2022 北京顺义一中高三（上）期中

数　　学

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 已知集合 $M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|x^2\le 4\}$，那么 $M\cap N=$（　　）

A. $[-2,-1)\cup[2,3)$　　B. $(-1,2]$

C. $[2,3)$　　D. $[-2,3)$

2. 复数 $\dfrac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=$（　　）

A. $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　B. $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$　　C. $\frac{11}{25}-\frac{2}{25}\mathrm{i}$　　D. $\frac{11}{25}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$

3. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，S_n 为其前 n 项和．若 $S_3=3a_1+3$，则 $d=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-2,k)$ 且 $\vec{a}\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，则实数 $k=$（　　）

A. -14　　B. -6　　C. 6　　D. 14

5. 设 a，b 是实数，则“$a>b$”是“$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 将函数 $y=2\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，再将所得图象上的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，得到的函数解析式为(　　)

A. $y=2\cos 2x$　　B. $y=-2\cos 2x$　　C. $y=-2\sin 2x$　　D. $y=2\sin 2x$

7. 设函数 $f(x)=xe^x$，则（　　）

A. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极大值点且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 1

B. $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 $2e$

C. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 1

D. $x=-1$ 为 $f(x)$ 的极小值点且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的斜率为 $2e$

8. 若函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-2x-a$，当 $x\ge\dfrac{1}{3}$ 时，$f(x)\le 0$ 恒成立，则 a 的取值范围（　　）

A. $(-\infty,3]$　　　B. $[3,+\infty)$　　　C. $\left(-\infty,\frac{25}{3}\right]$　　　D. $\left[\frac{25}{3},+\infty\right)$

9. 若双曲线的实轴长与虚轴长之和等于其焦距的 $\sqrt{2}$ 倍，且一个顶点的坐标为 $(2,0)$，则双曲线的标准方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$　　　B. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$　　　C. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　　D. $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

10. 过点 $P\left(\frac{1}{2},1\right)$ 的直线 l 与圆 $C:(x-1)^2+y^2=4$ 交于 A 、B 两点，C 为圆心，当 $\angle ACB$ 最小时，直线 l 的方程为（　　）

A. $2x+y+2=0$　　　B. $2x+y-2=0$　　　C. $2x-4y+3=0$　　　D. $2x+4y-3=0$

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 在 $\triangle ABC$ 中，A，B，C 分别是三边 a，b，c 所对的角，$a=15$，$b=10$，$A=\frac{\pi}{3}$，$\sin B=$ __________.

12. 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -2 的等差数列，记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 a_1,a_3,a_4 成等比数列，则 $a_1=$ _______；$S_n=$ _______.

13. 设函数 $f(x)=ax^3+bx+4$ 在 $x=2$ 处取得极小值，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{5}x$ 互相垂直，则函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上的最大值为__________.

14. 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是单位向量，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$ 的最小值为__________.

15. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x<a\\4(x^2-3x+2), x\geq a\end{cases}$，则当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的最小值为__________；若 $f(x)$ 恰有两个零点，则实数 a 的取值范围是__________.

三、解答题（本题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 已知函数 $f(x)=a\sin 2x+2\cos^2 x-1$，再从条件①、②、③这三个条件中选择一个作为已知，求：

（I）$f(x)$ 的最小正周期；

（II）$f(x)$ 的单调递增区间.

条件①：$f(x)$ 图像的对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$；条件②：$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$；条件③：$a=\sqrt{3}$.注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

17. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1=2$，$S_3=14$.数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=5$，$b_3=3$，且 $\{b_n-a_n\}$ 为等差数列.

（I）求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（II）求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18. 在$\triangle ABC$中，角 A，B，C的对边分别为a，b，c，且角 A，B，C成等差数列.

（I）若$b=\sqrt{13},a=3$，求边 c的值；

（II）设$t=\sin A\sin C$，求 t的最大值.

19. 已知函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2+\left(m-2\right)x-2m\ln x\left(m<0\right)$.

（1）当$m=-1$时，求$f\left(x\right)$的单调增区间；

（2）当$m\le -\dfrac{1}{2}$时，求证：$f\left(x\right)-mx$在$\left(0,+\infty\right)$上是增函数；

（3）求证：当$-1<m<0$时，对任意$x\in\left[1,+\infty\right)$，$f\left(x\right)\ge 2m\left(1-\ln 2\right)-2$.

20. 已知椭圆C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的长轴长为4，且离心率为$\frac{1}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设过点$F\left(1,0\right)$且斜率为k的直线l与椭圆C交于A，B两点，线段AB的垂直平分线交x轴于点D.

求证：$\dfrac{\left|AB\right|}{\left|DF\right|}$为定值.

21. 已知$\{a_n\}$是由正整数组成的无穷数列，该数列前n项的最大值记为A_n，最小值记为B_n，令$b_n=\dfrac{A_n}{B_n}$.

（I）若$a_n=2n$（$n=1$，2，3，…），写出b_1，b_2，b_3的值；

（II）证明：$b_{n+1}\ge b_n$（$n=1$，2，3，…）；

（III）若$\{b_n\}$是等比数列，证明：存在正整数n_0，当$n\ge n_0$时，a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，…是等比数列.

参考答案

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1. 【答案】B

【解析】

【分析】先利用一元二次不等式的解法求出集合 N，再由集合交集的定义求解即可.

【详解】因为集合 $M=\{x|-1<x<3\}$，$N=\{x|x^2\le 4\}=\{x|-2\le x\le 2\}$，

所以 $M\cap N=\{x|-1<x\le 2\}$.

故选：B.

2. 【答案】B

【解析】

【分析】利用复数运算法则直接求解即可.

【详解】$\dfrac{2+\mathrm{i}}{4-3\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}{(4-3\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})}=\dfrac{8+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{16-9\mathrm{i}^2}=\dfrac{5+10\mathrm{i}}{25}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

故选：B.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】

根据 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且 $S_3=3a_1+3$，利用等差数列的前 n 项和公式求解.

【详解】因为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，且 $S_3=3a_1+3$，

所以 $3a_1+3d=3a_1+3$，

解得 $d=1$，

故选：C

4. 【答案】D

【解析】

【分析】根据题设条件求得 $2\vec{a}-\vec{b}$ 的坐标，再根据 $\vec{a}\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，得到关于 k 的方程，解之即可.

【详解】$\because \vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-2,k)$，

$\therefore 2\vec{a}-\vec{b}=(6,2-k)$，

又 $\because \vec{a}\perp\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$，

$\therefore 2\times 6+1\times(2-k)=0$，解得 $k=14$.

故选：D.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】通过列举反例即可说明充分性和必要性.

【详解】当 $a=1,b=-1$ 时，有 $a>b$，但 $\frac{1}{a}=1>\frac{1}{b}=-1$，

故 $a>b$ 不能推出 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

当 $a=-1,b=1$ 时，有 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，但 $a=-1<b=1$，

故 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不能推出 $a>b$，

故“$a>b$”是“$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$”的既不充分也不必要条件

故选：D.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】利用诱导公式以及函数 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的图象变换规律，可以求得变换后的函数的解析式.

【详解】将函数 $y=2\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度，

可得函数 $y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin x$ 的图象；

再将所得图象的所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，

可得到的函数 $y=2\sin 2x$ 的图象，

故选：D.

7. 【答案】C

【解析】

【分析】对函数 $f(x)$ 求导，求出函数 $f(x)$ 的单调性，进而可得出其极值点，由 $f^{'}(0)=1$，可得到在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率.

【详解】解：因为 $f(x)=xe^x$，所以 $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x>-1$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<-1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore x=-1$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点，

又 $f^{'}(0)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线斜率为 1，

故选：C.

8. 【答案】D

【解析】

【分析】依题意，当$x\geq\frac{1}{3}$时，$a\geq\frac{1}{x^2}-2x$恒成立，令$g(x)=\frac{1}{x^2}-2x$，$x\geq\frac{1}{3}$，则$a\geq g(x)_{\max}$，利用导数求出$g(x)$的单调性，进而求得最值得解.

【详解】解：依题意，当$x\geq\frac{1}{3}$时，$a\geq\frac{1}{x^2}-2x$恒成立，

令$g(x)=\frac{1}{x^2}-2x$，$x\geq\frac{1}{3}$，则$a\geq g(x)_{\max}$，又$g'(x)=\frac{-2}{x^3}-2=-2\left(\frac{1}{x^3}+1\right)<0$，

$\therefore g(x)$在$\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$上单调递减，

$\therefore a\geq g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=9-\frac{2}{3}=\frac{25}{3}$，即$a\geq\frac{25}{3}$

故选：D.

9. 【答案】A

【解析】

【分析】根据条件列关于a，b，c的方程组求解即可.

【详解】设双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

由已知得$\begin{cases}2a+2b=2\sqrt{2}c\\a=2\\a^2+b^2=c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=2\end{cases}$，

所以双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$

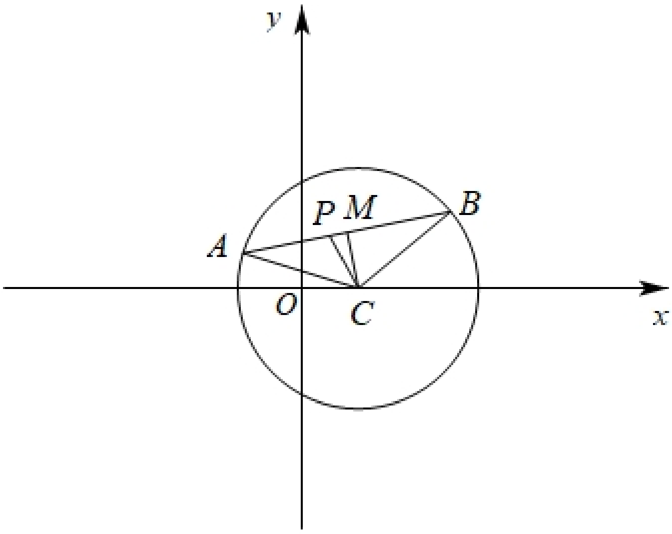
故选：A.

10. 【答案】C

【解析】

【分析】可证明当$CP\perp l$时$\angle ACB$最小，故可求直线l的方程.

【详解】



$C(1,0), R=2$.

取 AB 的中点为 M，连接 CM，则 $CM\perp l$ 且 $|CM|\le|CP|$，

而 $\cos\dfrac{\angle ACB}{2}=\dfrac{|CM|}{2}\le\dfrac{|CP|}{2}$，当且仅当 $CP\perp l$ 时等号成立，

故 $\angle ACB$ 最小时，$CP\perp l$，此时 $k_{CP}=\dfrac{1-0}{\dfrac{1}{2}-1}=-2$，故直线 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$，

故直线 l 的方程为：$y=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+1$，即 $2x-4y+3=0$，

故选：C.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ## $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用正弦定理可求 $\sin B$.

【详解】由正弦定理可得 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{a}{\sin A}$，故 $\dfrac{10}{\sin B}=\dfrac{15}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，故 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{15}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

12. 【答案】 ①. 8 ②. $-n^2+9n$

【解析】

【分析】

由等比数列的性质得 $a_3^2=a_1\cdot a_4$，解出 a_1 的值，再结合等差数列的前 n 项和公式可得结果.

【详解】因为数列$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，a_1,a_3,a_4成等比数列，

所以$a_3^2=a_1\cdot a_4$，即$\left(a_1-4\right)^2=a_1\left(a_1-6\right)$，解得$a_1=8$；

所以$S_n=8n+\frac{n\left(n-1\right)}{2}\times\left(-2\right)=-n^2+9n$，

故答案为：8，$-n^2+9n$.

13. 【答案】$\frac{28}{3}$

【解析】

【分析】对$f(x)$求导，根据题意建立关于a，b的方程组，解出a，b的值，进而利用导数可得到答案.

【详解】解：$f'(x)=3ax^2+b$，依题意，$\begin{cases}f'\left(2\right)=12a+b=0\\ \left(27a+b\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3}\\ b=-4\end{cases}$，经检验，符合题意，

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$，$f'(x)=x^2-4=(x+2)(x-2)$，

易知，当$x\in\left(-\infty,-2\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in\left[-2,0\right]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

$\therefore$函数$y=f(x)$在$\left(-\infty,0\right]$上的最大值为$f(-2)=\frac{1}{3}\times(-8)+8+4=\frac{28}{3}$.

故答案为：$\frac{28}{3}$.

14. 【答案】$1-\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】设$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角为θ，根据已知，利用向量的数量积的运算将$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$化为关于$\theta$的三角函数表达式，进而利用三角函数的性质求得最小值.

【详解】$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，且$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$均为单位向量，

$\therefore\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\sqrt{1^2+1^2+2\times0}=\sqrt{2}$，

$|\vec{c}|=1$，$\vec{c}^2=1$，

$\therefore\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}+\vec{c}^2=1-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

设$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$的夹角为θ，

则$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=1-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta=1-\sqrt{2}\cos\theta$.

故$\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{c}\right)$的最小值为$1-\sqrt{2}$.

故答案为：$1-\sqrt{2}$.

15. 【答案】 ①. -1 ②. $(-\infty,0]\cup(1,2]$

【解析】

【分析】当 $a=1$ 时，分别求解两段函数的最小值，取最小值中的最小者可得 $f(x)$ 的最小值；分别求 $y=2^x-1$ 与 $y=4\left(x^2-3x+2\right)$ 的零点，再对 a 分类讨论得答案.

【详解】解：若 $a=1$，则当 $x<1$ 时，$f(x)=2^x-1<2-1=1$；

当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-1$，当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 的最小值为-1.

$\therefore f(x)$ 的最小值为-1；

由 $2^x-1=0$，解得 $x=0$；

由 $4\left(x^2-3x+2\right)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=2$.

若 $a\leq 0$，则函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，分别为 1，2，符合题意；

若 $0<a\leq 1$，则函数 $f(x)$ 有 3 个零点，分别为 0，1，2，不符合题意；

若 $1<a\leq 2$，则函数 $f(x)$ 有 2 个零点，分别为 0，2，符合题意；

若 $a>2$，则函数 $f(x)$ 有 1 个零点 0，不符合题意.

综上所述，满足题意的实数 a 的取值范围是 $(-\infty,0]\cup(1,2]$.

故答案为：-1；$(-\infty,0]\cup(1,2]$.

三、解答题（本题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

16. 【答案】（I）答案见解析；（II）答案见解析.

【解析】

【分析】

选① (I)逆用余弦的二倍角公式降幂后，使用辅助角公式化简得 $f(x)=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)$ ，根据对称轴求得 φ 的值，进而求得 a 的值，得到函数的解析式，求得最小正周期；

（II） 根据正弦函数的单调性，利用整体代换法求得 $f(x)$ 的递增区间.

选② (I)逆用余弦的二倍角公式降幂得到 $f\left(x\right)=a\sin 2x+\cos 2x$，根据选择的条件求得 a 的值，得到函数的解析式，并利用辅助角公式化简，然后求得 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）根据正弦函数的单调性，利用整体代换法求得 $f(x)$ 的递增区间.

选③逆用余弦的二倍角公式降幂后，使用辅助角公式化简得到 $f\left(x\right)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

然后求得 $f(x)$ 的最小正周期；

（II）根据正弦函数的单调性，利用整体代换法求得 $f(x)$ 的递增区间.

【详解】**选①** （$f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$）

解：(I) $f\left(x\right)=a\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$=a\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin 2x+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos 2x\right)$

$=\sqrt{a^2+1}\sin(2x+\varphi)$（其中 $\tan\varphi=\frac{1}{a}$）

因为 $f(x)$ 图像的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{8}$

所以 $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{a^2+1}\sin(\frac{\pi}{4}+\varphi)=\pm\sqrt{a^2+1}$

即有 $\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$

所以 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$

所以 $\tan\varphi=\tan(k\pi+\frac{\pi}{4})=\tan\frac{\pi}{4}=1=\frac{1}{a}$

$\therefore a=1$

故 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（II）$\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$

$\therefore -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in Z$

$\therefore -\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi,k\in Z$

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $[-\frac{3\pi}{8}+\mathrm{k}\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi],\mathrm{k}\in Z$

选② ($f(\frac{\pi}{4})=1$)

解：(I) $f\left(x\right)=a\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$=a\sin 2x+\cos 2x$

$\therefore f(\frac{\pi}{4})=a\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1$

$\therefore a=1$

$f(x)=\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（II） $\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$

$\therefore -\frac{3\pi}{4}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in Z$

$\therefore -\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi, k\in Z$

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi], k\in Z$

选③（$a=\sqrt{3}$）

解：（I） $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x)$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

所以 $f(x)$ 的最小正周期为：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（II） $\because -\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$

$\therefore -\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le 2x\le\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in Z$

$\therefore -\frac{\pi}{3}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$

所以 $f(x)$ 的递增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi], k\in Z$

【点睛】本题考查三角函数的恒等变形和三角函数的性质，关键是逆用余弦的二倍角公式降幂后，并使用辅助角公式化简.

17. 【答案】(I) $a_n=2^n$，$b_n=2^n-4n+7$，$n\in\mathbf{N}^*$.（II）$T_n=2^{n+1}-2n^2+5n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

【解析】

【分析】(I)设公比为 q,公差为 d,再利用基本量法求解即可.

(II)由(I)可知 $b_n=2^n-4n+7$,再用分组与等差等比数列求和的方法即可.

【详解】解：(I)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q,等差数列 $\{b_n-a_n\}$ 的公差为 d.

因为 $a_1=2, S_3=a_1+a_2+a_3=14$,所以 $q^2+q-6=0$.

解得 $q=2$ 或 $q=-3$（舍）.

又因为 $b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3$ 成等差数列,

所以 $(b_3-a_3)=(b_1-a_1)+2d$.

解得 $d=-4$.

所以 $a_n=2^n, b_n=2^n-4n+7, n\in\mathbf{N}^*$.

(II)由(I)知, $b_n=2^n-4n+7$.

因此数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=(2+2^2+\cdots+2^n)-4(1+2+\cdots+n)+7n$,

所以,数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n=2^{n+1}-2n^2+5n-2, n\in\mathbf{N}^*$.

【点睛】本题主要考查了基本量求解数列的方法,同时也考查了等比等差数列求和的公式等.属于中档题.

18. 【答案】(I) 4；(II) $\frac{3}{4}$.

【解析】

【详解】试题分析:（I）由 A,B,C 成等差数列求得 B 的值，再由余弦定理求得 C 的值；（II）因为 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，利用两角和差的正弦公式化简函数 t 的解析式，再利用正弦函数的定义域和值域，求得 t 的最大值.

试题解析:（I）因为角 A，B，C 成等差数列，所以 $2B=A+C$，

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$..............................2 分

因为 $b=\sqrt{13}$，$a=3$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

所以 $c^2-3c-4=0$，

所以 $c=4$ 或 $c=-1$（舍去）.

（II）因为 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，

所以 $t=\sin A\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)=\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sin\left(2A-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，所以 $-\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$，

所以当 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，t 有最大值 $\frac{3}{4}$.

考点：三角函数的基本性质.

19. 【答案】（1）见解析；

（2）见解析；　　（3）见解析.

【解析】

【分析】（1）求出函数的导数，讨论其符号后可得函数的单调性；

（2）利用判别式可判断导数的符号，从而可证函数在$\left(0,+\infty\right)$上是增函数；

（3）结合（1）的讨论可求函数的最小值，从而可证不等式成立.

【小问 1 详解】

$f'\left(x\right)=\dfrac{x^2+\left(m-2\right)x-2m}{x}=\dfrac{\left(x+m\right)\left(x-2\right)}{x}$，

当$m=-1$时，$f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{x}$，

当$0<x<1$或$x>2$时，$f'\left(x\right)>0$；当$1<x<2$时，$f'\left(x\right)<0$，

故$f\left(x\right)$的增区间为$\left(0,1\right),\left(2,+\infty\right)$，减区间为$\left(1,2\right)$.

【小问 2 详解】

设$g\left(x\right)=f\left(x\right)-mx$，则$g'\left(x\right)=\dfrac{x^2+\left(m-2\right)x-2m}{x}-m=\dfrac{x^2-2x-2m}{x}$，

当$m\le-\dfrac{1}{2}$时，$\Delta=4+8m\le0$，故$x^2-2x-2m\ge0$恒成立且不恒为零，

故$g'\left(x\right)\ge0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立且不恒为零，故$g\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上为增函数.

【小问 3 详解】

$f'\left(x\right)=\dfrac{\left(x+m\right)\left(x-2\right)}{x},x>1$，

当$x>2$时，$f'\left(x\right)>0$；当$1<x<2$时，$f'\left(x\right)<0$，

故$f\left(x\right)$在$\left(1,2\right)$上为减函数，在$\left(2,+\infty\right)$上为增函数，

故在$\left[1,+\infty\right)$上，$f\left(x\right)_{\min}=f\left(2\right)=2+2\left(m-2\right)-2m\ln2=2m(1-\ln2)-2$，

故$f\left(x\right)\ge2m\left(1-\ln2\right)-2$成立.

20. 【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$

（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）求出a,b后可得椭圆的方程；

（2）设直线l的方程为$y=k\left(x-1\right)$，用斜率k表示$\left|AB\right|,\left|DF\right|$后可证$\dfrac{\left|AB\right|}{\left|DF\right|}$为定值.

【小问 1 详解】

由题设可得 $a=2$，

设椭圆的半焦距为 c，则 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，故 $c=1$，故 $b=\sqrt{3}$，

故椭圆的方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

当 $k=0$ 时，$l:y=0$，此时 $|\mathrm{AB}|=4$，而 $D(0,0)$，故 $|DF|=1$，故 $\frac{|AB|}{|DF|}=4$.

当 $k\neq 0$ 时，直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases} y=k(x-1) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 可得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

此时 $\Delta=64k^4-4(3+4k^2)(4k^2-12)=144+144k^2>0$，

$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{4k^2}{3+4k^2}$，$\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{3k}{3+4k^2}$，

且 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\times\frac{\sqrt{144+144k^2}}{3+4k^2}=\frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$.

AB 的中垂线的方程为：$y=-\frac{1}{k}\left(x-\frac{4k^2}{3+4k^2}\right)-\frac{3k}{3+4k^2}$，

令 $y=0$，则 $x_D=\frac{k^2}{3+4k^2}$，故 $|DF|=\left|\frac{k^2}{3+4k^2}-1\right|=\frac{3(1+k^2)}{3+4k^2}$，

故 $\frac{|AB|}{|DF|}=4$.

21. 【答案】(I) $b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=3$；(II) 证明见解析；(III) 证明见解析.

【解析】

【分析】(I) 由题意 $a_n=2n$，可得 $A_n=2n$，$B_n=2$，进而求出 $b_n=\frac{A_n}{B_n}=n$，从而可求出结果；

(II) 由题意知 $A_{n+1}\geq A_n>0$，$0<B_{n+1}\leq B_n$，所以 $A_{n+1}B_n\geq A_nB_{n+1}$，化简整理即可求出结果；

(III) 证明：由题意知 $b_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{a_1}{a_1}=1$，及 $b_{n+1}\geq b_n$，通过分类讨论，利用等比数列的意义，反证法即可证出结论.

【详解】解：(I) $\because a_n=2n$，$\therefore A_n=2n$，$B_n=2$，

$\therefore b_n=\frac{A_n}{B_n}=n$.

$b_1=1$，$b_2=2$，$b_3=3$.

（II）证明：由题意知 $A_{n+1}\geq A_n>0$，$0<B_{n+1}\leq B_n$，

所以 $A_{n+1}B_n\geq A_nB_{n+1}$.

所以 $\frac{A_{n+1}}{B_{n+1}}\geq\frac{A_n}{B_n}$，即 $b_{n+1}\geq b_n$.

（III）证明：由题意知 $b_1=\frac{A_1}{B_1}=\frac{a_1}{a_1}=1$，及 $b_{n+1}\geq b_n$，

①当 $b_{n+1}=b_n$ 时，得 $b_n=1$，即 $\frac{A_n}{B_n}=1$.

所以 $A_n=B_n$.

所以 $a_n=a_1$.

即 $\{a_n\}$ 为公比等于 1 的等比数列.

②当 $b_{n+1}>b_n$ 时，令 $a_t=\min\{a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots\}$，则 $B_m=a_t$（$m\geq t$）.

当 $n\geq t$ 时，显然 $A_{n+1}>A_n$.

若 $a_{n+1}\leq A_n$，则 $A_{n+1}=A_n$，与 $A_{n+1}>A_n$ 矛盾，

所以 $a_{n+1}>A_n\geq a_n$，即 $A_{n+1}=a_{n+1}$.

取 $n_0=t+1$，当 $n\geq n_0$ 时，$b_n=\frac{A_n}{B_n}=\frac{a_n}{a_t}$，显然 a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，…是等比数列.

综上，存在正整数 n_0，使得 $n\geq n_0$ 时，a_n，a_{n+1}，a_{n+2}，…是等比数列.