通州区 2023—2024 学年第一学期高一年级期末质量检测

数学试卷

2024 年 1 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知全集 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$，则 $\complement_U A=$

(A)$\{x\mid x\leqslant 1\}$　　(B)$\{x\mid x\geqslant 1\}$

(C)$\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x>1\}$　　(D)$\{x\mid x<-2$ 或 $x\geqslant 1\}$

(2)下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数的是

(A)$y=\sqrt{x+1}$　　(B)$y=(x-1)^2$　　(C)$y=2^{-x}$　　(D)$f(x)=-\ln x$

(3)若 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a>b$，则

(A)$ac^2>bc^2$　　(B)$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$　　(C)$a^3>b^3$　　(D)$|a|>|b|$

(4)下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $f(x)=e^{\ln x}$ 的定义域和值域相同的是

(A)$y=x$　　(B)$y=\ln e^x$　　(C)$y=\sqrt{x^2}$　　(D)$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

(5)已知 $a=2^{0.3}$，$b=\log_{0.3}2$，$c=0.5^{0.3}$，则

(A)$c>a>b$　　(B)$c>b>a$　　(C)$a>b>c$　　(D)$a>c>b$

(6)已知函数 $f(x)=\log_2 x+2x-3$，在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是

(A)$(-1,0)$　　(B)$(0,1)$　　(C)$(1,2)$　　(D)$(2,3)$

(7)若函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)$ 是奇函数，则 φ 可取的一个值为

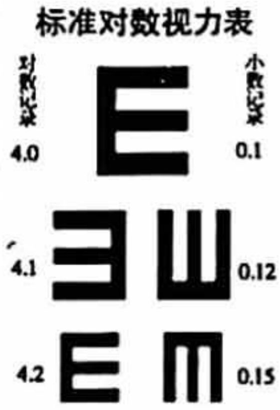
(A)$-\pi$　　(B)$-\frac{\pi}{2}$　　(C)$\frac{\pi}{4}$　　(D)2π

(8)设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\cos x=0$”是“$\sin x=1$”的

(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

(9)国家标准对数视力表是由我国第一个眼科光学研究室的创办者缪天荣发明设计的，右图是 5 米测距下的标准对数视力表的一部分．图中左边一列数据为标准对数记录法记录的近似值 L：4.0，4.1，4.2…对应右边一列数据为小数记录法记录的近似值 V：0.1，0.12，0.15…．已知标准对数记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=K+\lg V$（K 为常数）．某同学测得视力的小数记录法数据为 0.6，则其标准对数记录法的数据约为（参考数据：$\lg 2\approx 0.30$，$\lg 3\approx 0.48$）



(A)4.8　　(B)4.9

(C)5.0　　(D)5.1

(10)设函数 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2$，$m(x)=\log_a x(a>1)$，$n(x)=kx(k>0)$，则下列结论正确的是

(A)函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象有且只有两个公共点

(B)$\exists x_0\in\mathbf{R}$，当 $x>x_0$ 时，使得 $f(x)<g(x)$ 恒成立

(C)$\exists x_0\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_0)<m(x_0)$ 成立

(D)当 $ak\leqslant 1$ 时，方程 $m(x)=n(x)$ 有解

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11)函数 $f(x)=\ln(2-x)$ 的定义域是________.

(12)计算 $4^{\frac{1}{2}}-\lg 2-\lg 5=$________.

(13)函数 $f(x)=(x^2-1)\ln x$ 的零点个数为________.

(14)在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，终边经过点 $P(\cos(2t-\frac{\pi}{6}),\sin(2t-\frac{\pi}{6}))$，当 $t=0$ 时，则 $\tan\alpha=$________；当 t 由 0 变化到 $\frac{\pi}{6}$ 时，线段 OP 扫过的面积是________.

(15)设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+a, & x\geqslant 2,\\ |a^x-2|, & x<2\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$. 给出下列四个结论：

①当 $a=2$ 时，方程 $f(x)=a$ 有唯一解；

②当 $a\in(0,1)$ 时，方程 $f(x)=a$ 有三个解；

③对任意实数 $a(a>0$ 且 $a\neq 1)$，$f(x)$ 的值域为 $[0,+\infty)$；

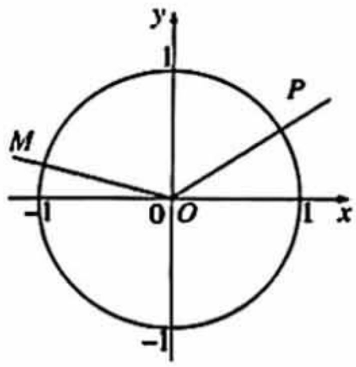
④存在实数 a，使得 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 13 分)

如图，在平面直角坐标系 xOy 中，锐角 α 和钝角 β 的顶点与原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边分别与单位圆交于点 $P(\frac{4}{5},y_1)$，$M(-\frac{2\sqrt{5}}{5},y_2)$.



(Ⅰ)求 $\sin\alpha$，$\sin\beta$ 的值；

(Ⅱ)求 $\cos\angle POM$ 的值.

(17)(本小题 15 分)

某同学用“五点法”画函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$在某一个周期内的图象时,列表并填入了部分数据,如下表:

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	2		-2	0

(Ⅰ)求函数 $y=f(x)$的解析式;

(Ⅱ)将函数 $y=f(x)$图象上所有点向右平行移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度,得到函数 $y=g(x)$的图象,求函数 $y=g(x)$的单调递增区间.

(18)(本小题 15 分)

若函数 $f(x)=2\cos\omega x(\sin\omega x+\cos\omega x)-1(0<\omega<4)$.从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知,使函数 $f(x)$存在.

(Ⅰ)求 $f(x)$的解析式与最小正周期;

(Ⅱ)求 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最值.

条件①:$f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{3}$;

条件②:$\forall x\in\mathbf{R},f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{8})$恒成立;

条件③:函数 $f(x)$的图象关于点$(-\frac{\pi}{8},0)$对称.

注:如果选择的条件不符合要求,得 0 分;如果选择多个符合要求的条件分别解答,按第一个解答计分.

(19)(本小题 14 分)

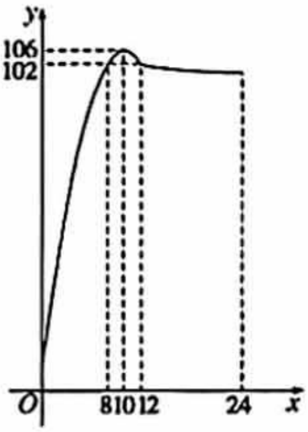
函数 $f(x)=e^{x}+me^{-x}-4,m\in \mathbf{R}$.

(Ⅰ)若 $f(x)$ 为偶函数,求 m 的值及函数 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)当 $x\in[-1,1]$ 时,函数 $f(x)$ 的图象恒在 x 轴上方,求实数 m 的取值范围.

(20)(本小题 14 分)

某城市 2024 年 1 月 1 日的空气质量指数(简称 AQI)与时间 x(单位:小时)的关系 $y=f(x)$ 满足下图连续曲线,并测得当天 AQI 的最大值为 106. 当 $x\in[0,12]$ 时,曲线是二次函数图象的一部分;当 $x\in(12,24]$ 时,曲线是函数 $y=-\log_{a}(x-10)+103$ 图象的一部分. 根据规定,空气质量指数 AQI 的值大于或等于 101 时,空气就属于污染状态.



(Ⅰ)求函数 $y=f(x)$ 的解析式;

(Ⅱ)该城市 2024 年 1 月 1 日这一天哪个时间段的空气属于污染状态?并说明理由.

(21)(本小题 14 分)

已知有 m 个连续正整数元素的有限集合 $S_m=\{1,2,3,\cdots m-1,m\}(m\in \mathbf{N}_+,m\geqslant 2)$,记有序数对 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,若对任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,m\}(i\neq j)$,$a_i,a_j\in S_m$ 且 $a_i\neq a_j$,A 同时满足下列条件,则称 A 为 m 元完备数对.

条件①:$|a_1-a_2|\leqslant|a_2-a_3|\leqslant\cdots\leqslant|a_{m-1}-a_m|$;

条件②:$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{m-1}-a_m|=m+2$.

(Ⅰ)试判断是否存在 3 元完备数对和 4 元完备数对,并说明理由;

(Ⅱ)试证明不存在 8 元完备数对.

通州区 2023—2024 学年第一学期高一年级期末质量检测

数学参考答案及评分标准

2024 年 1 月

一、选择题(共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
C	A	C	D	D	C	B	B	A	D

二、填空题(共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分)

(11)$(-\infty,2)$　　(12)1　　(13)1

(14)$-\frac{\sqrt{3}}{3}$;$\frac{\pi}{6}$　　(15)①②③

三、解答题(共 6 小题,共 85 分)

(16)(共 13 分)

解:(Ⅰ)依题意,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,$\cos\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$,而 α 为锐角,β 为钝角,

所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}$,

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-(-\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 8 分

(Ⅱ)$\cos\angle POM=\cos(\beta-\alpha)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. ………………………… 13 分

(17)(共 15 分)

解:(Ⅰ)由表格知:$A=2$ 且 $\frac{T}{2}=\frac{4\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\pi$,即 $T=2\pi$,故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=1$, ………………………… 6 分

由 $\frac{\omega\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$,故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$,则 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$. ………………………… 9 分

(Ⅱ)由题知 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{3})=2\sin(x-\frac{\pi}{6})$, ………………………… 11 分

由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ………………………… 13 分

所以 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

即函数 $y=g(x)$ 的单调增区间为 $[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi],k\in\mathbf{Z}$. ………………………… 15 分

(18)(共 15 分)

(Ⅰ)因为 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+2\cos^2\omega x-1,0<\omega<4$,

所以 $f(x)=\sin2\omega x+\cos2\omega x=\sqrt{2}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{4})$, ………………………… 6 分

若选条件①：因为 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2\omega x+\frac{\pi}{4})$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 $-\sqrt{2}$，所以 $f(\frac{\pi}{8})=\sqrt{3}$ 无解，故条件①不能使函数 $f(x)$ 存在.

若选条件②：因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant f(\frac{\pi}{8})$.

故 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{8}$ 处取最大值，

即 $\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$\omega=1+8k$，因为 $0<\omega<4$，故 $\omega=1$，

所以 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，$T=\pi$. ………………………………………… 9 分

(Ⅱ)因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则 $2x+\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$. ………………………………… 11 分

故当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取最大值 $\sqrt{2}$；

故当 $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取最小值 -1. ………………………………… 15 分

若选条件③：因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{8},0)$ 对称，

所以 $\sqrt{2}\sin(-\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4})=0$，$-\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

即 $\omega=1-4k$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $0<\omega<4$，故 $\omega=1$.

以下与条件②相同.

(19)(共 14 分)

(Ⅰ)因为函数 $f(x)=e^x+me^{-x}-4$ 为偶函数.

所以 $f(-x)=f(x)$ 恒成立，即 $e^{-x}+me^x-4=e^x+me^{-x}-4$ 恒成立，

即 $(1-m)(e^{-x}-e^x)=0$ 恒成立，解得 $m=1$. ………………………………………… 4 分

所以 $f(x)=e^x+e^{-x}-4=e^x+\frac{1}{e^x}-4$，令 $u=e^x>0$，

$y=u+\frac{1}{u}-4\geqslant 2\sqrt{u\cdot\frac{1}{u}}-4=-2$，当且仅当 $u=1$，即 $x=0$ 时，等号成立.

所以函数 $f(x)$ 的最小值为 -2. ………………………………………… 8 分

(Ⅱ)当 $x\in[-1,1]$ 时，函数 $f(x)$ 的图象恒 x 在轴上方，

故当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)=e^x+me^{-x}-4>0$ 恒成立， ………………………………… 9 分

即 $m>4e^x-e^{2x}$，$x\in[-1,1]$ 恒成立，

令 $h(x)=4e^x-e^{2x}$，令 $t=e^x$，$t\in\left[\frac{1}{e},e\right]$， ………………………………… 12 分

因为 $y=4t-t^2$，对称轴为 $t=2$，

故当 $t=2$ 即 $x=\ln2$ 时，$h(x)$ 取最大值 4，

故 $m\in(4,+\infty)$. ………………………………………… 14 分

(20)(共 14 分)

(Ⅰ)当 $x\in[0,12]$ 时,由图像可得:二次函数开口向下,顶点坐标为(10,106),且过(8,102),(12,102),可设 $f(x)=b(x-10)^2+106,b<0$,

代入点(8,102)可得 $b(8-10)^2+106=102$,解得 $b=-1$,

故当 $x\in[0,12]$ 时,$f(x)=-(x-10)^2+106$; …………………………………………… 4 分

点(12,102)代入 $y=-\log_a(x-10)+103$,解得 $a=2$,

故当 $x\in(12,24]$ 时,$f(x)=-\log_2(x-10)+103$; ………………………………………… 6 分

故 $f(x)=\begin{cases}-(x-10)^2+106,x\in[0,12]\\-\log_2(x-10)+103,x\in(12,24]\end{cases}$. …………………………………………… 7 分

(Ⅱ)当 $x\in[0,12]$ 时,令 $f(x)=-(x-10)^2+106\geqslant101$,解得 $10-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant12$, … 10 分

当 $x\in(12,24]$ 时,令 $f(x)=-\log_2(x-10)+103\geqslant101$,解得 $12<x\leqslant14$, ………… 13 分

综上所述:这一天 7 点至 14 点这个时间段的空气,空气属于污染状态. ………… 14 分

(21)(共 14 分)

(Ⅰ)当 $m=3$ 时,因为 $|a_i-a_{i+1}|\leqslant2(i=1,2)$,

所以 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|<5$,不符合题意;故不存在 3 元完备数对;

当 $m=4$ 时,当 $a_1=3,a_2=2,a_3=4,a_4=1$ 时,

满足 $|a_1-a_2|\leqslant|a_2-a_3|\leqslant|a_3-a_4|$ 且 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|=6$,符合题意,

故 $A=(3,2,4,1)$ 为 4 元完备数对. …………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ)假设存在 8 元完备数对,

当 $m=8$ 时,令 $b_k=|a_k-a_{k+1}|(k=1,2,\cdots,7)$,

则 $1\leqslant b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_7$,且 $b_1+b_2+\cdots+b_7=10$,

所以 b_k 有以下三种可能:①$b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,6)\\4,(k=7)\end{cases}$;

②$b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,5)\\2,(k=6)\\3,(k=7)\end{cases}$; ③$b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,4)\\2,(k=5,6,7)\end{cases}$

当 $b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,6)\\4,(k=7)\end{cases}$ 时,因为 $b_1=b_2=\cdots=b_6$,

即 $|a_1-a_2|=|a_2-a_3|=\cdots=|a_6-a_7|=1$.

则 $a_1,a_2,\cdots,a_7,a_8$ 分别为 $1,2,\cdots,7,8$ 或 $2,3,\cdots,8,1$ 或 $7,6,\cdots,1,8$ 或 $8,7,\cdots,2,1$.

由 $b_7=4$ 得 $a_8=a_7+4$ 或 $a_8=a_7-4$,与已知矛盾.

所以当 $b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,6)\\4,(k=7)\end{cases}$ 时,不存在 8 元完备数对.

其它情况同理可得.

综上,证明不存在 8 元完备数对. …………………………………………………………… 14 分