $S_{j+1}-S_j=a_{j+1}=(-\frac{1}{2})^j<0$.

所以 $j\notin\Omega$.

②若 j 为偶数，则当 $k=j+1,j+2,\cdots$ 时，

$$S_k-S_j=\frac{2}{3}\times[(-\frac{1}{2})^j-(-\frac{1}{2})^k]\ge\frac{2}{3}\times[(\frac{1}{2})^j-(\frac{1}{2})^k]>0.$$

所以 $j\in\Omega$.

所以 $\Omega=\{x\,|\,x=2m,m=1,2,\cdots\}$.

（Ⅲ）（1）若 Ω 为有限集，设其最大元素为 m （若 Ω 为空集，取 $m=0$），则当 $j=m+1,m+2,\cdots$ 时，存在 $k>j$ 满足 $S_k-S_j<0$.

令 $i_1=m+1$， $i_{n+1}=\min\{k\in\mathbf{N}^*\,|\,k>i_n,S_k-S_{i_n}<0\}$ （ $n=1,2,\cdots$ ）， 则

$A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}<0$. 所以 $\mathrm{sgn}(A_n)=-1$（$n=1,2,\cdots$）;

（2）若Ω为无限集，设$\Omega=\{j_1,j_2,\cdots\}$，其中 $j_1<j_2<\cdots$，记 $B_n=S_{j_{n+1}}-S_{j_n}$，

则 $B_n\ge 0$（$n=1,2,\cdots$）.

①若数列$\{B_n\}$中只有有限项为正数，记 $m=\max\{n\in\mathbf{N}^*\mid B_n>0\}$（若$\{B_n\}$中没有正数项，取 $m=0$），则 $B_{m+n}=0$（$n=1,2,\cdots$）.

令 $i_n=j_{m+n}$（$n=1,2,\cdots$），则 $A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}=B_{m+n}=0$（$n=1,2,\cdots$）.

所以 $\mathrm{sgn}(A_n)=0$（$n=1,2,\cdots$）;

②若数列$\{B_n\}$中有无穷项为正数，将这些项依次记为 $B_{t_1},B_{t_2},\cdots$，其中 $t_1<t_2<\cdots$，则 $B_{t_n}=S_{j_{t_n+1}}-S_{j_{t_n}}>0$（$n=1,2,\cdots$）.

令 $i_n=j_{t_n}$（$n=1,2,\cdots$），则 $A_n=S_{j_{t_{n+1}}}-S_{j_{t_n}}=B_{t_n}+B_{t_n+1}+\cdots+B_{t_{n+1}-1}=B_{t_n}>0$.

所以 $\mathrm{sgn}(A_n)=1$（$n=1,2,\cdots$）.

综上所述，对任意的无穷数列$\{a_n\}$都存在数列$\{i_n\}$，使得$\{\mathrm{sgn}(A_n)\}$为常数列.