几何综合压轴问题

一．解答题（共 50 小题）

1．（2020•天水）性质探究

如图（1），在等腰三角形 ABC 中，$\angle ACB=120°$，则底边 AB 与腰 AC 的长度之比为_______.

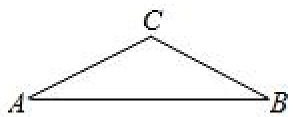
理解运用

（1）若顶角为 $120°$ 的等腰三角形的周长为 $4+2\sqrt{3}$，则它的面积为_______；

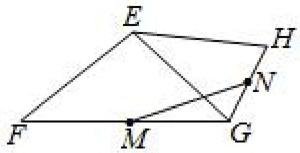
（2）如图（2），在四边形 $EFGH$ 中，$EF=EG=EH$，在边 FG，GH 上分别取中点 M，N，连接 MN．若 $\angle FGH=120°$，$EF=20$，求线段 MN 的长．

类比拓展

顶角为 2α 的等腰三角形的底边与一腰的长度之比为_______．（用含 α 的式子表示）



图（1）



图（2）

2．（2020•青海）在△ABC 中，$AB=AC$，$CG\perp BA$ 交 BA 的延长线于点 G．

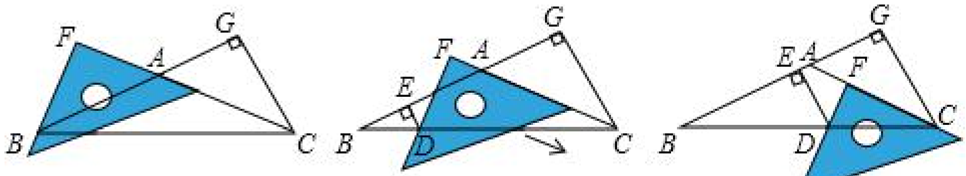


图1　　图2　　图3

特例感知：

（1）将一等腰直角三角尺按图 1 所示的位置摆放，该三角尺的直角顶点为 F，一条直角边与 AC 重合，另一条直角边恰好经过点 B．通过观察、测量 BF 与 CG 的长度，得到 $BF=CG$．请给予证明．

猜想论证：

（2）当三角尺沿 AC 方向移动到图 2 所示的位置时，一条直角边仍与 AC 边重合，另一条直角边交 BC 于点 D，过点 D 作 $DE\perp BA$ 垂足为 E．此时请你通过观察、测量 DE、DF 与 CG 的长度，猜想并写出 DE、DF 与 CG 之间存在的数量关系，并证明你的猜想．

联系拓展：

（3）当三角尺在图 2 的基础上沿 AC 方向继续移动到图 3 所示的位置（点 F 在线段 AC 上，且点 F 与点 C 不重合）时，请你判断（2）中的猜想是否仍然成立？（不用证明）

3．（2020•河北）如图 1 和图 2，在△ABC 中，AB＝AC，BC＝8，$\tan C=\frac{3}{4}$．点 K 在 AC 边上，点 M，N 分别在 AB，BC 上，且 AM＝CN＝2．点 P 从点 M 出发沿折线 MB﹣BN 匀速移动，到达点 N 时停止；而点 Q 在 AC 边上随 P 移动，且始终保持∠APQ＝∠B．

（1）当点 P 在 BC 上时，求点 P 与点 A 的最短距离；

（2）若点 P 在 MB 上，且 PQ 将△ABC 的面积分成上下 4：5 两部分时，求 MP 的长；

（3）设点 P 移动的路程为 x，当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 及 $3\leqslant x\leqslant 9$ 时，分别求点 P 到直线 AC 的距离（用含 x 的式子表示）；

（4）在点 P 处设计并安装一扫描器，按定角∠APQ 扫描△APQ 区域（含边界），扫描器随点 P 从 M 到 B 再到 N 共用时 36 秒．若 $AK=\frac{9}{4}$，请直接写出点 K 被扫描到的总时长．

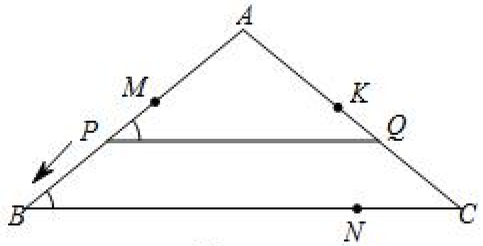


图1

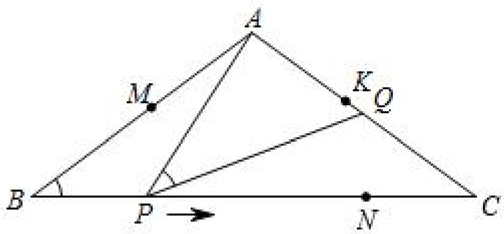


图2

4．（2020•襄阳）在△ABC 中，∠BAC═90°，AB＝AC，点 D 在边 BC 上，$DE\perp DA$ 且 DE＝DA，AE 交边 BC 于点 F，连接 CE．

（1）特例发现：如图 1，当 AD＝AF 时，

①求证：BD＝CF；

②推断：∠ACE＝_______°；

（2）探究证明：如图 2，当 $AD\neq AF$ 时，请探究∠ACE 的度数是否为定值，并说明理由；

（3）拓展运用：如图 3，在（2）的条件下，当$\frac{EF}{AF}=\frac{1}{3}$时，过点 D 作 AE 的垂线，交 AE 于点 P，交 AC 于点 K，若 $CK=\frac{16}{3}$，求 DF 的长．

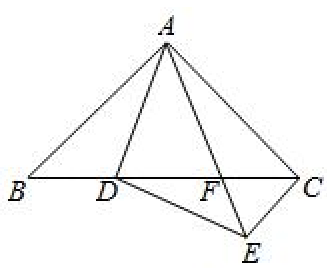


图 1

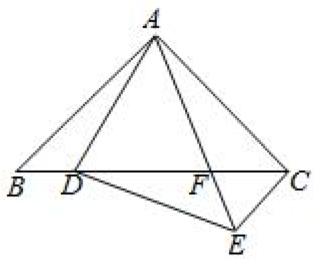


图 2

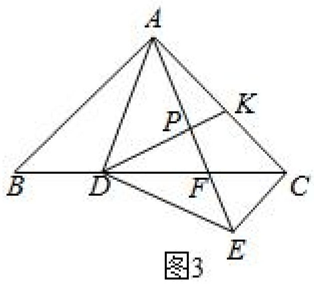
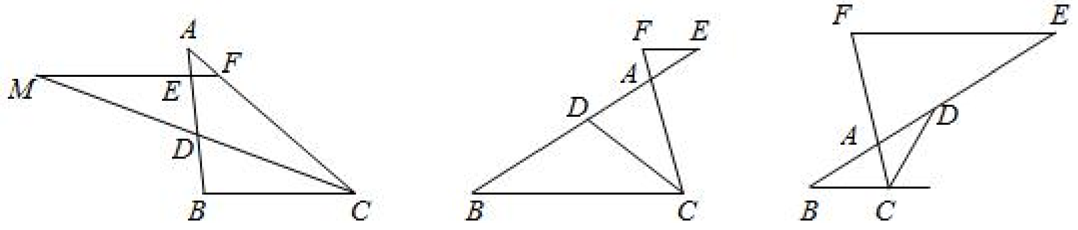


图3

5．（2020•牡丹江）在等腰△ABC 中，AB＝BC，点 D，E 在射线 BA 上，BD＝DE，过点 E 作 EF∥BC，交射线 CA 于点 F．请解答下列问题：



图①　　　　图②　　　　图③

（1）当点 E 在线段 AB 上，CD 是△ACB 的角平分线时，如图①，求证：$AE+BC=CF$；（提示：延长 CD，FE 交于点 M.）

（2）当点 E 在线段 BA 的延长线上，CD 是△ACB 的角平分线时，如图②；当点 E 在线段 BA 的延长线上，CD 是△ACB 的外角平分线时，如图③，请直接写出线段 AE，BC，CF 之间的数量关系，不需要证明；

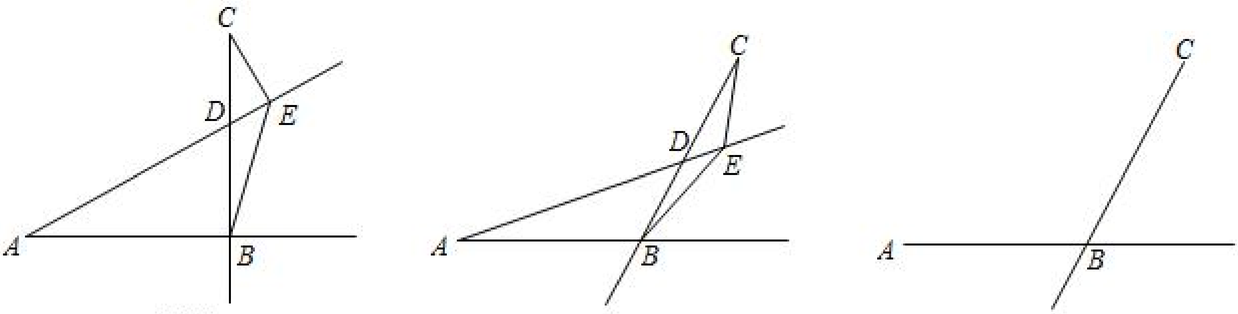
（3）在（1）、（2）的条件下，若 $DE=2AE=6$，则 $CF=$_______.

6．（2020•辽阳）如图，射线 AB 和射线 CB 相交于点 B，$\angle ABC=\alpha$（$0°<\alpha<180°$），且 $AB=CB$．点 D 是射线 CB 上的动点（点 D 不与点 C 和点 B 重合），作射线 AD，并在射线 AD 上取一点 E，使 $\angle AEC=\alpha$，连接 CE，BE.

（1）如图①，当点 D 在线段 CB 上，$\alpha=90°$ 时，请直接写出 $\angle AEB$ 的度数；

（2）如图②，当点 D 在线段 CB 上，$\alpha=120°$ 时，请写出线段 AE，BE，CE 之间的数量关系，并说明理由；

（3）当 $\alpha=120°$，$\tan\angle DAB=\frac{1}{3}$时，请直接写出$\frac{CE}{BE}$的值．



图①　　　　图②　　　　备用图

7．（2020•凉山州）如图，点 P、Q 分别是等边△ABC 边 AB、BC 上的动点（端点除外），点 P、点 Q 以相同的速度，同时从点 A、点 B 出发．

（1）如图 1，连接 AQ、CP．求证：△ABQ≌△CAP；

（2）如图 1，当点 P、Q 分别在 AB、BC 边上运动时，AQ、CP 相交于点 M，$\angle QMC$ 的大小是否变化？若变化，请说明理由；若不变，求出它的度数；

（3）如图 2，当点 P、Q 在 AB、BC 的延长线上运动时，直线 AQ、CP 相交于 M，$\angle QMC$ 的大小是否变化？若变化，请说明理由；若不变，求出它的度数．

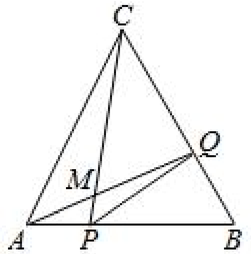


图 1

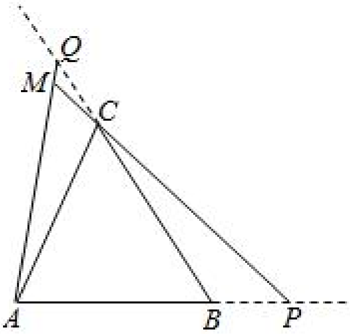


图 2

8．（2020•泰安）小明将两个直角三角形纸片如图（1）那样拼放在同一平面上，抽象出如图（2）的平面图形，$\angle ACB$ 与 $\angle ECD$ 恰好为对顶角，$\angle ABC=\angle CDE=90°$，连接 BD，$AB=BD$，点 F 是线段 CE 上一点．

探究发现：

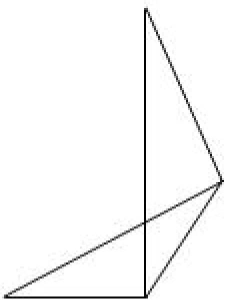
（1）当点 F 为线段 CE 的中点时，连接 DF（如图（2）），小明经过探究，得到结论：$BD\perp DF$．你认为此结论是否成立？_______．（填“是”或“否”）

拓展延伸：

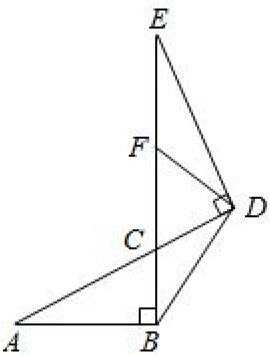
（2）将（1）中的条件与结论互换，即：$BD\perp DF$，则点 F 为线段 CE 的中点．请判断此结论是否成立．若成立，请写出证明过程；若不成立，请说明理由．

问题解决：

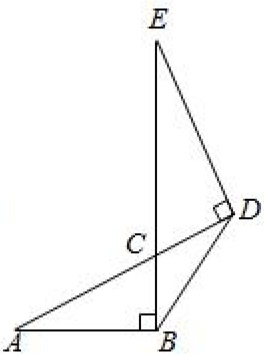
（3）若 $AB=6$，$CE=9$，求 AD 的长．



图（1）



图（2）



备用图

9．（2020•常德）已知 D 是 Rt△ABC 斜边 AB 的中点，$\angle ACB=90°$，$\angle ABC=30°$，过点 D 作 Rt△DEF 使 $\angle DEF=90°$，$\angle DFE=30°$，连接 CE 并延长 CE 到 P，使 $EP=CE$，连接 BE，FP，BP，设 BC 与 DE 交于 M，PB 与 EF 交于 N．

（1）如图 1，当 D，B，F 共线时，求证：

①$EB=EP$；

②$\angle EFP=30°$；

（2）如图2，当D，B，F不共线时，连接BF，求证：$\angle BFD+\angle EFP=30°$．

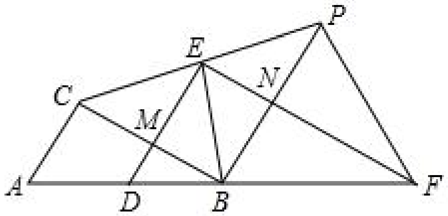


图1

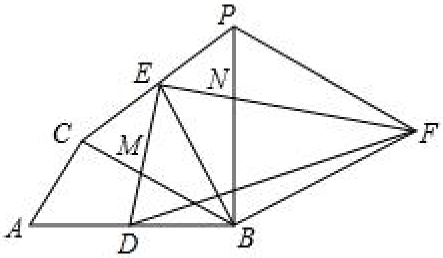


图2

10．（2020•黔东南州）如图1，$\triangle ABC$和$\triangle DCE$都是等边三角形．

探究发现

（1）$\triangle BCD$与$\triangle ACE$是否全等？若全等，加以证明；若不全等，请说明理由．

拓展运用

（2）若B、C、E三点不在一条直线上，$\angle ADC=30°$，$AD=3$，$CD=2$，求BD的长．

（3）若B、C、E三点在一条直线上（如图2），且$\triangle ABC$和$\triangle DCE$的边长分别为1和2，求$\triangle ACD$的面积及AD的长．

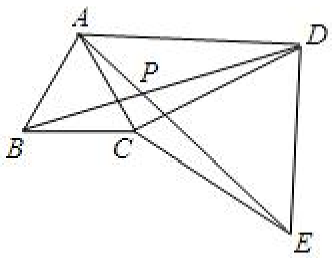


图1

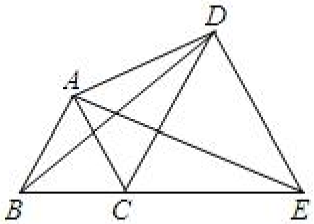


图2

11．（2020•金华）如图，在$\triangle ABC$中，$AB=4\sqrt{2}$，$\angle B=45°$，$\angle C=60°$．

（1）求BC边上的高线长．

（2）点E为线段AB的中点，点F在边AC上，连结EF，沿EF将$\triangle AEF$折叠得到$\triangle PEF$．

①如图2，当点P落在BC上时，求$\angle AEP$的度数．

②如图3，连结AP，当$PF\perp AC$时，求AP的长．

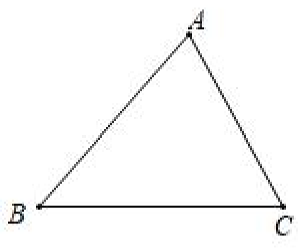


图1

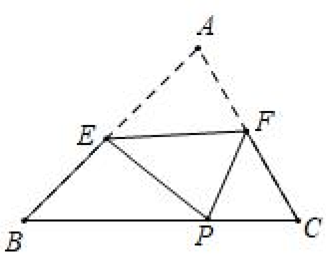


图2

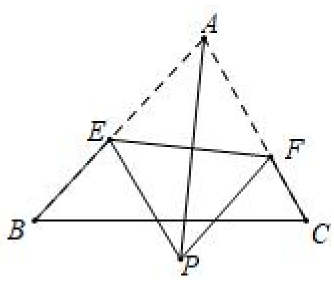


图3

12.（2020•江西）某数学课外活动小组在学习了勾股定理之后，针对图 1 中所示的“由直角三角形三边向外侧作多边形，它们的面积 S_1，S_2，S_3 之间的关系问题”进行了以下探究：

类比探究

（1）如图 2，在 Rt△ABC 中，BC 为斜边，分别以 AB，AC，BC 为斜边向外侧作 Rt△ABD，Rt△ACE，Rt△BCF，若∠1＝∠2＝∠3，则面积 S_1，S_2，S_3 之间的关系式为_______；

推广验证

（2）如图 3，在 Rt△ABC 中，BC 为斜边，分别以 AB，AC，BC 为边向外侧作任意△ABD，△ACE，△BCF，满足∠1＝∠2＝∠3，∠D＝∠E＝∠F，则（1）中所得关系式是否仍然成立？若成立，请证明你的结论；若不成立，请说明理由；

拓展应用

（3）如图 4，在五边形 $ABCDE$ 中，∠A＝∠E＝∠C＝105°，∠ABC＝90°，AB＝$2\sqrt{3}$，DE＝2，点 P 在 AE 上，∠ABP＝30°，PE＝$\sqrt{2}$，求五边形 $ABCDE$ 的面积．

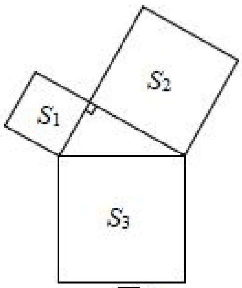


图1

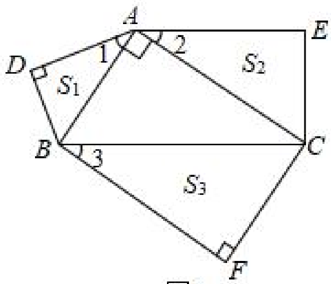


图2

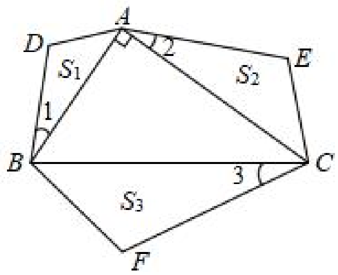


图3

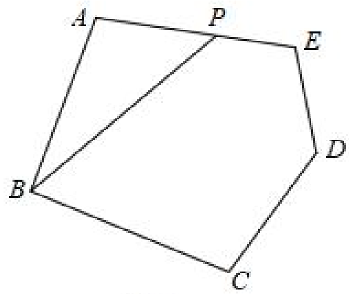


图4

13.（2020•衡阳）如图 1，平面直角坐标系 xOy 中，等腰△ABC 的底边 BC 在 x 轴上，BC＝8，顶点 A 在 y 的正半轴上，OA＝2，一动点 E 从（3，0）出发，以每秒 1 个单位的速度沿 CB 向左运动，到达 OB 的中点停止．另一动点 F 从点 C 出发，以相同的速度沿 CB 向左运动，到达点 O 停止．已知点 E、F 同时出发，以 EF 为边作正方形 $EFGH$，使正方形 $EFGH$ 和△ABC 在 BC 的同侧，设运动的时间为 t 秒（$t \geqslant 0$）．

（1）当点 H 落在 AC 边上时，求 t 的值；

（2）设正方形 $EFGH$ 与△ABC 重叠面积为 S，请问是否存在 t 值，使得 $S=\frac{91}{36}$？若存在，求出 t 值；若不存在，请说明理由；

（3）如图 2，取 AC 的中点 D，连结 OD，当点 E、F 开始运动时，点 M 从点 O 出发，以每秒 $2\sqrt{5}$个单位的速度沿 OD－DC－CD－DO 运动，到达点 O 停止运动．请问在点 E 的整个运动过程中，点 M 可能在正方形 $EFGH$ 内（含边界）吗？如果可能，求出点 M 在正方形 $EFGH$ 内（含边界）的时长；若不可能，请说明理由．

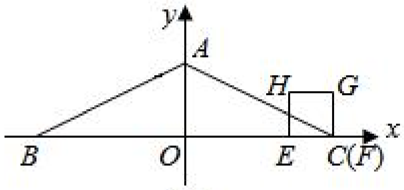


图1

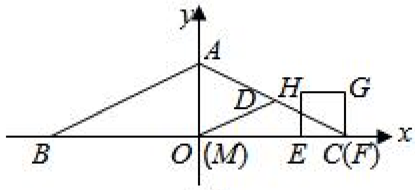


图2

14．（2020•青岛）已知：如图，在四边形 $ABCD$ 和 Rt△EBF 中，$AB \parallel CD$，$CD > AB$，点 C 在 EB 上，$\angle ABC = \angle EBF = 90°$，$AB = BE = 8cm$，$BC = BF = 6cm$，延长 DC 交 EF 于点 M．点 P 从点 A 出发，沿 AC 方向匀速运动，速度为 $2cm/s$；同时，点 Q 从点 M 出发，沿 MF 方向匀速运动，速度为 $1cm/s$．过点 P 作 $GH \perp AB$ 于点 H，交 CD 于点 G．设运动时间为 t（s）（$0 < t < 5$）．

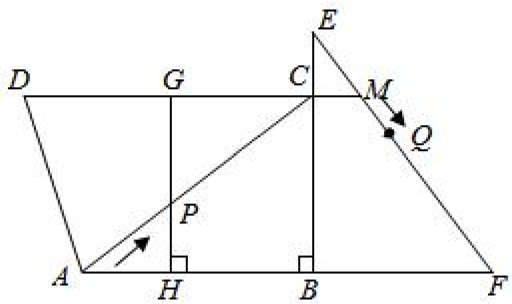
解答下列问题：

（1）当 t 为何值时，点 M 在线段 CQ 的垂直平分线上？

（2）连接 PQ，作 $QN \perp AF$ 于点 N，当四边形 $PQNH$ 为矩形时，求 t 的值；

（3）连接 QC，QH，设四边形 $QCGH$ 的面积为 S（cm^2），求 S 与 t 的函数关系式；

（4）点 P 在运动过程中，是否存在某一时刻 t，使点 P 在 $\angle AFE$ 的平分线上？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由．



15．（2020•山西）综合与实践

问题情境：

如图①，点 E 为正方形 $ABCD$ 内一点，$\angle AEB = 90°$，将 Rt△ABE 绕点 B 按顺时针方向旋转 $90°$，得到△CBE'（点 A 的对应点为点 C）．延长 AE 交 CE' 于点 F，连接 DE．

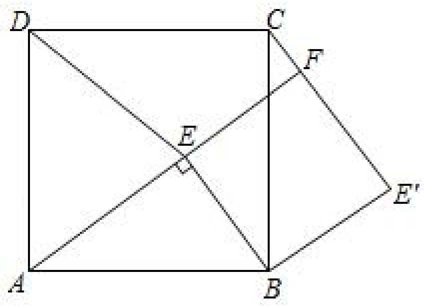
猜想证明：

（1）试判断四边形 $BE'FE$ 的形状，并说明理由；

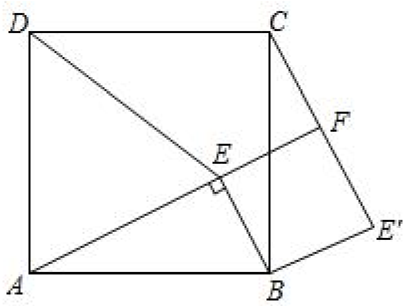
（2）如图②，若 $DA = DE$，请猜想线段 CF 与 FE' 的数量关系并加以证明；

解决问题：

（3）如图①，若 $AB = 15$，$CF = 3$，请直接写出 DE 的长．



图①



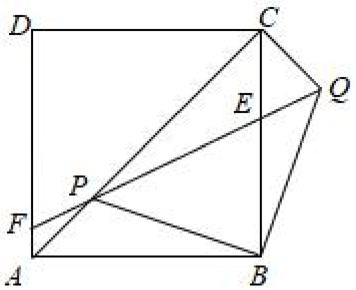
图②

16.（2020•内江）如图，正方形 $ABCD$ 中，P 是对角线 AC 上的一个动点（不与 A、C 重合），连结 BP，将 BP 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 BQ，连结 QP 交 BC 于点 E，QP 延长线与边 AD 交于点 F.

（1）连结 CQ，求证：$AP=CQ$；

（2）若 $AP=\frac{1}{4}AC$，求 CE：BC 的值；

（3）求证：$PF=EQ$.



17.（2020•郴州）如图 1，在等腰直角三角形 ADC 中，$\angle ADC=90°$，$AD=4$．点 E 是 AD 的中点，以 DE 为边作正方形 $DEFG$，连接 AG，CE．将正方形 $DEFG$ 绕点 D 顺时针旋转，旋转角为α（0°＜α＜90°）．

（1）如图 2，在旋转过程中，

①判断△AGD 与△CED 是否全等，并说明理由；

②当 $CE=CD$ 时，AG 与 EF 交于点 H，求 GH 的长．

（2）如图 3，延长 CE 交直线 AG 于点 P．

①求证：$AG\perp CP$；

②在旋转过程中，线段 PC 的长度是否存在最大值？若存在，求出最大值；若不存在，请说明理由．

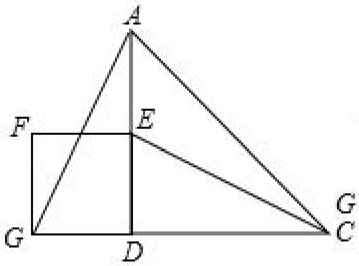


图1

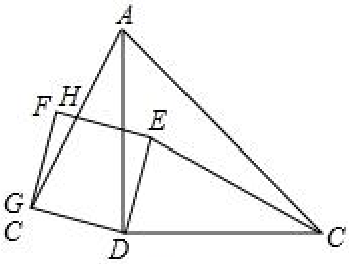


图2

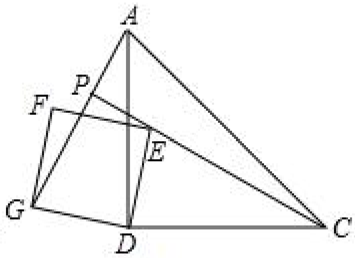


图3

18.（2020•湘西州）问题背景：如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90°$，$\angle BCD=90°$，$BA=BC$，∠

ABC＝120°，$\angle MBN$＝60°，$\angle MBN$绕B点旋转，它的两边分别交AD、DC于E、F．探究图中线段AE，CF，EF之间的数量关系．

小李同学探究此问题的方法是：延长FC到G，使CG＝AE，连接BG，先证明$\triangle BCG\cong\triangle BAE$，再证明$\triangle BFG\cong\triangle BFE$，可得出结论，他的结论就是_______；

探究延伸1：如图2，在四边形$ABCD$中，$\angle BAD$＝90°，$\angle BCD$＝90°，BA＝BC，$\angle ABC$＝2$\angle MBN$，$\angle MBN$绕B点旋转．它的两边分别交AD、DC于E、F，上述结论是否仍然成立？请直接写出结论（直接写出“成立”或者“不成立”），不要说明理由；

探究延伸2：如图3，在四边形$ABCD$中，BA＝BC，$\angle BAD$+$\angle BCD$＝180°，$\angle ABC$＝2$\angle MBN$，$\angle MBN$绕B点旋转．它的两边分别交AD、DC于E、F．上述结论是否仍然成立？并说明理由；

实际应用：如图4，在某次军事演习中，舰艇甲在指挥中心（O处）北偏西30°的A处．舰艇乙在指挥中心南偏东70°的B处，并且两舰艇到指挥中心的距离相等，接到行动指令后，舰艇甲向正东方向以75海里/小时的速度前进，同时舰艇乙沿北偏东50°的方向以100海里/小时的速度前进，1.2小时后，指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达E、F处．且指挥中心观测两舰艇视线之间的夹角为70°．试求此时两舰艇之间的距离．

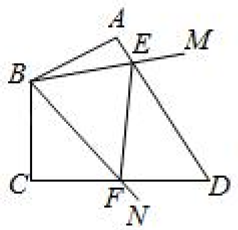


图1

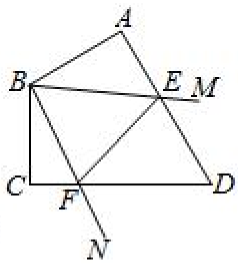


图2

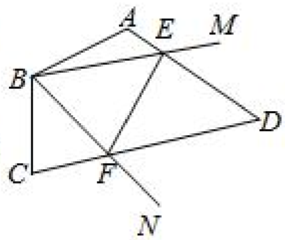


图3

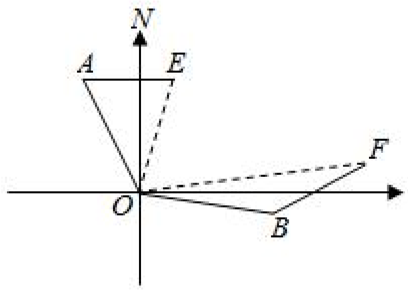


图4

19．（2020•扬州）如图1，已知点O在四边形$ABCD$的边AB上，且OA＝OB＝OC＝OD＝2，OC平分$\angle BOD$，与BD交于点G，AC分别与BD、OD交于点E、F．

（1）求证：$OC\parallel AD$；

（2）如图2，若DE＝DF，求$\frac{AE}{AF}$的值；

（3）当四边形$ABCD$的周长取最大值时，求$\frac{DE}{DF}$的值．

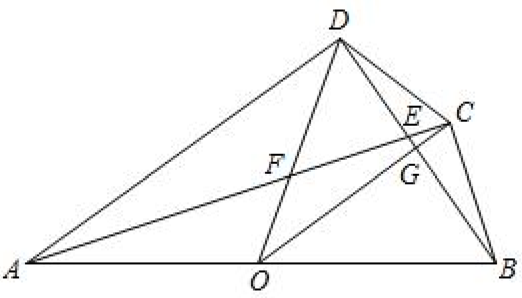


图1

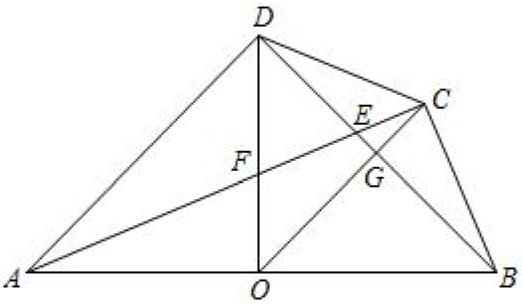


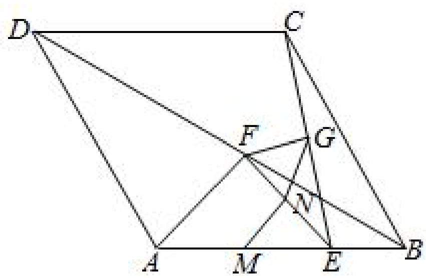
图2

20．（2020•临沂）如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 1，$\angle ABC=60^{\circ}$，点 E 是边 AB 上任意一点（端点除外），线段 CE 的垂直平分线交 BD，CE 分别于点 F，G，AE，EF 的中点分别为 M，N.

（1）求证：$AF=EF$；

（2）求 $MN+NG$ 的最小值；

（3）当点 E 在 AB 上运动时，$\angle CEF$ 的大小是否变化？为什么？



21．（2020•岳阳）如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，动点 P，Q 分别从 C 点，A 点同时以每秒 1 个单位长度的速度出发，且分别在边 CA，AB 上沿 $C\rightarrow A$，$A\rightarrow B$ 的方向运动，当点 Q 运动到点 B 时，P，Q 两点同时停止运动．设点 P 运动的时间为 t（s），连接 PQ，过点 P 作 $PE\perp PQ$，PE 与边 BC 相交于点 E，连接 QE.

（1）如图 2，当 $t=5s$ 时，延长 EP 交边 AD 于点 F．求证：$AF=CE$；

（2）在（1）的条件下，试探究线段 AQ，QE，CE 三者之间的等量关系，并加以证明；

（3）如图 3，当 $t>\frac{9}{4}s$ 时，延长 EP 交边 AD 于点 F，连接 FQ，若 FQ 平分 $\angle AFP$，求$\frac{AF}{CE}$的值.

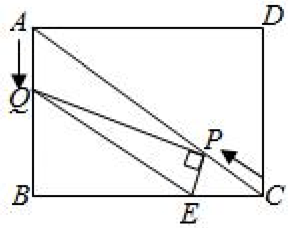


图 1

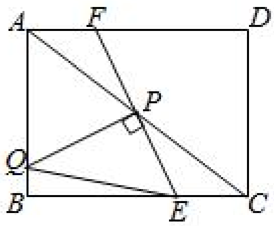


图 2

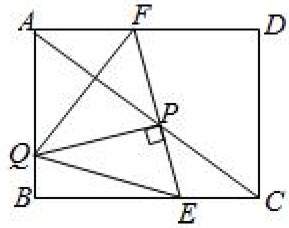


图3

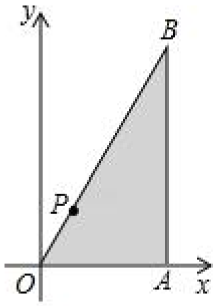
22．（2020•天津）将一个直角三角形纸片 OAB 放置在平面直角坐标系中，点 O（0，0），点 A（2，0），点 B 在第一象限，$\angle OAB=90^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，点 P 在边 OB 上（点 P 不与点 O，B 重合）.

（Ⅰ）如图①，当 $OP=1$ 时，求点 P 的坐标；

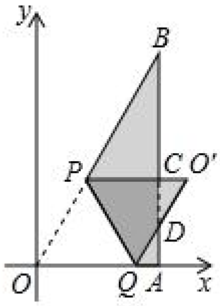
（Ⅱ）折叠该纸片，使折痕所在的直线经过点 P，并与 x 轴的正半轴相交于点 Q，且 $OQ=OP$，点 O 的对应点为 O'，设 $OP=t$.

①如图②，若折叠后△$O'PQ$ 与△OAB 重叠部分为四边形，$O'P$，$O'Q$ 分别与边 AB 相交于点 C，D，试用含有 t 的式子表示 $O'D$ 的长，并直接写出 t 的取值范围；

②若折叠后△$O'PQ$ 与△OAB 重叠部分的面积为 S，当 $1\leqslant t\leqslant 3$ 时，求 S 的取值范围（直接写出结果即可）.



图①



图②

23.（2020•南京）如图①，要在一条笔直的路边 l 上建一个燃气站，向 l 同侧的 A、B 两个城镇分别铺设管道输送燃气．试确定燃气站的位置，使铺设管道的路线最短．

（1）如图②，作出点 A 关于 l 的对称点 A'，线段 $A'B$ 与直线 l 的交点 C 的位置即为所求，即在点 C 处建燃气站，所得路线 ACB 是最短的．

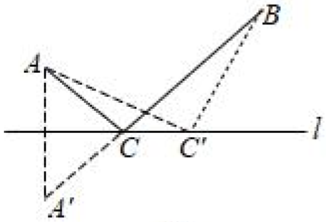
为了证明点 C 的位置即为所求，不妨在直线 1 上另外任取一点 C'，连接 AC'、BC'，证明 $AC+CB<AC'+C'B$．请完成这个证明．

（2）如果在 A、B 两个城镇之间规划一个生态保护区，燃气管道不能穿过该区域．请分别给出下列两种情形的铺设管道的方案（不需说明理由）．

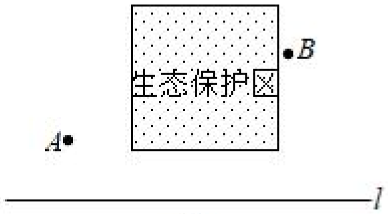
①生态保护区是正方形区域，位置如图③所示；

②生态保护区是圆形区域，位置如图④所示．

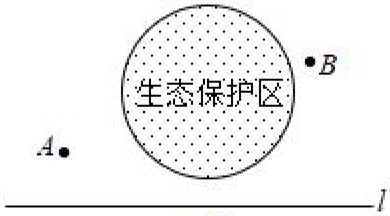
①



②



③



④

24.（2020•河南）将正方形 $ABCD$ 的边 AB 绕点 A 逆时针旋转至 AB'，记旋转角为α，连接 BB'，过点 D 作 DE 垂直于直线 BB'，垂足为点 E，连接 DB'，CE.

（1）如图 1，当α＝60°时，△DEB' 的形状为_______，连接 BD，可求出$\frac{BB'}{CE}$的值为_______；

（2）当 0°＜α＜360°且α≠90°时，

①（1）中的两个结论是否仍然成立？如果成立，请仅就图 2 的情形进行证明；如果不成立，请说明理由；

②当以点 B'，E，C，D 为顶点的四边形是平行四边形时，请直接写出$\frac{BE}{B'E}$的值.

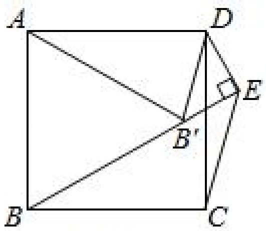


图1

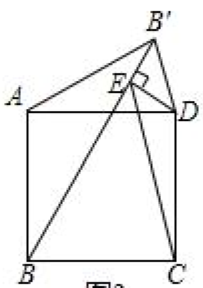


图2

25.（2020•达州）（1）[阅读与证明]

如图 1，在正△ABC 的外角∠CAH 内引射线 AM，作点 C 关于 AM 的对称点 E（点 E 在∠CAH 内），连接 BE，BE、CE 分别交 AM 于点 F、G.

①完成证明：∵点 E 是点 C 关于 AM 的对称点，

∴∠AGE＝90°，AE＝AC，∠1＝∠2.

∵正△ABC 中，∠BAC＝60°，AB＝AC，

∴AE＝AB，得∠3＝∠4.

在△ABE 中，∠1+∠2+60°+∠3+∠4＝180°，∴∠1+∠3＝_______°.

在△*AEG*中，∠*FEG*+∠3+∠1＝90°，∴∠*FEG*＝_______°．

②求证：*BF*＝*AF*+2*FG*．

（2）[类比与探究]

把（1）中的“正△*ABC*”改为“正方形*ABDC*”，其余条件不变，如图2．类比探究，可得：

①∠*FEG*＝_______°；

②线段*BF*、*AF*、*FG*之间存在数量关系_______．

（3）[归纳与拓展]

如图3，点*A*在射线*BH*上，*AB*＝*AC*，∠*BAC*＝α（0°＜α＜180°），在∠*CAH*内引射线*AM*，作点*C*关于*AM*的对称点*E*（点*E*在∠*CAH*内），连接*BE*，*BE*、*CE*分别交*AM*于点*F*、*G*．则线段*BF*、*AF*、*GF*之间的数量关系为_______．

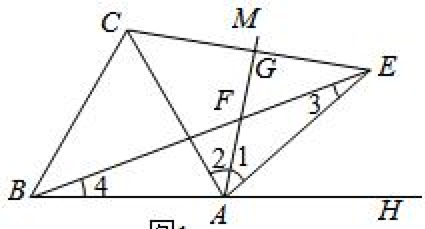


图1

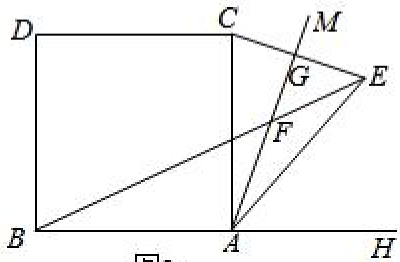


图2

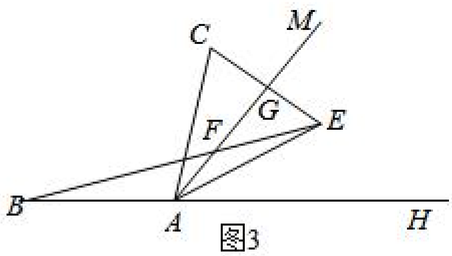


图3

26．（2020•齐齐哈尔）综合与实践

在线上教学中，教师和学生都学习到了新知识，掌握了许多新技能．例如教材八年级下册的数学活动－－折纸，就引起了许多同学的兴趣．在经历图形变换的过程中，进一步发展了同学们的空间观念，积累了数学活动经验．

实践发现：

对折矩形纸片*ABCD*，使*AD*与*BC*重合，得到折痕*EF*，把纸片展平；再一次折叠纸片，使点*A*落在*EF*上的点*N*处，并使折痕经过点*B*，得到折痕*BM*，把纸片展平，连接*AN*，如图①．

（1）折痕*BM*_______（填“是”或“不是”）线段*AN*的垂直平分线；请判断图中△*ABN*是什么特殊三角形？答：_______；进一步计算出∠*MNE*＝_______°；

（2）继续折叠纸片，使点*A*落在*BC*边上的点*H*处，并使折痕经过点*B*，得到折痕*BG*，把纸片展平，如图②，则∠*GBN*＝_______°；

拓展延伸：

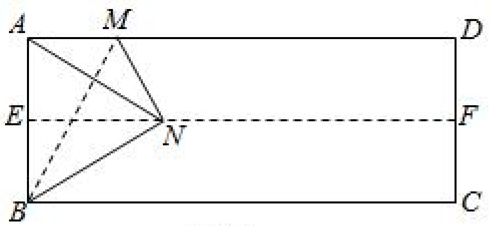
（3）如图③，折叠矩形纸片 $ABCD$，使点 A 落在 BC 边上的点 A'处，并且折痕交 BC 边于点 T，交 AD 边于点 S，把纸片展平，连接 AA'交 ST 于点 O，连接 AT.

求证：四边形 $SATA'$是菱形.

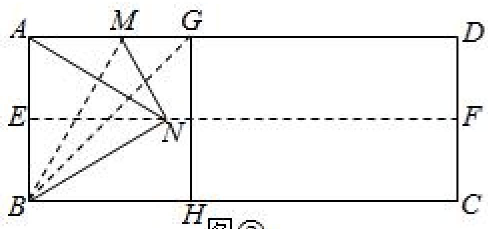
解决问题：

（4）如图④，矩形纸片 $ABCD$ 中，$AB=10$，$AD=26$，折叠纸片，使点 A 落在 BC 边上的点 A'处，并且折痕交 AB 边于点 T，交 AD 边于点 S，把纸片展平．同学们小组讨论后，得出线段 AT 的长度有 4，5，7，9.

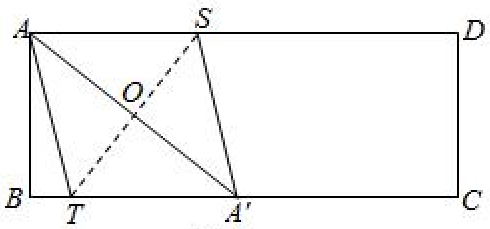
请写出以上 4 个数值中你认为正确的数值_______.



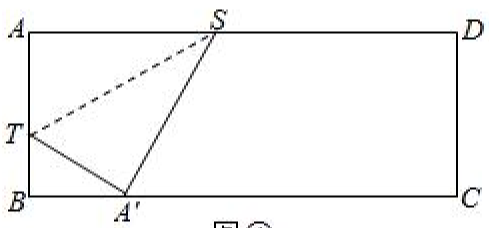
图①



图②



图③



图④

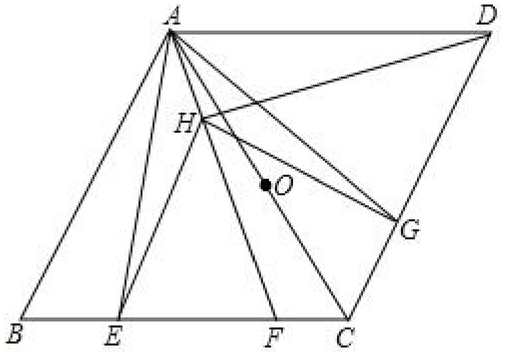
27.（2020•济宁）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=AC$，点 E，F，G 分别在边 BC，CD 上，$BE=CG$，AF 平分$\angle EAG$，点 H 是线段 AF 上一动点（与点 A 不重合）.

（1）求证：$\triangle AEH\cong\triangle AGH$；

（2）当 $AB=12$，$BE=4$ 时.

①求$\triangle DGH$ 周长的最小值；

②若点 O 是 AC 的中点，是否存在直线 OH 将$\triangle ACE$ 分成三角形和四边形两部分，其中三角形的面积与四边形的面积比为 1：3．若存在，请求出$\frac{AH}{AF}$的值；若不存在，请说明理由.

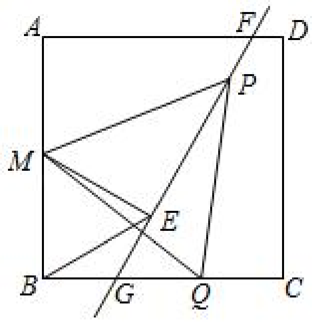


28.（2020•泰州）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 6，M 为 AB 的中点，$\triangle MBE$ 为等边三角形，过点 E 作 ME 的垂线分别与边 AD、BC 相交于点 F、G，点 P、Q 分别在线段 EF、BC 上运动，且满足 $\angle PMQ=60°$，连接 PQ.

（1）求证：$\triangle MEP\cong\triangle MBQ$.

（2）当点 Q 在线段 GC 上时，试判断 $PF+GQ$ 的值是否变化？如果不变，求出这个值，如果变化，请说明理由.

（3）设 $\angle QMB=\alpha$，点 B 关于 QM 的对称点为 B'，若点 B' 落在 $\triangle MPQ$ 的内部，试写出 α 的范围，并说明理由.



29.（2020•安徽）如图 1，已知四边形 $ABCD$ 是矩形，点 E 在 BA 的延长线上，$AE=AD$．EC 与 BD 相交于点 G，与 AD 相交于点 F，$AF=AB$.

（1）求证：$BD\perp EC$；

（2）若 $AB=1$，求 AE 的长；

（3）如图 2，连接 AG，求证：$EG-DG=\sqrt{2}AG$.

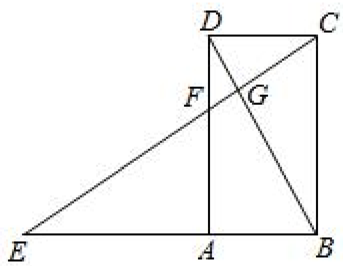


图 1

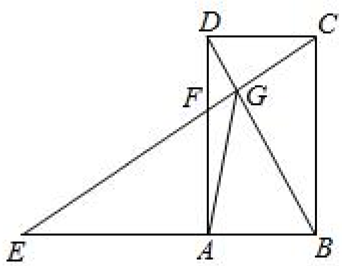


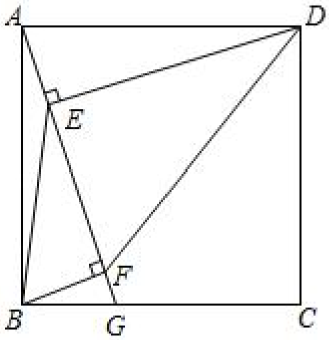
图 2

30．（2020•绥化）如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=4$，点 G 在边 BC 上，连接 AG，作 $DE\perp AG$ 于点 E，$BF\perp AG$ 于点 F，连接 BE、DF，设 $\angle EDF=\alpha$，$\angle EBF=\beta$，$\frac{BG}{BC}=k$．

（1）求证：$AE=BF$；

（2）求证：$\tan\alpha=k\cdot\tan\beta$；

（3）若点 G 从点 B 沿 BC 边运动至点 C 停止，求点 E，F 所经过的路径与边 AB 围成的图形的面积．



31．（2020•德州）问题探究：

小红遇到这样一个问题：如图 1，$\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=4$，AD 是中线，求 AD 的取值范围．她的做法是：延长 AD 到 E，使 $DE=AD$，连接 BE，证明 $\triangle BED\cong\triangle CAD$，经过推理和计算使问题得到解决．

请回答：（1）小红证明 $\triangle BED\cong\triangle CAD$ 的判定定理是：________；

（2）AD 的取值范围是________；

方法运用：

（3）如图 2，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，在 AD 上取一点 F，连结 BF 并延长交 AC 于点 E，使 $AE=EF$，求证：$BF=AC$．

（4）如图 3，在矩形 $ABCD$ 中，$\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2}$，在 BD 上取一点 F，以 BF 为斜边作 $Rt\triangle BEF$，且 $\frac{EF}{BE}=\frac{1}{2}$，点 G 是 DF 的中点，连接 EG，CG，求证：$EG=CG$．

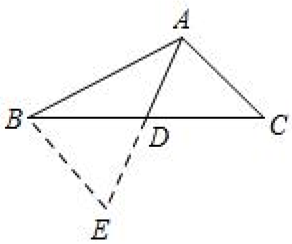


图1

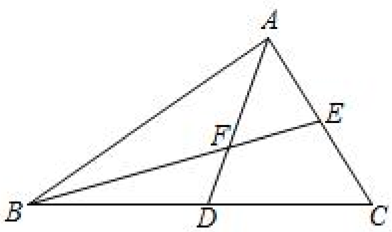


图2

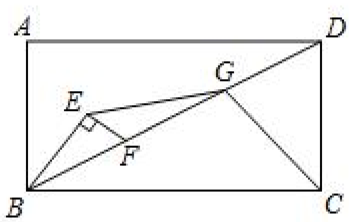


图3

32．（2020•乐山）点 P 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 所在直线上的一个动点（点 P 不与点 A、C 重合），分别过点 A、C 向直线 BP 作垂线，垂足分别为点 E、F．点 O 为 AC 的中点．

（1）如图 1，当点 P 与点 O 重合时，线段 OE 和 OF 的关系是________；

（2）当点 P 运动到如图 2 所示的位置时，请在图中补全图形并通过证明判断（1）中的结论是否仍然成立？

（3）如图 3，点 P 在线段 OA 的延长线上运动，当$\angle OEF=30°$ 时，试探究线段 CF、AE、OE 之间的关系．

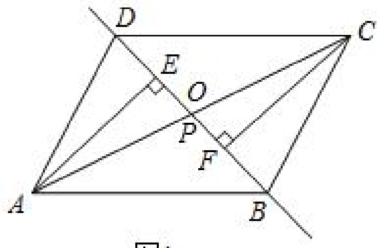


图1

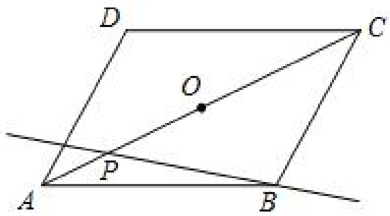


图2

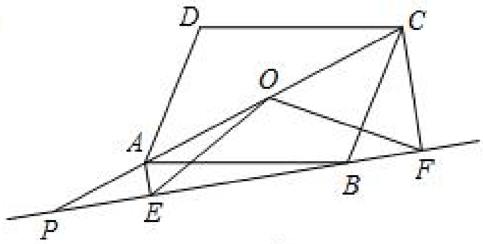


图3

33．（2020•成都）在矩形 $ABCD$ 的 CD 边上取一点 E，将$\triangle BCE$ 沿 BE 翻折，使点 C 恰好落在 AD 边上点 F 处．

（1）如图 1，若 $BC=2BA$，求$\angle CBE$ 的度数；

（2）如图 2，当 $AB=5$，且 $AF\cdot FD=10$ 时，求 BC 的长；

（3）如图 3，延长 EF，与$\angle ABF$ 的角平分线交于点 M，BM 交 AD 于点 N，当 $NF=AN+FD$ 时，求$\dfrac{AB}{BC}$的值．

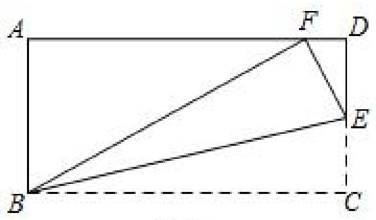


图1

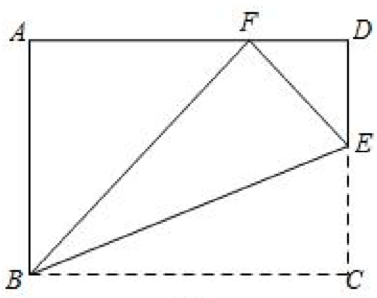


图2

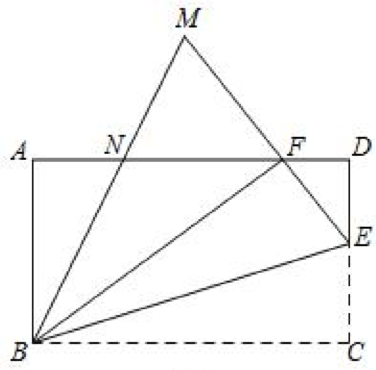


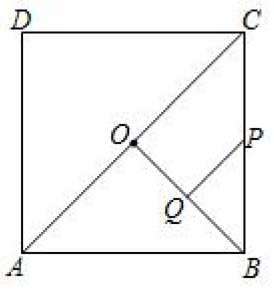
图3

34．（2020•贵阳）如图，四边形 $ABCD$ 是正方形，点 O 为对角线 AC 的中点．

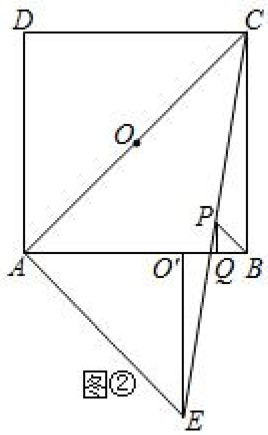
（1）问题解决：如图①，连接 BO，分别取 CB，BO 的中点 P，Q，连接 PQ，则 PQ 与 BO 的数量关系是_______，位置关系是_______；

（2）问题探究：如图②，$\triangle AO'E$ 是将图①中的$\triangle AOB$ 绕点 A 按顺时针方向旋转 45° 得到的三角形，连接 CE，点 P，Q 分别为 CE，BO'的中点，连接 PQ，PB．判断$\triangle PQB$ 的形状，并证明你的结论；

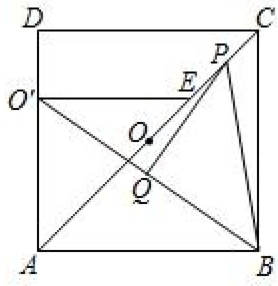
（3）拓展延伸：如图③，$\triangle AO'E$ 是将图①中的$\triangle AOB$ 绕点 A 按逆时针方向旋转 45° 得到的三角形，连接 BO'，点 P，Q 分别为 CE，BO'的中点，连接 PQ，PB．若正方形 $ABCD$ 的边长为 1，求$\triangle PQB$ 的面积．



图①



图②



图③

35．（2020•黑龙江）以 Rt△*ABC* 的两边 *AB*、*AC* 为边，向外作正方形 *ABDE* 和正方形 *ACFG*，连接 *EG*，过点 *A* 作 *AM*⊥*BC* 于 *M*，延长 *MA* 交 *EG* 于点 *N*.

（1）如图①，若∠*BAC*＝90°，*AB*＝*AC*，易证：*EN*＝*GN*；

（2）如图②，∠*BAC*＝90°；如图③，∠*BAC*≠90°，（1）中结论，是否成立，若成立，选择一个图形进行证明；若不成立，写出你的结论，并说明理由.

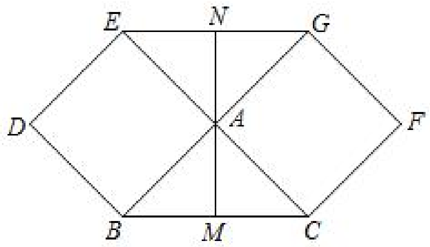


图1

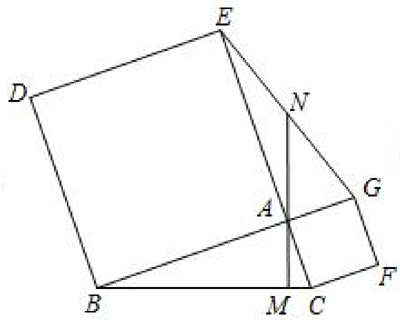


图2

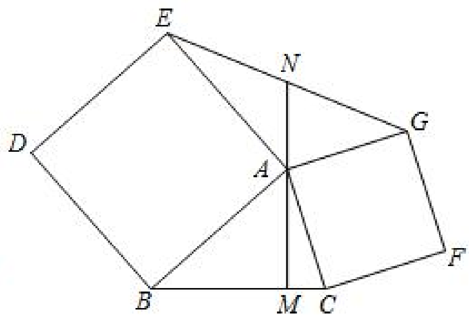


图3

36．（2020•衢州）【性质探究】

如图，在矩形 *ABCD* 中，对角线 *AC*，*BD* 相交于点 *O*，*AE* 平分∠*BAC*，交 *BC* 于点 *E*．作 *DF*⊥*AE* 于点 *H*，分别交 *AB*，*AC* 于点 *F*，*G*.

（1）判断△*AFG* 的形状并说明理由.

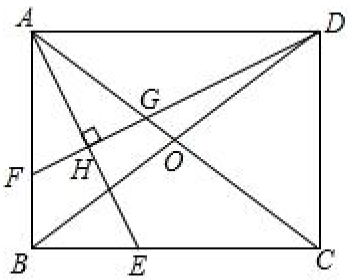
（2）求证：*BF*＝2*OG*.

【迁移应用】

（3）记△*DGO* 的面积为 S_1，△*DBF* 的面积为 S_2，当$\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{3}$时，求$\frac{AD}{AB}$的值.

【拓展延伸】

（4）若 *DF* 交射线 *AB* 于点 *F*，【性质探究】中的其余条件不变，连结 *EF*，当△*BEF* 的面积为矩形 *ABCD* 面积的$\frac{1}{10}$时，请直接写出 tan∠*BAE* 的值.



37.（2020•嘉兴）在一次数学研究性学习中，小兵将两个全等的直角三角形纸片 ABC 和 DEF 拼在一起，使点 A 与点 F 重合，点 C 与点 D 重合（如图 1），其中 $\angle ACB=\angle DFE=90^{\circ}$，$BC=EF=3cm$，$AC=DF=4cm$，并进行如下研究活动．

活动一：将图 1 中的纸片 DEF 沿 AC 方向平移，连结 AE，BD（如图 2），当点 F 与点 C 重合时停止平移．

【思考】图 2 中的四边形 $ABDE$ 是平行四边形吗？请说明理由．

【发现】当纸片 DEF 平移到某一位置时，小兵发现四边形 $ABDE$ 为矩形（如图 3）．求 AF 的长．

活动二：在图 3 中，取 AD 的中点 O，再将纸片 DEF 绕点 O 顺时针方向旋转α度（0≤α≤90），连结 OB，OE（如图 4）．

【探究】当 EF 平分 $\angle AEO$ 时，探究 OF 与 BD 的数量关系，并说明理由．

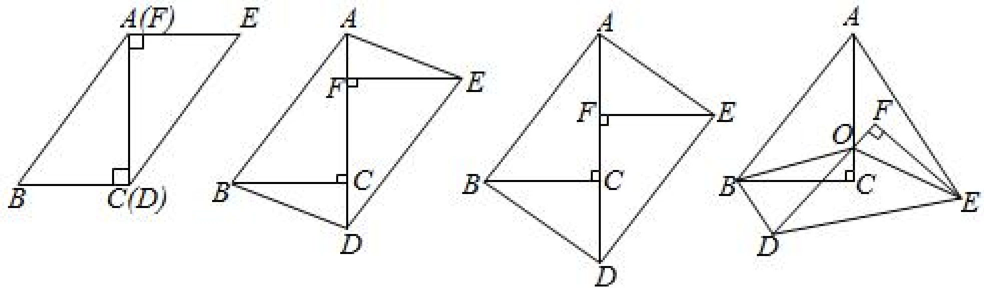


图1　　图2　　图3　　图4

38.（2020•孝感）已知△ABC 内接于⊙O，$AB=AC$，$\angle ABC$ 的平分线与⊙O 交于点 D，与 AC 交于点 E，连接 CD 并延长与⊙O 过点 A 的切线交于点 F，记 $\angle BAC=\alpha$．

（1）如图 1，若 $\alpha=60^{\circ}$，

①直接写出 $\frac{DF}{DC}$ 的值为_______；

②当⊙O 的半径为 2 时，直接写出图中阴影部分的面积为_______；

（2）如图 2，若 $\alpha<60^{\circ}$，且 $\frac{DF}{DC}=\frac{2}{3}$，$DE=4$，求 BE 的长．

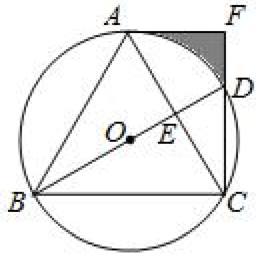


图1

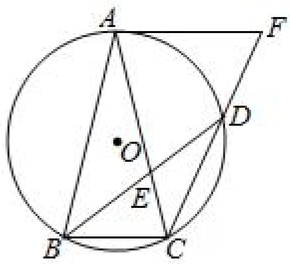


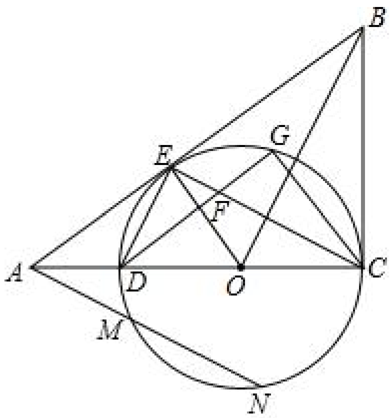
图2

39.（2020•鄂州）如图所示：⊙O 与△ABC 的边 BC 相切于点 C，与 AC、AB 分别交于点 D、E，DE∥OB．DC 是⊙O 的直径．连接 OE，过 C 作 CG∥OE 交⊙O 于 G，连接 DG、EC，DG 与 EC 交于点 F．

（1）求证：直线 AB 与⊙O 相切；

（2）求证：AE•ED＝AC•EF；

（3）若 EF＝3，$\tan\angle ACE=\frac{1}{2}$时，过 A 作 AN∥CE 交⊙O 于 M、N 两点（M 在线段 AN 上），求 AN 的长．

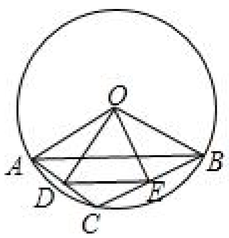


40.（2020•长沙）如图，半径为 4 的⊙O 中，弦 AB 的长度为 $4\sqrt{3}$，点 C 是劣弧$\widehat{AB}$上的一个动点，点 D 是弦 AC 的中点，点 E 是弦 BC 的中点，连接 DE、OD、OE．

（1）求∠AOB 的度数；

（2）当点 C 沿着劣弧$\widehat{AB}$从点 A 开始，逆时针运动到点 B 时，求△ODE 的外心 P 所经过的路径的长度；

（3）分别记△ODE，△CDE 的面积为 S_1，S_2，当 $S_1^2-S_2^2$＝21 时，求弦 AC 的长度．



41.（2020•广元）在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，OA 平分∠BAC 交 BC 于点 O，以 O 为圆心，OC 长为半径作圆交 BC 于点 D．

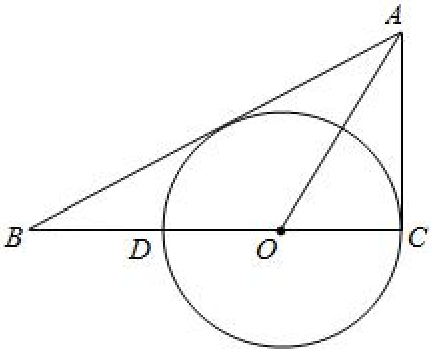


图1

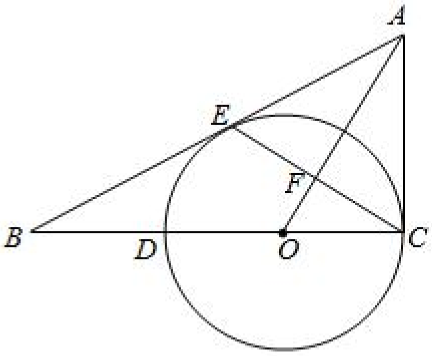


图2

（1）如图1，求证：AB为⊙O的切线；

（2）如图2，AB与⊙O相切于点E，连接CE交OA于点F.

①试判断线段OA与CE的关系，并说明理由.

②若OF：FC＝1：2，OC＝3，求$\tan B$的值.

42.（2020•连云港）（1）如图1，点P为矩形$ABCD$对角线BD上一点，过点P作$EF /\!/ BC$，分别交AB、CD于点E、F．若BE＝2，PF＝6，△AEP的面积为S_1，△CFP的面积为S_2，则S_1+S_2＝________；

（2）如图2，点P为▱$ABCD$内一点（点P不在BD上），点E、F、G、H分别为各边的中点．设四边形$AEPH$的面积为S_1，四边形$PFCG$的面积为S_2（其中$S_2>S_1$），求△PBD的面积（用含S_1、S_2的代数式表示）；

（3）如图3，点P为▱$ABCD$内一点（点P不在BD上），过点P作$EF /\!/ AD$，$HG /\!/ AB$，与各边分别相交于点E、F、G、H．设四边形$AEPH$的面积为S_1，四边形$PGCF$的面积为S_2（其中$S_2>S_1$），求△PBD的面积（用含S_1、S_2的代数式表示）；

（4）如图4，点A、B、C、D把⊙O四等分．请你在圆内选一点P（点P不在AC、BD上），设PB、PC、$\widehat{BC}$围成的封闭图形的面积为S_1，PA、PD、$\widehat{AD}$围成的封闭图形的面积为S_2，△PBD的面积为S_3，△PAC的面积为S_4，根据你选的点P的位置，直接写出一个含有S_1、S_2、S_3、S_4的等式（写出一种情况即可）.

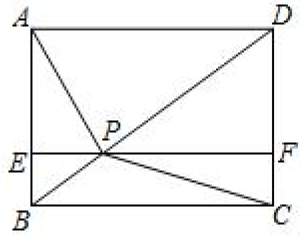


图1

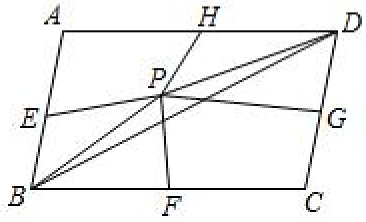


图2

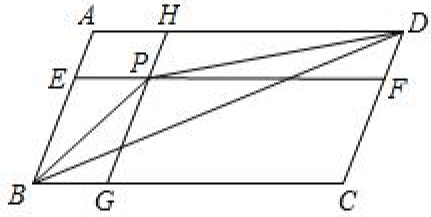


图3

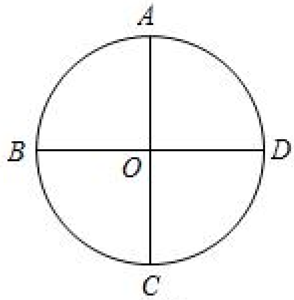


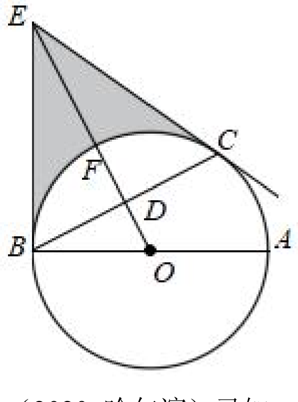
图4

43.（2020•内江）如图，AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，$OD \perp BC$ 于点 D，过点 C 作⊙O 的切线，交 OD 的延长线于点 E，连结 BE.

（1）求证：BE 是⊙O 的切线；

（2）设 OE 交⊙O 于点 F，若 $DF=2$，$BC=4\sqrt{3}$，求线段 EF 的长；

（3）在（2）的条件下，求阴影部分的面积.



44.（2020•哈尔滨）已知：⊙O 是△ABC 的外接圆，AD 为⊙O 的直径，$AD \perp BC$，垂足为 E，连接 BO，延长 BO 交 AC 于点 F.

（1）如图 1，求证：$\angle BFC=3\angle CAD$；

（2）如图 2，过点 D 作 $DG /\!/ BF$ 交⊙O 于点 G，点 H 为 DG 的中点，连接 OH，求证：$BE=OH$；

（3）如图 3，在（2）的条件下，连接 CG，若 $DG=DE$，△AOF 的面积为$\frac{9\sqrt{2}}{5}$，求线段 CG 的

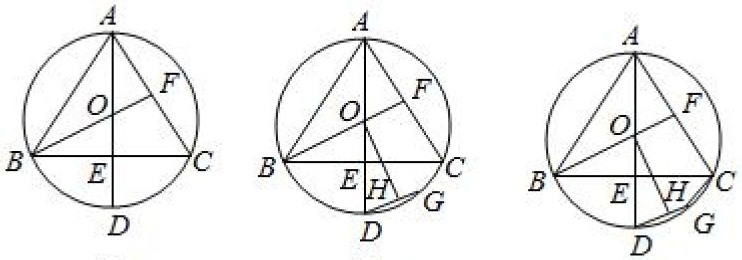


图 1　　图 2　　图 3

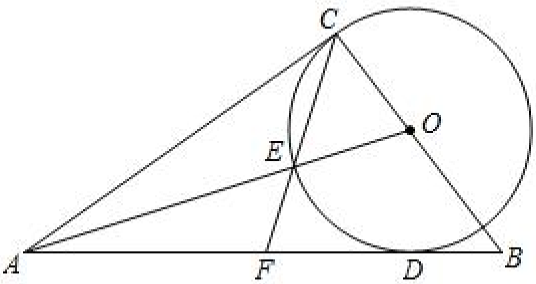
长.

45.（2020•成都）如图，在△*ABC* 的边 *BC* 上取一点 *O*，以 *O* 为圆心，*OC* 为半径画⊙*O*，⊙*O* 与边 *AB* 相切于点 *D*，*AC*＝*AD*，连接 *OA* 交⊙*O* 于点 *E*，连接 *CE*，并延长交线段 *AB* 于点 *F*.

（1）求证：*AC* 是⊙*O* 的切线；

（2）若 *AB*＝10，tan*B*＝$\frac{4}{3}$，求⊙*O* 的半径；

（3）若 *F* 是 *AB* 的中点，试探究 *BD*+*CE* 与 *AF* 的数量关系并说明理由.

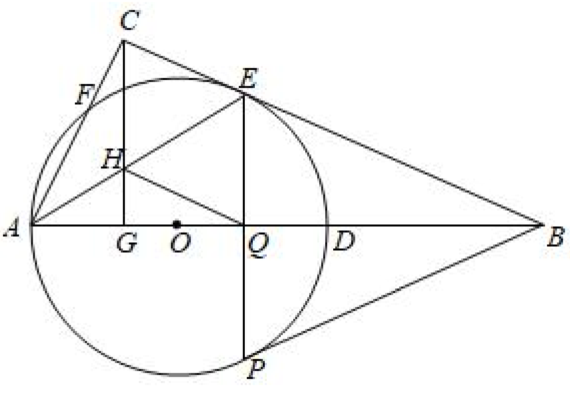


46.（2020•遂宁）如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，*D* 为 *AB* 边上的一点，以 *AD* 为直径的⊙*O* 交 *BC* 于点 *E*，交 *AC* 于点 *F*，过点 *C* 作 *CG*⊥*AB* 交 *AB* 于点 *G*，交 *AE* 于点 *H*，过点 *E* 的弦 *EP* 交 *AB* 于点 *Q*（*EP* 不是直径），点 *Q* 为弦 *EP* 的中点，连结 *BP*，*BP* 恰好为⊙*O* 的切线.

（1）求证：*BC* 是⊙*O* 的切线.

（2）求证：$\widehat{EF}=\widehat{ED}$.

（3）若 sin∠*ABC*＝$\frac{3}{5}$，*AC*＝15，求四边形 *CHQE* 的面积.

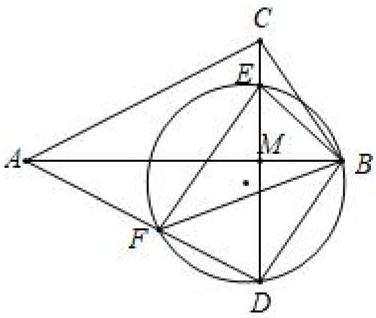


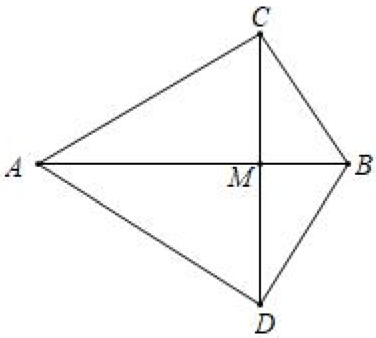
47.（2020•台州）如图，在△*ABC* 中，∠*ACB*＝90°，将△*ABC* 沿直线 *AB* 翻折得到△*ABD*，连接 *CD* 交 *AB* 于点 *M*．*E* 是线段 *CM* 上的点，连接 *BE*．*F* 是△*BDE* 的外接圆与 *AD* 的另一个交点，连接 *EF*，*BF*.

（1）求证：△*BEF* 是直角三角形；

（2）求证：△*BEF*∽△*BCA*；

（3）当 *AB*＝6，*BC*＝*m* 时，在线段 *CM* 上存在点 *E*，使得 *EF* 和 *AB* 互相平分，求 *m* 的值．





备用图

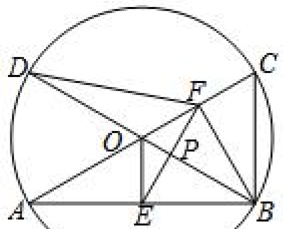
48．（2020•杭州）如图，已知 *AC*，*BD* 为⊙*O* 的两条直径，连接 *AB*，*BC*，*OE*⊥*AB* 于点 *E*，点 *F* 是半径 *OC* 的中点，连接 *EF*．

（1）设⊙*O* 的半径为 1，若∠*BAC*＝30°，求线段 *EF* 的长．

（2）连接 *BF*，*DF*，设 *OB* 与 *EF* 交于点 *P*，

①求证：*PE*＝*PF*．

②若 *DF*＝*EF*，求∠*BAC* 的度数．



49．（2020•宁波）定义：三角形一个内角的平分线和与另一个内角相邻的外角平分线相交所成的锐角称为该三角形第三个内角的遥望角．

（1）如图 1，∠*E* 是△*ABC* 中∠*A* 的遥望角，若∠*A*＝α，请用含α的代数式表示∠*E*．

（2）如图 2，四边形 *ABCD* 内接于⊙*O*，$\widehat{AD}=\widehat{BD}$，四边形 *ABCD* 的外角平分线 *DF* 交⊙*O* 于点 *F*，连结 *BF* 并延长交 *CD* 的延长线于点 *E*．求证：∠*BEC* 是△*ABC* 中∠*BAC* 的遥望角．

（3）如图 3，在（2）的条件下，连结 *AE*，*AF*，若 *AC* 是⊙*O* 的直径．

①求∠*AED* 的度数；

②若 *AB*＝8，*CD*＝5，求△*DEF* 的面积．

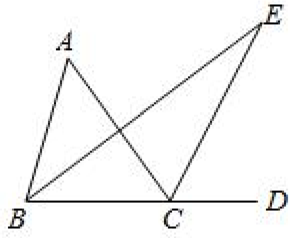


图1

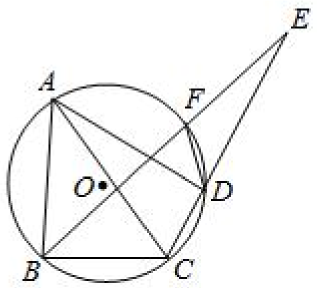


图2

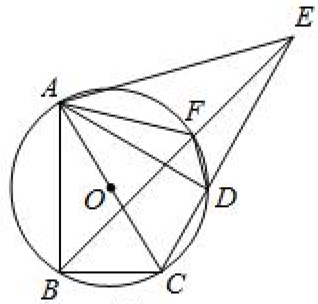


图3

50．（2020•苏州）如图，已知$\angle MON=90°$，OT是$\angle MON$的平分线，A是射线OM上一点，$OA=8cm$．动点P从点A出发，以$1cm/s$的速度沿AO水平向左作匀速运动，与此同时，动点Q从点O出发，也以$1cm/s$的速度沿ON竖直向上作匀速运动．连接PQ，交OT于点B．经过O、P、Q三点作圆，交OT于点C，连接PC、QC．设运动时间为t（s），其中$0<t<8$．

（1）求$OP+OQ$的值；

（2）是否存在实数t，使得线段OB的长度最大？若存在，求出t的值；若不存在，说明理由．

（3）求四边形$OPCQ$的面积．