2023 北京北京中学高二 12 月月考

数　　学

本试卷共 4 页，满分 150 分.考试时长 120 分钟.考生务必将条形码贴在答题卡规定处，并将答案写在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将答题卡交回.

一.选择题（共 10 个小题，每个小题 4 分，共 40 分）.

1. 已知集合 $A=\{x|x<2\},B=\{1,2\}$，则 $A\cup B=$（　）

A. $(-\infty,2)$　　B. $(-\infty,2]$　　C. $\{1\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=x$，则 C 的离心率为（　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

3. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是（　）

A. $y=\ln x$　　B. $y=x^3$　　C. $y=|\tan x|$　　D. $y=2^{|x|}$

4. 已知平面 $\alpha\cap\beta=l$，m 是 α 内不同于 l 的直线，那么下列命题中错误的是（　）

A. 若 $m//\beta$，则 $m//l$　　B. 若 $m//l$，则 $m//\beta$

C. 若 $m\perp\beta$，则 $m\perp l$　　D. 若 $m\perp l$，则 $m\perp\beta$

5. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_5=15$，则 $a_2\cdot a_4$ 的最大值为（　）

A. $\frac{9}{4}$　　B. 3　　C. 9　　D. 36

6. 已知曲线 $f(x)=\ln x$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线经过点(0，－1)，则 x_0 的值为(　　)

A. $\frac{1}{\mathrm{e}}$　　B. 1

C. e　　D. 10

7. 已知点 $A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，$C\left(0,\frac{1}{4}\right)$，则“$\triangle ABC$ 是等边三角形”是“直线 AB 的斜率为 0”的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

8. 抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，点 $P(x,y)$ 为该抛物线上的动点，又点 $A(-1,0)$，则 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值是

（　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

9. 古典吉他的示意图如图所示．A_0, B 分别是上弦枕、下弦枕，$A_i(i=1,2,\cdots,19)$ 是第 i 品丝．记 a_i 为 A_i 与 A_{i-1} 的距离，L_i 为 A_i 与 A_0 的距离，且满足 $a_i=\dfrac{X_L-L_{i-1}}{M}, i=1,2,\cdots,19$，其中 X_L 为弦长（A_0 与 B 的距离），M 为大于 1 的常数，并规定 $L_0=0$．则（　）

A. 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{19}$ 是等差数列，且公差为 $-\dfrac{X_L}{M^2}$

B. 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\dfrac{M-1}{M}$

C. 数列 $L_1, L_2, \cdots, L_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\dfrac{2M-1}{M}$

D. 数列 $L_1, L_2, \cdots, L_{19}$ 是等差数列，且公差为 $\dfrac{(M-1)X_L}{M^2}$

10. 已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，左、右焦点分别为 F_1，F_2．以线段 A_1A_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 M，且点 M 在第一象限，A_2M 与另一条渐近线平行．若 $|F_1M|=\sqrt{21}$，则 $\triangle MA_2F_2$ 的面积是（　）

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　　B. $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$

二.填空题，每个小题 5 分，共 25 分.

11. 已知直线 $l_1: ax+(a+2)y+1=0$，$l_2: x+ay+2=0$．若 $l_1 \perp l_2$，则实数 a 的值是_______.

12. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$a_2=-2$，$a_3=4$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$________；数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和 S_9 的值为__________.

13.（2017 新课标全国 II 理科）等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_3=3$，$S_4=10$，则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=$____________.

14. 已知直线l：$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$与圆$x^2+y^2=12$交于A，B两点，过A，B分别作l的垂线与x轴交于C，D两点，若$|AB|=2\sqrt{3}$，则$|CD|=$__________.

15. 已知四棱锥$P-ABCD$的高为1，$\triangle PAB$和$\triangle PCD$均是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，给出下列四个结论：

①四棱锥$P-ABCD$可能为正四棱锥；

②空间中一定存在到P，A，B，C，D距离都相等的点；

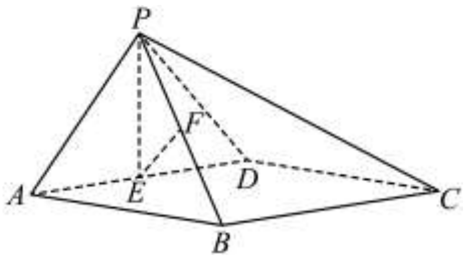
③可能有平面$PAD\perp$平面$ABCD$；

④四棱锥$P-ABCD$的体积的取值范围是$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三.解答题，共6个小题，共85分.

16. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为矩形，平面$PAD\perp$平面$ABCD$，$PA\perp PD$，$PA=PD$，E、F分别为AD、PB的中点.



（I）求证：$PE\perp BC$；

（II）求证：平面$PAB\perp$平面PCD；

（III）求证：$EF//$平面PCD.

17. 已知曲线$C:y=4-x^2$与x轴交于不同的两点A,B（点A在点B的左侧），点$P(t,0)$在线段AB上（不与端点重合），过点P作x轴的垂线交曲线C于点Q.

（1）若$\triangle APQ$为等腰直角三角形，求$\triangle APQ$的面积；

（2）记$\triangle APQ$的面积为$S(t)$，求$S(t)$的最大值.

18. 已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$的离心率是$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）已知F_1，F_2分别是椭圆C的左、右焦点，过F_2作斜率为k的直线l，交椭圆C于A,B两点，直线F_1A，F_1B分别交y轴于不同的两点M,N.如果$\angle MF_1N$为锐角，求k的取值范围.

19. 已知函数$f(x)=\frac{\sqrt{x}+a}{x^2+b}$，且$f(1)=\frac{1}{4},f(4)=\frac{2}{19}$.

（1）求a,b的值；

（2）求 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

（3）设实数 m 满足：存在 $k\in\mathbf{R}$，使直线 $y=kx+m$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的切线，且 $kx+m\geq f\left(x\right)$ 对 $x\in\left[0,+\infty\right)$ 恒成立，求 m 的最大值．

20. 已知椭圆 W：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的焦距为 4，短轴长为 2，O 为坐标原点．

（1）求椭圆 W 的方程；

（2）设 A，B，C 是椭圆 W 上的三个点，判断四边形 $OABC$ 能否为矩形？并说明理由．

21. 设无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 的前 n 项和为 $S_n,\left\{i_n\right\}$ 为单调递增的无穷正整数数列，记 $A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}$，$\left(n=1,2,\cdots\right)$，定义 $\Omega=\left\{j\in\mathbf{N}^*\middle|S_k-S_j\geq 0,k=j+1,j+2,\cdots\right\}$．

（1）若 $a_n=n,i_n=n^2\left(n=1,2,\cdots\right)$，写出 A_1,A_2 的值；

（2）若 $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(n=1,2,\cdots\right)$，求 Ω；

（3）设 $\operatorname{sgn}\left(x\right)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 求证：对任意的无穷数列 $\left\{a_n\right\}$，存在数列 $\left\{i_n\right\}$，使得 $\left\{\operatorname{sgn}\left(A_n\right)\right\}$ 为常数列．

参考答案

一.选择题（共 10 个小题，每个小题 4 分，共 40 分）.

1.【答案】B

【分析】根据并集的运算即可求解.

【详解】A 集合包含所有小于 2 的实数，B 包含 1 和 2 两个元素，所以 $A\cup B=\{x|x\le 2\}$，

故选：B.

2.【答案】A

【分析】根据渐近线确定 $a=b$，再计算离心率即可.

【详解】双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=x$，故 $a=b$，

双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{2}$.

故选：A

3.【答案】D

【分析】A 选项，$y=\ln x$ 定义域不关于原点对称，不是偶函数；B 选项，$f(x)=x^3$ 为奇函数；C 选项，根据 $g(\pi)=g(2\pi)=0$ 得到 C 不满足在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；D 选项，判断出函数为偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

【详解】A 选项，$y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，定义域不关于原点对称，故不是偶函数，A 错误；

B 选项，$f(x)=x^3$ 的定义域为 R，且 $f(-x)=-x^3=-f(x)$，故 $f(x)=x^3$ 为奇函数，B 错误；

C 选项，设 $g(x)=|\tan x|$，因为 $g(\pi)=|\tan\pi|=0, g(2\pi)=|\tan 2\pi|=0$，

故 $y=|\tan x|$ 在 $(0,+\infty)$ 上不单调递增，C 错误；

D 选项，$h(x)=2^{|x|}$ 的定义域为 R，且 $h(-x)=2^{|-x|}=2^{|x|}=h(x)$，故 $h(x)=2^{|x|}$ 为偶函数，

又当 $x>0$ 时，$h(x)=2^x$，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故满足要求，D 正确.

故选：D

4.【答案】D

【分析】A 选项. 由线面平行的性质可判断；B 选项. 由线面平行的判定可判断；C 选项. 由线面垂直的性质可判断 D 选项. 由线面垂直的判定定理可判断.

【详解】A 选项：$m//\beta$,由 $\alpha\cap\beta=l$，又 $m\subset\alpha$，则由线面平行的性质可得 $m//l$，故 A 正确.

B 选项：$m//l$，由 $\alpha\cap\beta=l$，$m\not\subset\beta, l\subset\beta$，由线面平行的判定可得 $m//\beta$，故 B 正确.

C 选项：由 $\alpha\cap\beta=l$，则 $l\subset\beta$，又 $m\perp\beta$，所以 $m\perp l$，故 C 正确.

D 选项：因为一条直线垂直于平面内的一条直线不能推出直线垂直于平面，故 D 错误.

故选：D

5.【答案】C

【分析】先求得a_3的关系式，然后利用基本不等式求得正确答案.

【详解】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，则$S_5=5a_1+10d=15, a_1+2d=3$，

也即$a_3=3$，所以$a_2\cdot a_4\le\left(\frac{a_2+a_4}{2}\right)^2=a_3^2=9$，

当且仅当$a_2=a_4=3$时等号成立.

故选：C

6.【答案】B

【分析】根据导数的几何意义知，切线的斜率$k=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，又因为切线经过点(0，−1)，则$\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0+1}{x_0-0}$，即可求出$x_0$的值.

【详解】因为$f(x)=\ln x$，所以$f'(x)=\frac{1}{x}$，

所以切线的斜率$k=f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，因为切线经过点(0，−1)，

所以$\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0+1}{x_0-0}$，所以$\ln x_0=0$，则$x_0=1$.

故选：B.

7.【答案】A

【分析】根据三个点的坐标可知，点A, B在抛物线$x^2=y$上，C为抛物线的焦点，利用抛物线的定义，结合充分不必要条件的定义可得结果.

【详解】由$A(x_1, x_1^2)$，$B(x_2, x_2^2)$，$C\left(0, \frac{1}{4}\right)$可知，点$A, B$在抛物线$x^2=y$上，$C$为抛物线的焦点，

若$\triangle ABC$是等边三角形，则$|AC|=|BC|$，根据抛物线的定义可知，A, B两点到准线的距离相等，所以直线AB与x轴平行，其斜率为0，

若直线AB的斜率为0，则A, B两点到准线的距离相等，则$|AC|=|BC|$，只能得到$\triangle ABC$是等腰三角形，不能推出$\triangle ABC$是等边三角形，

所以“$\triangle ABC$是等边三角形”是“直线AB的斜率为0”的充分不必要条件.

故选：A

【点睛】关键点点睛：利用抛物线的定义以及充分不必要条件的定义求解是解题关键.

8.【答案】B

【分析】根据给定条件，利用抛物线定义及两点间距离公式列式，再借助均值不等式求解作答.

【详解】抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 $x=-1$， $A(-1,0)$，则 $|PF|=x+1$， $x\geq 0$，

$$\frac{|PF|}{|PA|}=\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}=\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+4x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x}{(x+1)^2}}}$$，当 $x=0$ 时，$\frac{|PF|}{|PA|}=1$，

当 $x>0$ 时，$\frac{|PF|}{|PA|}\geq\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4x}{(2\sqrt{x\cdot 1})^2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，而 $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$，

所以 $\frac{|PF|}{|PA|}$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：B

9.【答案】B

【分析】根据项与前 n 项和的关系结合条件可得 $a_{i+1}=\frac{M-1}{M}a_i$，根据等比数列的概念进而判断 AB，结合条件可得 $L_{i-1}=X_L-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}$，进而判断 CD.

【详解】因为 $a_i=\frac{X_L-L_{i-1}}{M},i=1,2,\cdots,19$， $L_0=0$，

所以 $a_1=\frac{X_L}{M}$， $a_{i+1}=\frac{X_L-L_i}{M}$，

所以 $a_{i+1}-a_i=\frac{X_L-L_i}{M}-\frac{X_L-L_{i-1}}{M}=\frac{-(L_i-L_{i-1})}{M}=-\frac{a_i}{M}$，

即 $a_{i+1}=a_i-\frac{a_i}{M}=\frac{M-1}{M}a_i$，又 M 为大于 1 的常数，

所以 $\frac{a_{i+1}}{a_i}=\frac{M-1}{M}$，即数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{19}$ 是等比数列，且公比为 $\frac{M-1}{M}$，故 A 错误，B 正确；

由上可知 $a_i=\frac{X_L}{M}\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}$，又 $a_i=\frac{X_L-L_{i-1}}{M},i=1,2,\cdots,19$，

所以 $L_{i-1}=X_L-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}$， $L_i=X_L-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^i$，

所以 $\frac{L_i}{L_{i-1}}=\frac{1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^i}{1-\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}},i=2,3,\cdots,19$ 不是常数，故 C 错误；

所以 $L_i-L_{i-1}=X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^{i-1}-X_L\left(\frac{M-1}{M}\right)^i,i=2,3,\cdots,19$，不是常数，故 D 错误.

故选：B.

10.【答案】C

【分析】求得以线段 A_1A_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 联立求出点 M 的坐标，根据 A_2M 与另一条渐近线平行可求出 a,b,c 的关系，然后根据 $|F_1M|=\sqrt{21}$，即可求出 a,b,c 的值，从而可得出答案.

【详解】解：由题意 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

则以线段 A_1A_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ y=\frac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{a^2}{c}\\ y=\frac{ab}{c}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{a^2}{c}\\ y=-\frac{ab}{c}\end{cases}$，

又因点 M 在第一象限，所以 $M\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，

因为 A_2M 与直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 平行，

所以 $\frac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}-a}=-\frac{b}{a}$，即 $\frac{b}{a-c}=-\frac{b}{a}$，

所以 $c=2a$，则 $b^2=c^2-a^2=3a^2$，

因为 $|F_1M|=\sqrt{\left(\frac{a^2}{c}+c\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2}=\sqrt{21}$，

所以 $\sqrt{\left(\frac{5a^2}{2a}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{21}$，

即 $\frac{25a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\frac{25a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}=21$，

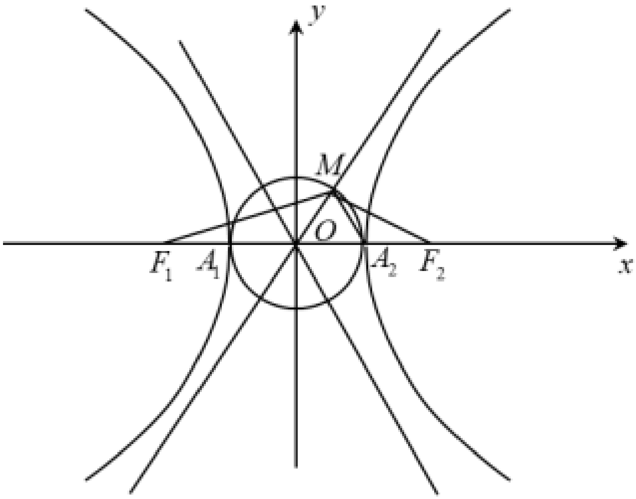
所以 $a^2=3$，

则 $c^2=12,b^2=9$，

所以 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$，$A_2(\sqrt{3},0),F_2(2\sqrt{3},0)$，

所以 $S_{\triangle MA_2F_2}=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-\sqrt{3})\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选：C.



二.填空题，每个小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】0 或－3

【详解】试题分析：由题意得：$a+a(a+2)=0\Rightarrow a=0$或$a=-3$.

考点：直线位置关系

12. 【答案】 ①. $(-2)^{n-1}$ ②. 171

【分析】根据等比数列基本量的计算即可求解 $q=-2$，$a_1=1$，进而根据公式即可求解.

【详解】由 $a_2=-2$，$a_3=4$ 可得 $q=-2$，$a_1=1$，所以 $a_n=a_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$，

$$S_9=\frac{1-(-2)^9}{1-(-2)}=171,$$

故答案为：$(-2)^{n-1}$，171

13. 【答案】$\dfrac{2n}{n+1}$

【详解】设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，由题意有 $\begin{cases}a_1+2d=3\\4a_1+\dfrac{4\times3}{2}d=10\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\d=1\end{cases}$，

数列的前 n 项和 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=n\times1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times1=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

裂项可得 $\dfrac{1}{S_k}=\dfrac{2}{k(k+1)}=2(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{S_k}=2[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]=2(1-\dfrac{1}{n+1})=\dfrac{2n}{n+1}$.

点睛:等差数列的通项公式及前 n 项和公式，共涉及五个量 a_1，a_n，d，n，S_n，知其中三个就能求另外两个，体现了用方程的思想解决问题．数列的通项公式和前 n 项和公式在解题中起到变量代换作用，而 a_1 和 d 是等差数列的两个基本量，用它们表示已知和未知是常用得方法．使用裂项法求和时，要

注意正、负项相消时消去了哪些项，保留了哪些项，切不可漏写未被消去的项，未被消去的项有前后对称的特点.

14.【答案】4

【分析】由题，根据垂径定理求得圆心到直线的距离，可得 m 的值，既而求得 CD 的长可得答案.

【详解】因为$|AB|=2\sqrt{3}$，且圆的半径为$r=2\sqrt{3}$，所以圆心$(0,0)$到直线$mx+y+3m-\sqrt{3}=0$的距离为$\sqrt{r^2-\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2}=3$，则由$\frac{|3m-\sqrt{3}|}{\sqrt{m^2+1}}=3$，解得$m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入直线$l$的方程，得$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2\sqrt{3}$，所以直线$l$的倾斜角为$30°$，由平面几何知识知在梯形$ABDC$中，$|CD|=\frac{|AB|}{\cos 30°}=4$.

故答案为 4

【点睛】解决直线与圆的综合问题时，一方面，要注意运用解析几何的基本思想方法（即几何问题代数化），把它转化为代数问题；另一方面，由于直线与圆和平面几何联系得非常紧密，因此，准确地作出图形，并充分挖掘几何图形中所隐含的条件，利用几何知识使问题较为简捷地得到解决.

15.【答案】①②④

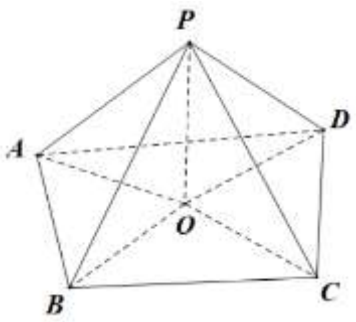
【分析】对①，分析当四棱锥$P-ABCD$为正四棱锥时是否满足条件即可；

对②，设四棱锥$P-ABCD$的高为PO，分析可得点O满足；

对③，假设平面$PAD\perp$平面$ABCD$，再推导得出矛盾即可判断；

对④，设$\angle BOC=\theta$，得出四棱锥$P-ABCD$的体积表达式再求解即可

【详解】根据题意，设$PO\perp ABCD$，则$PO=1$，又因为$\triangle PAB$和$\triangle PCD$均是边长为$\sqrt{2}$的等边三角形，易得$OA=OB=OC=OD=1$，且$\angle AOB=\angle COD=\frac{\pi}{2}$



对①，当$AB=BC=CD=AD=\sqrt{2}$时，底面为正方形，且O为底面中心，此时四棱锥$P-ABCD$可能为正四棱锥，故①正确；

对②，$OA=OB=OC=OD=OP=1$，故一定存在到P，A，B，C，D距离都相等的点O，故②正确；

对③，当平面$PAD\perp$平面$ABCD$时，因为$PO\perp ABCD$，故$PO\subset$平面PAD，此时$\angle AOD=\pi$，又因为$\angle AOB=\angle COD=\frac{\pi}{2}$，此时$B,C$重合，不满足题意，③错误；

对④，设 $\angle BOC=\theta$，则 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot PO$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}OA\cdot OB+\frac{1}{2}OC\cdot OD+\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\theta+\frac{1}{2}OA\cdot OD\sin\left(\pi-\theta\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1+\sin\theta\right)$，因为

$\theta\in\left(0,\pi\right)$，故 $\sin\theta\in\left(0,1\right]$，所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\left(1+\sin\theta\right)\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，故④正确

故答案为：①②④

三.解答题，共 6 个小题，共 85 分.

16.【答案】（I）见解析；（II）见解析；（III）见解析.

【分析】（1）欲证 $PE\perp BC$，只需证明 $PE\perp AD$ 即可；

（2）先证 $PD\perp$ 平面 PAB，再证平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

（3）取 PC 中点 G，连接 FG,DG，证明 $EF//DG$，则 $EF//$ 平面 PCD.

【详解】（I）$\because PA=PD$，且 E 为 AD 的中点，$\therefore PE\perp AD$.

$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore BC//AD$，$\therefore PE\perp BC$；

（II）$\because$ 底面 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AB\perp AD$.

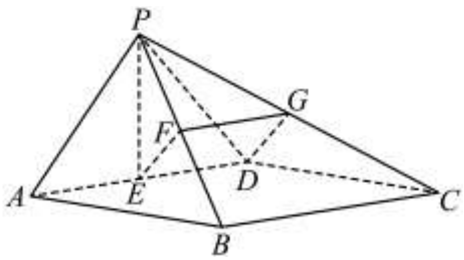
$\because$ 平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，又 $PD\subset$ 平面 PAD，$\therefore AB\perp PD$.

又 $PA\perp PD$，$PA\cap AB=A$，PA、$AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore PD\perp$ 平面 PAB，

$\because PD\subset$ 平面 PCD，$\therefore$ 平面 $PAB\perp$ 平面 PCD；

（III）如图，取 PC 中点 G，连接 FG,GD.



$\because F,G$ 分别为 PB 和 PC 的中点，$\therefore FG//BC$，且 $FG=\frac{1}{2}BC$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，且 E 为 AD 的中点，$\therefore ED//BC,DE=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore ED//FG$，且 $ED=FG$，$\therefore$ 四边形 $EFGD$ 为平行四边形，

$\therefore EF//GD$，又 $EF\not\subset$ 平面 PCD，$GD\subset$ 平面 PCD，$\therefore EF//$ 平面 PCD.

【点睛】证明面面关系的核心是证明线面关系，证明线面关系的核心是证明线线关系.证明线线平行的方法：（1）线面平行的性质定理；（2）三角形中位线法；（3）平行四边形法. 证明线线垂直的常用方法：（1）等腰三角形三线合一；（2）勾股定理逆定理；（3）线面垂直的性质定理；（4）菱形对角线互相垂直.

17.【答案】（1）$\frac{9}{2}$

（2）$\frac{128}{27}$

【分析】（1）求得 A,B,P,Q 的坐标，从而求得三角形 APQ 的面积.

（2）先求得三角形 APQ 面积的表达式，然后利用导数求得面积的最大值.

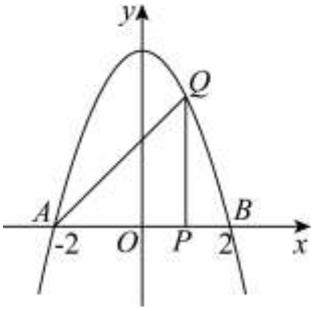
【小问 1 详解】

依题意，$AP \perp PQ$，所以 $|AP|=|PQ|$，

由 $P(t,0)$，得 $Q(t,4-t^2)$，

则 $t-(-2)=4-t^2$，解得 $t=1$ 或 $t=-2$（舍去），则 $P(1,0),Q(1,3)$，

所以 $S_{\triangle APQ}=\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$.



【小问 2 详解】

由 $P(t,0)$，得 $Q(t,4-t^2)$，

则 $S(t)=\frac{1}{2}\times(t+2)\times(4-t^2)=-\frac{1}{2}t^3-t^2+2t+8(-2<t<2)$，

$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2-2t+2=\frac{-3t^2-4t+4}{2}$

$=-\frac{3t^2+4t-4}{2}=-\frac{(t+2)(3t-2)}{2}$，

所以 $S(t)$ 在区间 $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$ 上 $S'(t)>0,S(t)$ 单调递增，

在区间 $\left(\frac{2}{3},2\right)$ 上 $S'(t)<0,S(t)$ 单调递减，

所以 $S(t)$ 的最大值是 $S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}+2\right)\left(4-\frac{4}{9}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times\frac{32}{9}=\frac{128}{27}$.

18.【答案】（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ （2）$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{7}}{7},+\infty\right)$

【分析】

（1）由题意，列出方程组，求得 $a^2=2$，即可得到椭圆的方程；

（2）设直线l的方程为 $y=k\left(x-1\right)$，联立方程组，根据根和系数的关系，结合向量的数量

【详解】（1）由题意，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$ 的离心率是 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

可得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ b^2=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$ 解得 $a^2=2$，所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）由已知直线l的斜率不为 0，

设直线l的方程为 $y=k\left(x-1\right)$，直线l与椭圆 C 的交点为 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$.

由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$ 得 $\left(2k^2+1\right)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

由已知，判别式 $\Delta>0$ 恒成立，且 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$.①

直线 F_1A 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(x+1)$，令 $x=0$，则 $M\left(0,\dfrac{y_1}{x_1+1}\right)$.

同理可得 $N\left(0,\dfrac{y_2}{x_2+1}\right)$.

所以 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=1+\dfrac{y_1y_2}{\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)}=1+\dfrac{k^2\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)}{\left(x_1+1\right)\left(x_2+1\right)}$

$=1+\dfrac{k^2\left[x_1x_2-\left(x_1+x_2\right)+1\right]}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=\dfrac{\left(1+k^2\right)x_1x_2+\left(1-k^2\right)\left(x_1+x_2\right)+1+k^2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}$

将①代入并化简，得

$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\dfrac{7k^2-1}{8k^2-1}$.

依题意，角 $\angle MF_1N$ 为锐角，所以 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}>0$，即 $\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1N}=\dfrac{7k^2-1}{8k^2-1}>0$.

解得 $k^2>\dfrac{1}{7}$ 或 $k^2<\dfrac{1}{8}$.

综上，直线l的斜率的取值范围是 $\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{7}}{7}\right)\cup\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4},0\right)\cup\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{7}}{7},+\infty\right)$.

【点睛】本题主要考查椭圆的标准方程的求解、及直线与圆锥曲线的位置关系的综合应用,解答此类题目，

通常联立直线方程与椭圆（圆锥曲线）方程，应用一元二次方程根与系数的关系进行求解，此类问题易错点是复杂式子的变形能力不足，导致错解，能较好的考查考生的逻辑思维能力、运算求解能力、分析问题解决问题的能力等.

19.【答案】（1） $a=0,b=3$

（2）增区间 $(0,1)$ ，减区间 $(1,+\infty)$

（3） $\frac{1}{4}$

【分析】（1）根据已知条件列方程组，从而求得 a,b .

（2）利用导数求得 $f(x)$ 的单调区间.

（3）结合 $f(x)$ 的图象、切线以及不等式恒成立求得 m 的最大值.

【小问 1 详解】

依题意， $\begin{cases} f(1)=\frac{1+a}{1+b}=\frac{1}{4} \\ f(4)=\frac{2+a}{16+b}=\frac{2}{19} \end{cases}$ ，解得 $a=0,b=3$.

【小问 2 详解】

由（1）得 $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x^2+3}(x\geq 0)$， $f(0)=0$，

当 $x>0$ 时， $f'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\times(x^2+3)-\sqrt{x}\times 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3(1+x)}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1-x}{(x^2+3)^2}$ ，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上 $f'(x)>0, f(x)$ 单调递增，

在区间 $(1,+\infty)$ 上 $f'(x)<0, f(x)$ 单调递减.

【小问 3 详解】

由（2）得 $f'(1)=0, f(1)=\frac{1}{4}$ ，

所以 $y=f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=\frac{1}{4}$ ，此时 $m=\frac{1}{4}$.

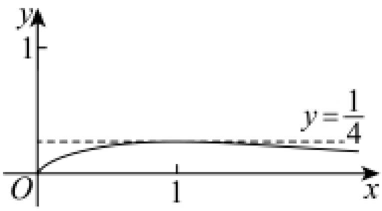
同时， $f(x)_{\max}=f(1)=\frac{1}{4}$ ，因此 $kx+m\geq\frac{1}{4}$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 时恒成立，

直线 $y=kx+m$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，则 $k=\frac{3(1+x)}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1-x}{(x^2+3)^2}$ ，

结合图象可知，当 $k<0$ 时， $kx+m\geq f(x)$ 不恒成立.

当 $k=0$ 时，$m=\dfrac{1}{4}$，$kx+m\geq f\left(x\right)$ 恒成立.

当 $k>0$ 时，$m<\dfrac{1}{4}$，因此 $m\leq\dfrac{1}{4}$，所以 m 的最大值为 $\dfrac{1}{4}$.



【点睛】求解函数单调区间的步骤：(1) 确定 $f\left(x\right)$ 的定义域；(2) 计算导数 $f'\left(x\right)$；(3) 求出 $f'\left(x\right)=0$ 的根；(4) 用 $f'\left(x\right)=0$ 的根将 $f\left(x\right)$ 的定义域分成若干个区间，考查这若干个区间内 $f'\left(x\right)$ 的符号，进而确定 $f\left(x\right)$ 的单调区间：$f'\ \ x\ \ >0$，则 $f\left(x\right)$ 在对应区间上是增函数，对应区间为增区间；$f'\left(x\right)<0$，则 $f\left(x\right)$ 在对应区间上是减函数，对应区间为减区间.

20.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$

(2) 四边形 $OABC$ 可以为矩形，理由见解析

【分析】(1) 依题意可得 $c=2,b=1$，从而可得 $a=\sqrt{5}$，进而可求得方程；

(2) 设 AC：$y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，AC 中点 $M\left(x_0,\ y_0\right)$，$B\left(x_3,y_3\right)$，联立直线方程和椭圆方程，利用韦达定理得 $x_1+x_2=-\dfrac{10km}{1+5k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{5m^2-5}{1+5k^2}$，结合条件 $OA\perp OC$ 可得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，从而可得 $6m^2=5k^2+5$；利用中点坐标求得 $x_3=2x_0$，$y_3=2y_0$，代入椭圆方程可得 $4m^2=5k^2+1$，从而可求得 $4m^2=5k^2+1$，进而求得 $m^2=2$，$k^2=\dfrac{7}{5}$，此时满足 $\Delta>0$，问题得解.

【小问 1 详解】

由题意可得 $2c=4,2b=2$，则 $c=2,b=1,\therefore a=\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{5}$，

所以椭圆 W 的方程为 $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

设 AC：$y=kx+m$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$C\left(x_2,y_2\right)$，AC 中点 $M\left(x_0,\ y_0\right)$，$B\left(x_3,y_3\right)$，

联立方程组 $\begin{cases}x^2+5y^2=5\\ y=kx+m\end{cases}\Rightarrow\left(1+5k^2\right)x^2+10kmx+5m^2-5=0$，

$\Delta=\left(10km\right)^2-4\left(1+5k^2\right)\left(5m^2-5\right)>0$，

$x_1+x_2=-\frac{10km}{1+5k^2}$， $x_1x_2=\frac{5m^2-5}{1+5k^2}$．（1）

由条件 $OA\perp OC$，得 $x_1x_2+y_1y_2=0$，

即 $x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=0$，

整理得 $(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$，

将（1）式代入得 $(1+k^2)(5m^2-5)+km(-10km)+m^2(1+5k^2)=0$，

即 $6m^2=5k^2+5$（2）

又 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{5km}{1+5k^2}$， $y_0=kx_0+m=\frac{m}{1+5k^2}$，

且 M 同时也是 OB 的中点，所以 $x_3=2x_0$， $y_3=2y_0$，

因为 B 在椭圆上，所以 $x_3^2+5y_3^2=5$，

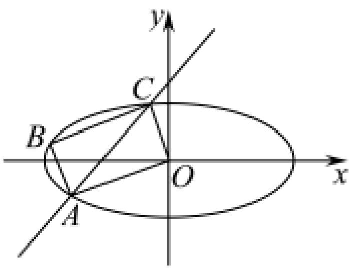
即 $4x_0^2+20y_0^2=5$， $4\left(-\frac{5km}{1+5k^2}\right)^2+20\left(\frac{m}{1+5k^2}\right)^2=5$，

所以 $4m^2=5k^2+1$（3）

由（2）（3）解得 $m^2=2$， $k^2=\frac{7}{5}$，

验证知 $\Delta=(10km)^2-4(1+5k^2)(5m^2-5)=120>0$，

所以四边形 $OABC$ 可以为矩形．



【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于 x（或 y）的一元二次方程，必要时计算 Δ；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为 x_1+x_2、 x_1x_2（或 y_1+y_2、 y_1y_2）的形式；

（5）代入韦达定理求解．

21.【答案】（1） $A_1=9,A_2=35$

（2） $\Omega=\{x|\ x=2m,m=1,2,\cdots\}$

（3）证明见解析

【分析】（1）通过公式即可求出 A_1, A_2 的值；

（2）求出数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，对 j 讨论其奇偶，即可求出 Ω；

（3）通过讨论 Ω 为有限集和无限集时的不同情况下 $\operatorname{sgn}(A_n)$ 的值，即可证明结论.

【小问 1 详解】

由题意，

$A_n = S_{i_{n+1}} - S_{i_n}$，$(n=1,2,\cdots)$，$a_n = n, i_n = n^2 (n=1,2,\cdots)$，

$\therefore a_1 = 1$，$i_1 = 1, i_2 = 2^2 = 4, i_3 = 3^2 = 9$，

$S_1 = a_1 = 1$，$S_{i_2} = S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1+2+3+4 = 10$，

$S_{i_3} = S_9 = a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 1+2+\cdots+9 = 45$，

$\therefore A_1 = S_4 - S_1 = 10 - 1 = 9, A_2 = S_9 - S_4 = 45 - 10 = 35$

【小问 2 详解】

由题意，

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n=1,2,\cdots)$，$a_1 = 1$

$$\therefore S_n = \frac{1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

若 j 为奇数，则 $S_{j+1} - S_j = a_{j+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^j < 0$.

所以 $j \notin \Omega$.

若 j 为偶数，则当 $k = j+1, j+2, \cdots$ 时，

$$S_k - S_j = \frac{2}{3} \times \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^j - \left(-\frac{1}{2}\right)^k\right] \geq \frac{2}{3} \times \left[\left(\frac{1}{2}\right)^j - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] > 0.$$

所以 $j \in \Omega$.

所以 $\Omega = \{x | \ x = 2m, m = 1,2,\cdots\}$.

【小问 3 详解】

由题意证明如下，

在 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 中，

若 Ω 为有限集，设其最大元素为 m (若 Ω 为空集，取 $m = 0$)，

则当 $j=m+1,m+2,\cdots$ 时，存在 $k>j$ 满足 $S_k-S_j<0$.

令 $i_1=m+1,i_{n+1}=\min\left\{k\in\mathbf{N}^*\mid k>i_n,S_k-S_{i_n}<0\right\}(n=1,2,\cdots)$，

则 $A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}<0$.所以 $\operatorname{sgn}\left(A_n\right)=-1(n=1,2,\cdots)$；

若 Ω 为无限集，设 $\Omega=\left\{j_1,j_2,\cdots\right\}$，其中 $j_1<j_2<\cdots$，记 $B_n=S_{j_{n+1}}-S_{j_n}$，则 $B_n\geq0(n=1,2,\cdots)$.

①若数列 $\left\{B_n\right\}$ 中只有有限项为正数，记 $m=\max\left\{n\in\mathbf{N}^*\mid B_n>0\right\}$（若 $\left\{B_n\right\}$ 中没有正数项，取 $m=0$），则 $B_{m+n}=0(n=1,2,\cdots)$.

令 $i_n=j_{m+n}\left(n=1,2,\cdots\right)$，则 $A_n=S_{i_{n+1}}-S_{i_n}=B_{m+n}=0\left(n=1,2,\cdots\right)$.

所以 $\operatorname{sgn}\left(A_n\right)=0(n=1,2,\cdots)$；

②若数列 $\left\{B_n\right\}$ 中有无穷项为正数，将这些项依次记为 $B_{t_1},B_{t_2},\cdots$，其中 $t_1<t_2<\cdots$，则 $B_n=S_{j_{n+1}}-S_{j_n}>0\left(n=1,2,\cdots\right)$.

令 $i_n=j_{t_n}(n=1,2,\cdots)$，则 $A_n=S_{j_{t_{n+1}}}-S_{j_{t_n}}=B_{t_n}+B_{t_n+1}+\cdots+B_{t_{n+1}-1}>0$.

所以 $\operatorname{sgn}\left(A_n\right)=1(n=1,2,\cdots)$.

综上所述，对任意的无穷数列 $\left\{a_n\right\}$ 都存在数列 $\left\{i_n\right\}$，使得 $\left\{\operatorname{sgn}\left(A_n\right)\right\}$ 为常数列.

【点睛】关键点点睛：本题考查求数列的项，数列求和，无穷数列的证明，符号函数，考查学生的计算能力，逻辑思维能力和分类讨论能力，具有很强的综合性.