2022北京四十三中初二（下）期中

数　　学

一、选择题（本题共30分，每小题3分。第1-10题均有四个选项，符合题意的选项只有一个）

1．若代数式$\sqrt{x-2}$在实数范围内有意义，则x的取值范围是(　　)

A．$x<2$　　B．$x>2$　　C．$x\geqslant 2$　　D．$x\leqslant 2$

2．下列各组数中，不能构成直角三角形三边长的是(　　)

A．10，8，6　　B．1，1，$\sqrt{2}$　　C．5，12，13　　D．1，2，3

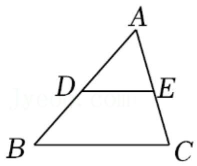
3．下列二次根式中，最简二次根式是(　　)

A．$\sqrt{3}$　　B．$\sqrt{4}$　　C．$\sqrt{8}$　　D．$\sqrt{\frac{1}{2}}$

4．下列运算中正确的是(　　)

A．$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$　　C．$\sqrt{8}\div\sqrt{2}=4$　　D．$(-\sqrt{3})^2=-3$

5．如图，DE是ΔABC的中位线，若$DE=4$，则BC的长为(　　)

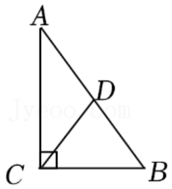


A．8　　B．7　　C．6　　D．7.5

6．下列$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$的值中，能判定四边形$ABCD$是平行四边形的是(　　)

A．1:2:3:4　　B．1:4:2:3　　C．1:2:2:1　　D．3:2:3:2

7．如图，在ΔABC中，$\angle ACB=90^{\circ}$，点D是AB的中点．连接CD，若$AC=4$，$BC=3$，则CD的长度是(　　)



A．1.5　　B．2　　C．2.5　　D．5

8．下列命题中是真命题的选项是(　　)

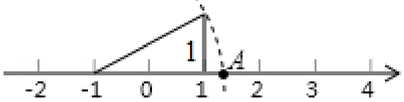
A．一组对边平行，另一组对边相等的四边形是平行四边形

B．对角线互相垂直且相等的四边形是正方形

C．对角线相等的平行四边形是矩形

D．三条边都相等的四边形是菱形

9．如下图，数轴上点A所表示的数是(　　)



A．$\sqrt{5}$　　B．$-\sqrt{5}+1$　　C．$\sqrt{5}+1$　　D．$\sqrt{5}-1$

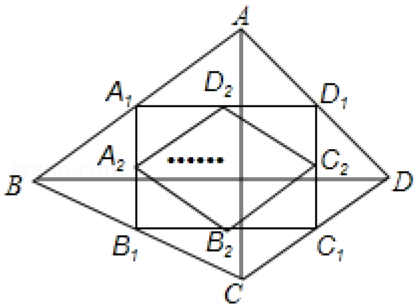
10．如图，四边形 $ABCD$ 中，$AC=a$，$BD=b$，且 $AC\perp BD$，顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$，再顺次连接四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 各边中点，得到四边形 $A_2B_2C_2D_2$，…，如此进行下去，得到四边形 $A_nB_nC_nD_n$．下列结论正确的有(　　)

①四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是矩形；

②四边形 $A_4B_4C_4D_4$ 是菱形；

③四边形 $A_5B_5C_5D_5$ 的周长是 $\dfrac{a+b}{4}$；

④四边形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积是 $\dfrac{ab}{2^{n+1}}$．



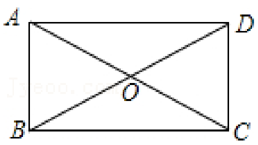
A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

二、填空题（本题共 21 分，第 11～15 每小题 3 分，第 16～18 每小题 3 分）

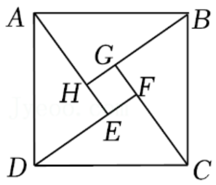
11．$(2\sqrt{5})^2=$____．

12．在平行四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle B+\angle D=160^\circ$，$\angle C=$____．

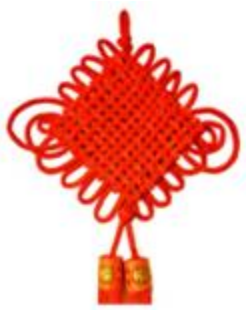
13．如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC=8cm$，$\angle AOD=120^\circ$，则 AB 的长为____cm．

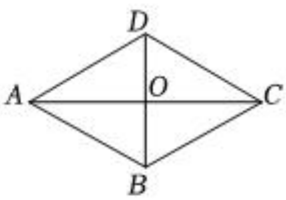


14．三国时期，数学家赵爽绘制了“勾股圆方图”，又叫“赵爽弦图”，如图所示，ΔABH、ΔBCG、ΔCDF 和 ΔDAE 是四个全等的直角三角形，四边形 $ABCD$ 和四边形 $EFGH$ 都是正方形，如果 $EF=1$，$AH=3$，那么四边形 $ABCD$ 的面积等于____．

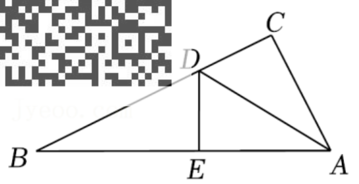


15．中国结，象征着中华民族的历史文化与精致．小明家有一中国结挂饰，他想知道周长，利用所学知识抽象出如图所示的菱形 $ABCD$，测得 $BD=12cm$，$AC=16cm$，则菱形 $ABCD$ 的周长为____cm．



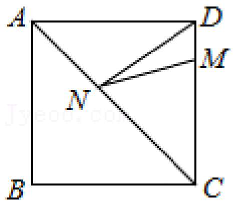


16．（2 分）如图，有一块直角三角形纸片，两直角边 $AC=5cm$， $BC=12cm$，现将直角边 AC 沿直线 AD 对折，使它落在斜边 AB 上，且与 AE 重合，CD 的长为____cm．



17．（2 分）如果表示 a、b 的实数的点在数轴上的位置如图所示，那么化简 $|a-b|+\sqrt{(a+b)^2}$ 的结果是_____．

18．（2 分）如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 8，点 M 在 DC 上且 $DM=2$， N 是 AC 上的一动点，则 $DN+MN$ 的最小值是____．



三、解答题（本题共 49 分）

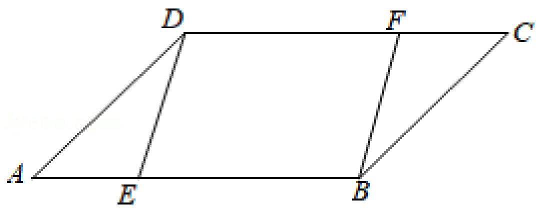
19．（8 分）计算：

（1） $\sqrt{18}+\sqrt{10}\div\sqrt{5}$；

（2） $\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{8}$．

20．（4 分）已知 $x+y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$， $x-y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，求代数式 xy^2-x^2y 的值．

21．（4 分）已知：如图，▱$ABCD$ 中， E， F 是 AB， CD 上两点，且 $AE=CF$．求证： $DE=BF$．

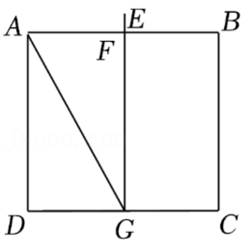


22．（5 分）《九章算术》中“勾股”一章有记载：今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺．引葭赴岸，适与岸齐．问葭长几何．其大意为：有一个水池，水面是一个边长为 10 尺的正方形，在水池正中央有一根芦苇，它高出水面 1 尺．如果把这根芦苇拉向水池一边的中点，它的顶端恰好到达池边的水面，求芦苇的长度．(1 丈 = 10 尺）

解决下列问题：

（1）示意图中，线段 AF 的长为____尺，线段 EF 的长为____尺；

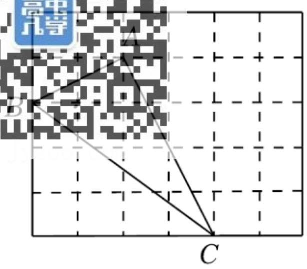
（2）求芦苇的长度．



23．（7 分）如图，在正方形网格中，小正方形的边长为 1， A， B， C 为格点．

（1）判断 ΔABC 的形状，并说明理由；

（2）求 BC 边上的高.



24.（6 分）阅读材料，然后作答：

在化简二次根式时，有时会碰到形如 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ 这一类式子，通常进行这样的化简：$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=(\sqrt{3}-1)$，这种把分母中的根号化去叫做分母有理化．还有一种方法也可以将 $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$ 进行分母有理化：

例如：$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3})^2-1^2}{\sqrt{3}+1}=\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$．

请仿照上述方法解决下面问题：

（1）$\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 分母有理化的结果是____．

（2）$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ 分母有理化的结果是____．

（3）$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 分母有理化的结果是____．

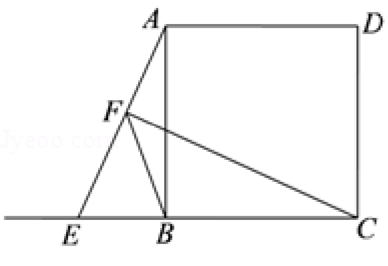
25.（8 分）已知正方形 $ABCD$，点 E 是 CB 延长线上一点，位置如图所示，连接 AE，过点 C 作 $CF\perp AE$ 于点 F，连接 BF．

（1）求证：$\angle FAB=\angle BCF$；

（2）作点 B 关于直线 AE 的对称点 M，连接 BM，FM．

①依据题意补全图形；

②用等式表示线段 CF，AF，BM 之间的数量关系，并证明．



26.（7 分）定义：有一个内角为 90°，且对角线相等的四边形称为准矩形．

（1）如图 1，准矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，若 $AB=2$，$BC=4$，则 $BD=$____；

（2）如图 2，正方形 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是边 AD，AB 上的点，且 $CF\perp BE$，求证：四边形 $BCEF$ 是准矩形；

（3）如图 3，准矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，$AC=DC$，求这个准矩形的面积．

图 1

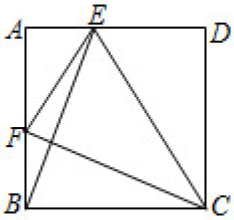


图 2

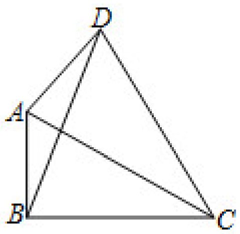


图 3

四、选做题（满分 10 分）

27.（4 分）《见微知著》谈到：从一个简单的经典问题出发，从特殊到一般，由简单到复杂，从部分到整体，由低维到高维，知识与方法上的类比是探索发展的重要途径．恒等变形，是代数式求值的一个很重要的方法．利用恒等变形，可以把无理数运算转化为有理数运算，可以把次数较高的代数式转化为次数较低的代数式．

如：当 $x=\sqrt{3}+1$ 时，求 $\frac{1}{2}x^3-x^2-x+2$ 的值．若直接把 $x=\sqrt{3}+1$ 代入所求的式中，进行计算，显然很麻烦，我们可以通过恒等变形，对本题进行解答．

方法：将条件变形，因 $x=\sqrt{3}+1$，得 $x-1=\sqrt{3}$，再把等式两边同时平方，把无理数运算转化为有理数运算．

由 $x-1=\sqrt{3}$ 平方得 $(x-1)^2=3$，整理可得：$x^2-2x=2$，即 $x^2=2x+2$．

所以 $\frac{1}{2}x^3-x^2-x+2=\frac{1}{2}x(2x+2)-x^2-x+2=x^2+x-x^2-x+2=2$．

请参照以上的解决问题的思路和方法，解决以下问题：

（1）若 $x=\sqrt{2}-1$，则 $(x+1)^2=$____，$x^3+2x^2-x+2=$____；

（2）若 $a^2-3a+1=0$，求 $2a^3-5a^2+6+\frac{3}{a^2+1}$ 的值．

28.（6 分）已知正方形 $ABCD$，点 E，F 分别在射线 AB，射线 BC 上，$AE=BF$，DE 与 AF 交于点 O．

（1）如图 1，当点 E，F 分别在线段 AB，BC 上时，则线段 DE 与 AF 的数量关系是____，位置关系是____．

（2）如图 2，当点 E 在线段 AB 延长线上时，将线段 AE 沿 AF 进行平移至 FG，连接 DG．

①依题意将图 2 补全；

②请你通过实验和观察，试猜想在点 E 运动的过程中线段 DG，AD，AE 的数量关系，并证明你的结论．

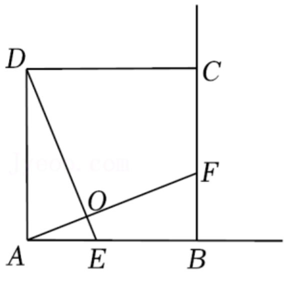


图1

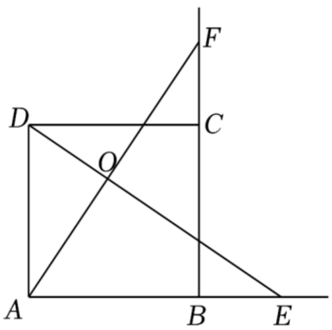


图2

参考答案

选择题（本题共 30 分，每小题 3 分。第 1-10 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个）

1.【分析】二次根式的被开方数是非负数.

【解答】解：依题意得 $x-2\geqslant 0$，

解得 $x\geqslant 2$.

故选：C.

【点评】考查了二次根式的意义和性质．概念：式子 $\sqrt{a}(a\geqslant 0)$ 叫二次根式．性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义.

2.【分析】根据勾股定理的逆定理，求出两小边的平方和，再求出大边的平方，看是否相等，即可得出答案.

【解答】解：A、$\because 6^2+8^2=10^2$，$\therefore$三角形是直角三角形，故本选项错误；

B、$\because 1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$，$\therefore$三角形是直角三角形，故本选项错误；

C、$\because 5^2+12^2=13^2$，$\therefore$三角形是直角三角形，故本选项错误；

D、$1^2+2^2\neq 3^2$，$\therefore$三角形不是直角三角形，故本选项正确.

故选：D.

【点评】本题考查了对勾股定理的逆定理的运用，勾股定理的逆定理是：如果一个三角形的三边分别是 a、b、c（c 最大）满足 $a^2+b^2=c^2$，则三角形是直角三角形.

3.【分析】利用最简二次根式定义判断即可.

【解答】解：A、$\sqrt{3}$ 是最简二次根式，符合题意；

B、$\sqrt{4}=2$，不满足题意；

C、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，不满足题意；

D、$\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，不满足题意.

故选：A.

【点评】此题考查了最简二次根式，熟练掌握最简二次根式定义是解本题的关键.

4.【分析】利用二次根式的相应的运算法则对各项进行运算即可.

【解答】解：A、$\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，故 A 符合题意；

B、$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不属于同类二次根式，不能运算，故 B 不符合题意；

C、$\sqrt{8}\div\sqrt{2}=2$，故 C 不符合题意；

D、$(-\sqrt{3})^2=3$，故 D 不符合题意；

故选：A.

【点评】本题主要考查二次根式的混合运算，解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

5.【分析】根据三角形中位线定理解答即可.

【解答】解：$\because DE$ 是 ΔABC 的中位线，$DE=4$，

$\therefore BC=2DE=8$，

故选：A.

【点评】本题考查的是三角形中位线定理，掌握三角形的中位线等于第三边的一半是解题的关键.

6.【分析】两组对角分别相等的四边形是平行四边形，所以$\angle A$和$\angle C$是对角，$\angle B$和$\angle D$是对角，对角的份数应相等，只有选项D符合.

【解答】解：根据平行四边形的判定：两组对角分别相等的四边形是平行四边形，所以只有D符合条件.

故选：D.

【点评】本题考查了平行四边形的判定，在应用判定定理判定平行四边形时，应仔细观察题目所给的条件，仔细选择适合于题目的判定方法进行解答，避免混用判定方法.

7.【分析】先用勾股定理求得AB的长，然后利用直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半求得CD的长度.

【解答】解：$\because \angle ACB = 90^\circ$，$AC = 4$，$BC = 3$，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$，

$\because$点D是AB的中点，

$\therefore CD = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 5 = 2.5$.

故选：C.

【点评】本题考查了勾股定理和直角三角形的性质，解题的关键是熟知“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”.

8.【分析】利用平行四边形、矩形、菱形及正方形的判定方法分别判断后，即可确定正确的选项.

【解答】解：A、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，原命题是假命题；

B、对角线互相平分、垂直且相等的四边形是正方形，原命题是假命题；

C、对角线相等的平行四边形是矩形，是真命题；

D、四条边都相等的四边形是菱形，原命题是假命题；

故选：C.

【点评】考查了命题与定理的知识，解题的关键是了解平行四边形、矩形、菱形及正方形的判定方法，难度不大.

9.【分析】先根据勾股定理计算出$BC = \sqrt{5}$，则$BA = BC = \sqrt{5}$，然后计算出AD的长，接着计算出OA的长，即可得到点A所表示的数.

【解答】解：如图，$BD = 1 - (-1) = 2$，$CD = 1$，

$\therefore BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$，

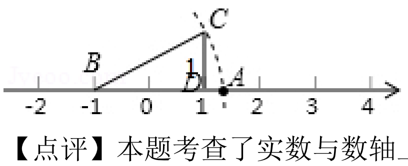
$\therefore BA = BC = \sqrt{5}$，

$\therefore AD = \sqrt{5} - 2$，

$\therefore OA = 1 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5} - 1$，

$\therefore$点A表示的数为$\sqrt{5} - 1$.

故选：D.



【点评】本题考查了实数与数轴上的点的一一对应关系．也考查了勾股定理.

10.【分析】首先根据题意，找出变化后的四边形的边长与四边形$ABCD$中各边长的长度关系规律，然后对以下选

项作出分析与判断：

①根据矩形的判定与性质作出判断；

②根据菱形的判定与性质作出判断；

③由四边形的周长公式：周长＝边长之和，来计算四边形 $A_5B_5C_5D_5$ 的周长；

④根据四边形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积与四边形 $ABCD$ 的面积间的数量关系来求其面积.

【解答】解：①连接 A_1C_1， B_1D_1.

$\because$ 在四边形 $ABCD$ 中，顺次连接四边形 $ABCD$ 各边中点，得到四边形 $A_1B_1C_1D_1$，

$\therefore A_1D_1//BD$， $B_1C_1//BD$， $C_1D_1//AC$， $A_1B_1//AC$；

$\therefore A_1D_1//B_1C_1$， $A_1B_1//C_1D_1$，

$\therefore$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是平行四边形；

$\because AC\perp BD$， $\therefore$ 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是矩形，

$\therefore B_1D_1=A_1C_1$（矩形的两条对角线相等）；

$\therefore A_2D_2=C_2D_2=C_2B_2=B_2A_2$（中位线定理），

$\therefore$ 四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是菱形；

故本选项错误；

②由①知，四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 是菱形；

$\therefore$ 根据中位线定理知，四边形 $A_4B_4C_4D_4$ 是菱形；

故本选项正确；

③根据中位线的性质易知， $A_5B_5=\frac{1}{2}A_3B_3=\frac{1}{4}A_1B_1=\frac{1}{8}AC$， $B_5C_5=\frac{1}{2}B_3C_3=\frac{1}{4}B_1C_1=\frac{1}{8}BD$，

$\therefore$ 四边形 $A_5B_5C_5D_5$ 的周长是 $2\times\frac{1}{8}(a+b)=\frac{a+b}{4}$，

故本选项正确；

④$\because$ 四边形 $ABCD$ 中， $AC=a$， $BD=b$，且 $AC\perp BD$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=ab\div 2$；

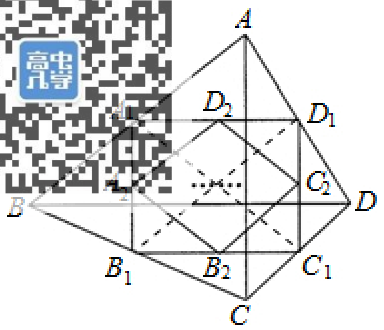
由三角形的中位线的性质可以推知，每得到一次四边形，它的面积变为原来的一半，

四边形 $A_nB_nC_nD_n$ 的面积是 $\frac{ab}{2^{n+1}}$，

故本选项正确.

综上所述，②③④正确.

故选： C.



【点评】本题主要考查了菱形的判定与性质、矩形的判定与性质及三角形的中位线定理（三角形的中位线平行于第三边且等于第三边的一半）．解答此题时，需理清菱形、矩形与平行四边形的关系是最关键的．

二、填空题（本题共21分，第11～15每小题3分，第16～18每小题3分）

11．【分析】直接利用二次根式乘法运算法则求出即可．

【解答】解：$(2\sqrt{5})^2=4\times5=20$．

故答案为：20．

【点评】此题主要考查了二次根式的乘法运算，正确掌握运算法则是解题关键．

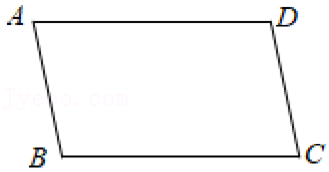
12．【分析】根据平行四边形的对角相等求得$\angle D=\angle B=80^\circ$；然后由平行四边形的对边平行和平行线的性质解答．

【解答】解：在$\square ABCD$中，$\angle B+\angle D=160^\circ$，$\angle D=\angle B$，则$\angle D=\angle B=80^\circ$．

在$\square ABCD$中，$AB//CD$，则$\angle B+\angle C=180^\circ$，

所以$\angle C=180^\circ-80^\circ=100^\circ$．

故答案是：100°．



【点评】本题主要考查了平行四边形的性质，平行四边形的对角相等，平行四边形的对边平行．

13．【分析】根据矩形的性质求出$AO=BO=4cm$，求出ΔAOB是等边三角形，即可求出AB．

【解答】解：$\because\angle AOD=120^\circ$，

$\therefore\angle AOB=60^\circ$，

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AC=BD$，$AO=OC=\frac{1}{2}\times8=4(cm)$，$BO=OD$，

$\therefore AO=BO=4cm$，

$\therefore\Delta ABO$是等边三角形，

$\therefore AB=AO=4cm$，

故答案为：4

【点评】本题考查了矩形的性质和等边三角形的性质和判定，能根据矩形的性质求出$AO=BO$是解此题的关键．

14．【分析】由题意知$BH=HG+BG=4$，在RtΔABH中，由勾股定理得，$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，从而得出答案．

【解答】解：$\because\Delta ABH$、ΔBCG、ΔCDF和ΔDAE是四个全等的直角三角形，

$\therefore BH=HG+BG=4$，

在Rt△ABH中，由勾股定理得，

$AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore$四边形$ABCD$的面积为25，

故答案为：25.

【点评】本题主要考查了“赵爽弦图”，勾股定理等知识，利用勾股定理求出AB的长是解题的关键.

15.【分析】根据菱形的对角线互相垂直平分求出两对角线的一半，再利用勾股定理列式求出边长AB，然后根据菱形的四条边都相等解答.

【解答】解：$\because AC=16cm$，$BD=12cm$，

$\therefore$两对角线的一半分别为$8cm$，$6cm$，

由勾股定理得，边长$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10(cm)$，

所以，菱形$ABCD$的周长$=4\times10=40(cm)$.

故答案为：40.

【点评】本题考查了菱形的性质，勾股定理，熟记菱形的对角线互相垂直平分并求出边长是解题的关键.

16.【分析】先根据勾股定理求得AB的长，再根据折叠的性质求得AE，BE的长，从而利用勾股定理可求得CD的长.

【解答】解：$\because AC=5cm$，$BC=12cm$，

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13cm$，

$\because AE=AC=5cm$（折叠的性质），

$\therefore BE=8cm$，

设$CD=x\ cm$，则在Rt△DEB中，$8^2+x^2=(12-x)^2$，

$\therefore x=\dfrac{10}{3}$.

故答案为：$\dfrac{10}{3}$.

【点评】本题考查了折叠的性质、一元二次方程的运用以及利用勾股定理解直角三角形的能力，即：直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

17.【分析】根据差的绝对值是大数减小数，可化简绝对值，根据二次根式的性质，可化简二次根式.

【解答】解：由题意得

$|a-b|+\sqrt{(a+b)^2}=a-b+[-(a+b)]$

$=a-b-a-b$

$=-2b$.

故答案为：$-2b$.

【点评】本题考查了二次根式的性质与化简，利用了二次根式的性质，绝对值的性质.

18.【分析】要求$DN+MN$的最小值，DN，MN不能直接求，可考虑通过作辅助线转化DN，MN的值，从而找出其最小值求解.

【解答】解：$\because$ 正方形是轴对称图形，点 B 与点 D 是关于直线 AC 为对称轴的对称点，

$\therefore$ 连接 BN，BD，

$\therefore BN=ND$，

$\therefore DN+MN=BN+MN$，

连接 BM 交 AC 于点 P，

$\because$ 点 N 为 AC 上的动点，

由三角形两边和大于第三边，

知当点 N 运动到点 P 时，

$BN+MN=BP+PM=BM$，

$BN+MN$ 的最小值为 BM 的长度，

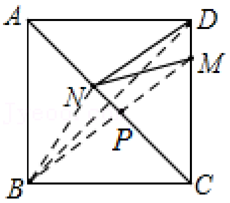
$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore BC=CD=8$，$CM=8-2=6$，$\angle BCM=90^{\circ}$，

$\therefore BM=\sqrt{6^{2}+8^{2}}=10$，

$\therefore DN+MN$ 的最小值是 10．

故答案为：10．



【点评】考查正方形的性质和轴对称及勾股定理等知识的综合应用．

三、解答题（本题共 49 分）

19．【分析】（1）先算除法，再算加减，即可解答；

（2）先算乘法，再算加减，即可解答．

【解答】解：（1）$\sqrt{18}+\sqrt{10}\div\sqrt{5}$

$=3\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=4\sqrt{2}$；

（2）$\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{8}$

$=\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{2}$

$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$．

【点评】本题考查了二次根式的混合运算，准确熟练地进行计算是解题的关键．

20．【分析】先将题目中所求式子化简，然后再根据 $x+y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$x-y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，求出 x、y 的值，再代入化简后的式子即可解答本题．

【解答】解：$xy^{2}-x^{2}y$

$=xy(y-x)$，

$\because x+y=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，$x-y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，

$\because \begin{cases} x+y=\sqrt{3}-\sqrt{2} \\ x-y=\sqrt{3}+\sqrt{2} \end{cases}$，

解得 $\begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$，

当 $x=\sqrt{3}$， $y=-\sqrt{2}$ 时，原式 $=\sqrt{3}\times(-\sqrt{2})\times(-\sqrt{2}-\sqrt{3})=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

【点评】本题考查二次根式的化简求值，解答本题的关键是明确二次根式化简求值的方法.

21.【分析】要证 $DE=BF$ ，只需证四边形 $DEBF$ 是平行四边形，而很快证出 $BE=DF$ ， $BE//DF$ ，根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形即可证出.

【解答】证明：在平行四边形 $ABCD$ 中，

$AB//CD$ ， $AB=CD$ ，

$\because AE=CF$ ，

$\therefore BE=DF$ ， $BE//DF$.

$\therefore$ 四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

$\therefore DE=BF$.

【点评】本题考查了平行四边形的判定．平行四边形的判定方法共有五种，应用时要认真领会它们之间的联系与区别，同时要根据条件合理、灵活地选择方法.

22.【分析】(1）直接利用水池正中央有一根芦苇，它高出水面 1 尺，且边长为 10 尺的正方形， E 为 AB 中点，即可得出答案；

（2）根据题意，可知 AB 的长为 10 尺，则 $EB=5$ 尺，设芦苇长 $DC=BC=x$ 尺，表示出水深 EC ，根据勾股定理建立方程，求出的方程的解即可得到芦苇的长.

【解答】解：(1）由题意可得： $AF=\dfrac{1}{2}AB=5$ 尺， $EF=1$ 尺，

故答案为：5，1；

（2）设芦苇长 $EG=AG=x$ 尺，

则水深 $FG=(x-1)$ 尺，

在 RtΔAFG 中，

$5^2+(x-1)^2=x^2$ ，

解得： $x=13$ ，

则 $EG=13$ （尺），

答：芦苇长 13 尺.

【点评】此题主要考查了勾股定理的应用，解本题的关键是数形结合以及表示出直角三角形的各边长.

23.【分析】(1）根据勾股定理的逆定理进行计算即可解答；

（2）设 ΔABC 的边 BC 上的高为 h ，然后利用等面积法进行计算即可解答.

【解答】解：(1） ΔABC 是直角三角形，

理由：由勾股定理得：

$AB^2=1^2+2^2=5$ ， $AC^2=2^2+4^2=20$ ， $BC^2=3^2+4^2=25$ ，

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$，

$\therefore \Delta ABC$是直角三角形；

（2）设ΔABC的边BC上的高为h，

在Rt△ABC中，$AB=\sqrt{5}$，$AC=2\sqrt{5}$，$BC=5$，

$\therefore \Delta ABC$的面积$=\dfrac{1}{2}AB\times AC=\dfrac{1}{2}\times BC\times h$，

$\therefore \sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=5h$，

$\therefore h=2$，

$\therefore BC$边上的高是2．

【点评】本题考查了勾股定理的逆定理，勾股定理，熟练掌握勾股定理的逆定理是解题的关键．

24．【分析】(1）根据平方差公式可以将题目中的式子分母有理化；

（2）根据平方差公式可以将题目中的式子分母有理化；

（3）根据平方差公式可以将题目中的式子分母有理化．

【解答】解：(1）$\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)\times(\sqrt{2}-1)}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1$，

故答案为：$\sqrt{2}-1$；

（2）$\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3}=\dfrac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，

故答案为：$\sqrt{5}-\sqrt{3}$；

（3）$\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，

故答案为：$\sqrt{a}-\sqrt{b}$．

【点评】本题考查二次根式的混合运算、分母有理化，解答本题的关键是明确题意，会用平方差公式将分母有理化．

25．【分析】(1）根据等角的余角相等证明即可．

（2）①根据要求画出图形即可．

②结论：$AF+BM=CF$．在CF上截取点N，使得$CN=AF$，连接BN．证明$\Delta AFB\cong\Delta CNB(SAS)$，推出$\angle ABF=\angle CBN$，$FB=NB$，再证明四边形$FMBN$为平行四边形，可得结论．

【解答】(1）证明：$\because CF\perp AE$，

$\therefore \angle EFC=90^\circ$，

$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

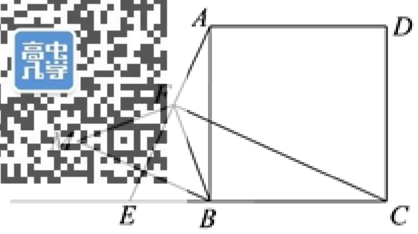
$\therefore \angle ABE=90^\circ$，

$\therefore \angle EFC=\angle ABE$，

又$\because \angle AEB=\angle CEF$，$\angle AEB+\angle FAB=90^\circ$，$\angle CEF+\angle BCF=90^\circ$，

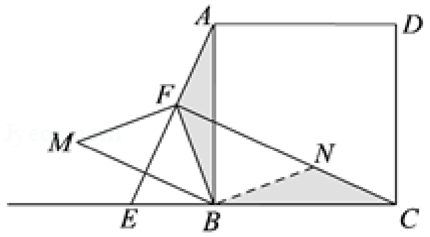
$\therefore \angle FAB=\angle BCF$．

（2）①如图：图形即为所求作．



②解：结论： $AF+BM=CF$.

理由：在 CF 上截取点 N ，使得 $CN=AF$ ，连接 BN .



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=CB$.

在 ΔAFB 和 ΔCNB 中，

$$\begin{cases} AF=CN \\ \angle FAB=\angle NCB \\ AB=CB \end{cases}$$

$\therefore \Delta AFB\cong \Delta CNB(SAS)$ ，

$\therefore \angle ABF=\angle CBN$ ， $FB=NB$ ，

$\therefore \angle FBN=\angle ABC=90^{\circ}$ ，

$\therefore \Delta FBN$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle BFN=45^{\circ}$.

$\because$ 点 B 关于直线 AE 的对称点是点 M ，

$\therefore FM=FB$ ，

$\because CF\perp AE$ ， $\angle BFN=45^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BFE=45^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BFM=90^{\circ}$ ，

$\therefore \angle BFM=\angle FBN$ ，

$\therefore FM//NB$.

$\because FM=FB$ ， $FB=NB$ ，

$\therefore FM=NB$ ，

$\therefore$ 四边形 $FMBN$ 为平行四边形，

$\therefore BM=NF$ ，

$\therefore AF+BM=CF$.

【点评】本题考查正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的性质等知识，解题的关键是理解题

意，灵活运用所学知识解决问题.

26.【分析】（1）利用准矩形的定义和勾股定理计算，再根据准矩形的特点和整点的特点求出即可；

（2）先利用正方形的性质判断出 $\Delta ABE \cong \Delta BCF$ ，即可；

（3）作 $DF \perp BC$ ，根据梯形的面积公式，三角形面积公式即可得出答案.

【解答】解：（1）$\because \angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是准矩形，

$\therefore BD = AC = 2\sqrt{5}$.

故答案为： $2\sqrt{5}$ ；

（2）$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB = BC$ ， $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EBF + \angle EBC = 90^\circ$ ，

$\because BE \perp CF$ ，

$\therefore \angle EBC + \angle BCF = 90^\circ$ ，

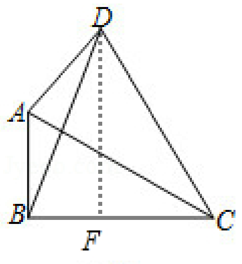
$\therefore \angle EBF = \angle BCF$ ，

$\therefore \Delta ABE \cong \Delta BCF$ ，

$\therefore BE = CF$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是准矩形；

（3）作 $DF \perp BC$，垂足为 F ，



$\because$ 准矩形 $ABCD$ 中， $AC = BD$ ， $AC = DC$ ，

$\therefore BD = CD$ ，

$\therefore BF = CF = \dfrac{1}{2} BC = \sqrt{3}$ ，

$\therefore DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}$ ，

$\therefore S_{准矩形ABCD} = S_{\Delta DCF} + S_{梯形ABFD}$

$= \dfrac{1}{2} FC \times DF + \dfrac{1}{2}(AB + DF) \times BF$ ，

$= \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{13} + \dfrac{1}{2}(2 + \sqrt{13}) \times \sqrt{3}$ ，

$= \sqrt{39} + \sqrt{3}$.

【点评】此题是四边形综合题，主要考查了新定义，勾股定理，梯形面积公式，三角形面积公式，正确运用准矩形

定义是解本题的关键.

四、解答题（满分10分）

27.【分析】（1）根据完全平方公式求出 $(x+1)^2$，把 $x^2=1-2x$ 代入计算求出 x^3+2x^2-x+2；

（2）把 $a^2-3a+1=0$ 进行恒等变形，代入计算即可.

【解答】解：（1）$\because x=\sqrt{2}-1$，

$\therefore x+1=\sqrt{2}$，

$\therefore (x+1)^2=(\sqrt{2})^2=2$；

$\therefore x^2+2x+1=2$，

$\therefore x^2=1-2x$，

$\therefore x^3+2x^2-x+2=x(1-2x)+2x^2-x+2=x-2x^2+2x^2-x+2=2$，

故答案为：2；2；

（2）$\because a^2-3a+1=0$，

$\therefore a^2+1=3a$，$a^2-3a=-1$，$a^2=3a-1$，

$\because a\neq 0$，

$\therefore a+\dfrac{1}{a}=3$，

$\therefore$ 原式 $=2a(3a-1)-5a^2+6+\dfrac{3}{3a}$

$=6a^2-2a-5a^2+6+\dfrac{1}{a}$

$=a^2-3a+6+a+\dfrac{1}{a}$

$=-1+6+3$

$=8$.

【点评】本题考查的是二次根式的化简求值，掌握代数式的恒等变形方法是解题的关键.

28.【分析】（1）由四边形 $ABCD$ 是正方形，得 $AD=BA$，$\angle DAE=\angle ABF=90^\circ$，因为 $AE=BF$，所以 $\Delta DAE\cong\Delta ABF$，得 $DE=AF$，$\angle ADE=\angle BAF$，再推导出 $\angle ADE+\angle DAF=\angle BAF+\angle DAF=\angle DAB=90^\circ$，即可证明 $DE\perp AF$；

（2）①过点 F 作 $FG//AE$，使 $FG=AE$，连接 DG，即可将图形补全；

②连接 EG，先证明四边形 $AEGF$ 是平行四边形，则 $AF=GE$，$AF//EG$，所以 $\angle GEH=\angle FAB$，再证明 $\Delta AED\cong\Delta BFA$，得 $\angle DEA=\angle AFB$，$DE=AF$，所以 $DE=GE$，由 $\angle GEH+\angle DEA=\angle FAB+AFB=90^\circ$，证得 $\angle DEG=90^\circ$，则 $DG^2=DE^2+GE^2=2DE^2$，而 $DE^2=AD^2+AE^2$，于是可求得线段 DG，AD，AE 的数量关系为 $DG^2=2AD^2+2AE^2$.

【解答】(1）解：如图1，$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=BA$，$\angle DAE=\angle ABF=90^\circ$，

$\because AE=BF$，

$\therefore \Delta DAE\cong\Delta ABF(SAS)$，

$\therefore DE = AF$， $\angle ADE = \angle BAF$，

$\therefore \angle ADE + \angle DAF = \angle BAF + \angle DAF = \angle DAB = 90^\circ$，

$\therefore \angle AOD = 90^\circ$，

$\therefore DE \perp AF$，

故答案为： $DE = AF$， $DE \perp AF$．

（2）①补全图形如图 2．

② $DG^2 = 2AD^2 + 2AE^2$，

证明：连接 EG，

由平移得 $FG//AE$， $FG = AE$，

$\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是平行四边形，

$\therefore AF = GE$， $AF//EG$，

$\therefore \angle GEH = \angle FAB$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = BA$， $\angle DAE = \angle ABF = 90^\circ$，

$\because AE = BF$，

$\therefore \Delta AED \cong \Delta BFA(SAS)$，

$\therefore \angle DEA = \angle AFB$， $DE = AF$，

$\therefore DE = GE$，

$\because \angle GEH + \angle DEA = \angle FAB + AFB = 90^\circ$，

$\therefore \angle DEG = 90^\circ$，

$\therefore DG^2 = DE^2 + GE^2 = 2DE^2$，

$\because DE^2 = AD^2 + AE^2$，

$\therefore DG^2 = 2AD^2 + 2AE^2$．

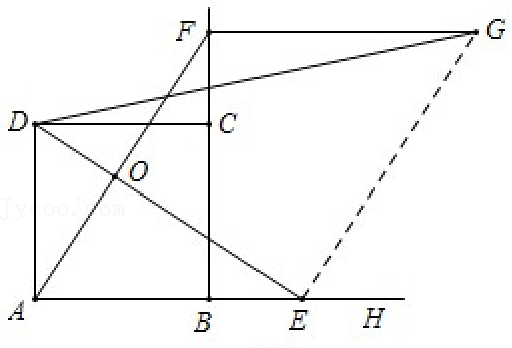


图2

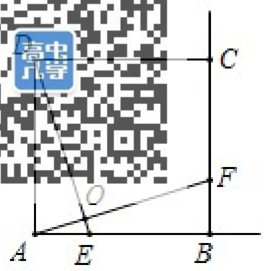


图1

【点评】此题考查正方形的性质、平移的性质、平行四边形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识，此题难度较大，正确地作出辅助线并证明$\Delta AED\cong\Delta BFA$是解题的关键.