



2023 北京交大附中初三 12 月月考

数 学

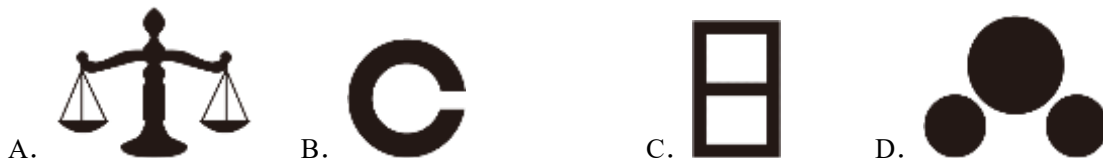
2023.11

班级：_____ 姓名：_____ 考号：_____

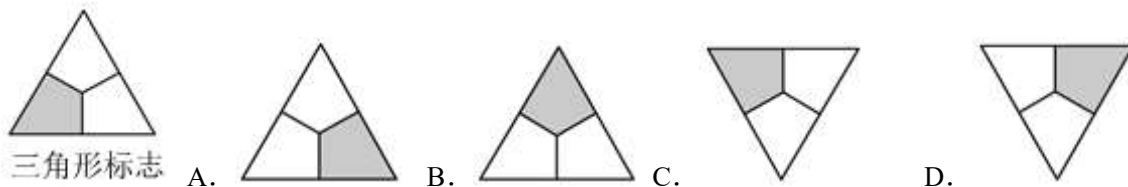
一. 选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的。

1. 各学科的图形都蕴含着对称美，下列图形中既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）



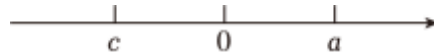
2. 如图，在平面内将三角形标志绕其中心旋转 180° 后得到的图案（ ）



3. 下列事件中，属于必然事件的是（ ）

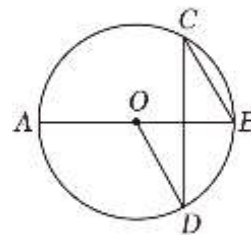
- A. 在一个只装有黑球的箱子里摸到白球
- B. 蒙上眼睛射击正中靶心
- C. 打开电视机，正在播放综艺节目
- D. 在 1 个标准大气压下，水加热到 100 摄氏度沸腾

4. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - x + c = 0$ ，其中 a, c 在数轴上的对应点如图所示，则这个方程根的情况是（ ）



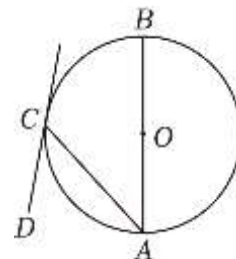
- A. 没有实数根
- B. 有两个相等的实数根
- C. 有两个不相等的实数根
- D. 无法确定

5. 如图所示， AB 是 $\odot O$ 的直径， C, D 是圆上两点，且 $\angle DCB = 30^\circ$ ，则 $\angle BOD =$ （ ）



- A. 60°
- B. 120°
- C. 30°
- D. 45°

6. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， CD 是 $\odot O$ 的切线，切点为 C ，连接 AC ，若 $\angle BAC = 40^\circ$ ，则 $\angle ACD$ 的度数为（ ）



- A. 30°
- B. 40°
- C. 50°
- D. 60°

7. 在一个不透明的盒子里装着除颜色外完全相同的黑、白两种小球共 40 个。小颖做摸球试验，她将盒子里面的球搅匀后从中随机摸出一个球记下颜色后放回，不断重复上述过程，多次试验后，得到表中的数据，并得出了以下四个结论，

则其中正确的结论是（ ）

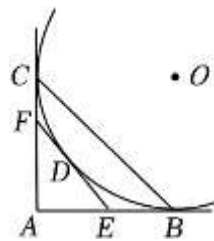
摸球的次数 n	100	200	300	500	800	1000	3000
-----------	-----	-----	-----	-----	-----	------	------



摸到白球的次数 m	70	128	171	302	481	599	1806
摸到白球的频率	0.75	0.64	0.57	0.604	0.601	0.599	0.602

- A. 这个盒子中的白球一定有 28 个
 B. 从该盒子中任意摸出一个小球，摸到白球的概率为 0.6
 C. 试验 1500 次摸到白球的频率比试验 800 次的更接近 0.6
 D. 当试验次数 n 为 2000 时，摸到白球的次数 m 一定等于 1200

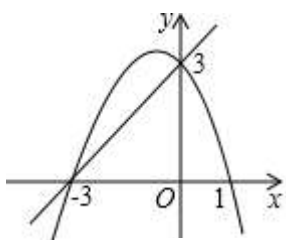
8. 如图，过点 A 作 $\odot O$ 的切线 AB, AC ，切点分别是 B, C ，连接 BC 。过 \widehat{BC} 上一点 D 作 $\odot O$ 的切线，交 AB, AC 于点 E, F 。若 $\angle A = 90^\circ$ ， $\triangle AEF$ 的周长为 4，则 BC 的长为 ()



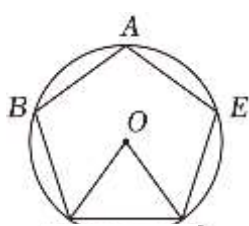
- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

二. 填空题 (本题共 16 分，每小题 2 分)

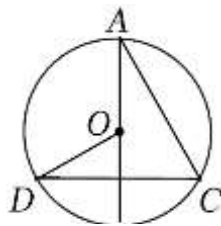
9. 若点 $M(1, 2)$ 、 $N(5, 2)$ 在抛物线 $y = (x - h)^2 + k$ 上，则 h 的值为_____。
 10. 二次函数 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与一次函数 $y_2 = mx + n$ 的图象如图所示，则满足 $ax^2 + bx + c > mx + n$ 的 x 的取值范围是_____。
 11. 如图，正五边形 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$ ，连接 OC, OD ，则 $\angle COD =$ _____。



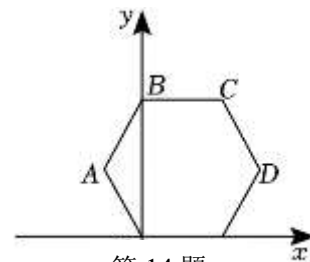
第 10 题



第 11 题



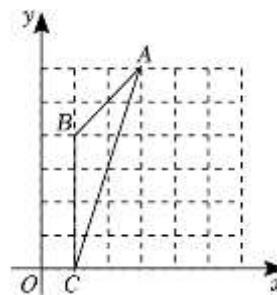
第 12 题



第 14 题

12. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 是直径， $CD \perp AB$ ， $\angle ACD = 60^\circ$ ， $OD = 2$ ，那么 DC 的长等于_____。
 13. 关于 x 的一元二次方程 $(a - 2)x^2 + x + a^2 - 4 = 0$ 的一个根是 0，则 a 的值为_____。

14. 如图，在平面直角坐标系中，正六边形 $OABCDE$ 的边长是 4，则它的内切圆圆心 M 的坐标_____。
 15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $A(3, 6)$ ， $B(1, 4)$ ， $C(1, 0)$ ，则 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心_____。



第 15 题

16. 某跨学科综合实践小组准备购买一些盒子存放实验材料。现有 A, B, C 三种型号的盒子，盒子容量和单价如表所示：

盒子型号	A	B	C
盒子容量/升	2	3	4
盒子单价/元	5	6	9



其中 A 型号盒子做促销活动：购买三个及三个以上可一次性返现金 4 元，现有 28 升材料需要存放且每个盒子要装满材料.

(1) 若购买 A, B, C 三种型号的盒子的个数分别为 2, 4, 3, 则购买费用为 _____元;

(2) 若一次性购买所需盒子且使购买费用不超过 58 元, 则购买 A, B, C 三种型号的盒子的个数分别为 _____. (写出一种即可)

三. 解答题 (共 68 分, 第 18、19、24、25 题每题 6 分, 第 17、20~23、25 每题 5 分, 第 27~28 每题 7 分)

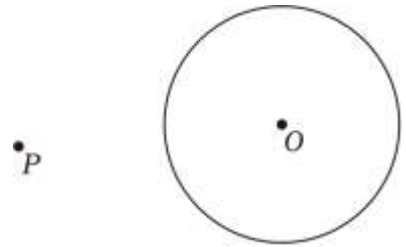
17. 在一个不透明的口袋里装有若干个相同的红球, 为了估计袋中红球的数量, 八 (1) 班学生在数学实验室分组做摸球试验: 每组先将 10 个与红球大小形状完全相同的白球装入袋中, 搅匀后从中随机摸出一个球并记下颜色, 再把它放回袋中, 不断重复. 下表是这次活动统计汇总各小组数据后获得的全班数据统计表:

摸球的次数 s	150	300	600	900	1200	1500
摸到白球的频数 n	63	a	247	365	484	606
摸到白球的频率 $\frac{n}{s}$	0.420	0.410	0.412	0.406	0.403	b

- (1) 按表格数据格式, 表中的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$; $b = \underline{\hspace{2cm}}$;
- (2) 请估计: 当次数 s 很大时, 摸到白球的频率将会接近 _____ (精确到 0.1);
- (3) 请推算: 摸到红球的概率是 _____ (精确到 0.1);
- (4) 试估算: 这一个不透明的口袋中红球有 _____ 个.

18. 已知: $\odot O$ 和圆外一点 P , 求作: 过点 P 的 $\odot O$ 的切线.

- 作法: ①作射线 PO , 交 $\odot O$ 于点 M, N ;
- ②以 P 为圆心, PO 为半径作 $\odot P$, 以 O 为圆心, MN 的长为半径画弧交 $\odot P$ 于点 A ;
- ③连接 PA, OA, OA 交 $\odot O$ 于点 B ;
- ④作直线 PB .



所以直线 PB 为 $\odot O$ 的切线.

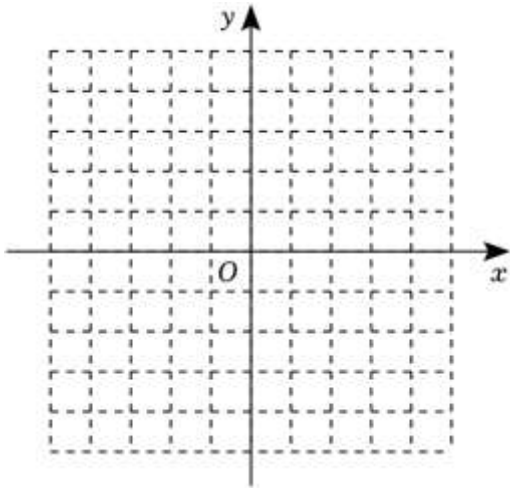
- (1) 使用直尺和圆规进行尺规作图, 依作法补全图形 (保留作图痕迹);
- (2) 完成下面的证明.

证明: $\because OA = MN, OB = OM,$
 $\therefore OB = \frac{1}{2} OA.$
 $\because PO = PA,$
 $\therefore PB \perp OA.$ (_____) (填推理的依据)
 \therefore 半径 $OB \perp BP.$
 \therefore 直线 PB 为 $\odot O$ 的切线. (_____) (填推理的依据)

19. 已知二次函数 $y = x^2 - 4x + 3.$



- (1) 二次函数 $y=x^2 - 4x+3$ 图象与 x 轴的交点坐标是 _____，
 y 轴的交点坐标是 _____，顶点坐标是 _____；
- (2) 在平面直角坐标系 xOy 中，画出二次函数 $y=x^2 - 4x+3$ 的图象；
- (3) 当 $1 < x < 4$ 时，结合函数图象，直接写出 y 的取值范围 _____。



20. “圆”是中国文化的一个重要精神元素，在中式建筑中有着广泛的应用，例如古典园林中的门洞．如图1，其数学模型为如图2所示．园林中的一个圆弧形门洞的地面跨径 $AB=1$ 米， D 为圆上一点， $DC \perp AB$ 于点 C ，且 $CD=BC=0.7$ 米，则门洞的半径是多少？



图1

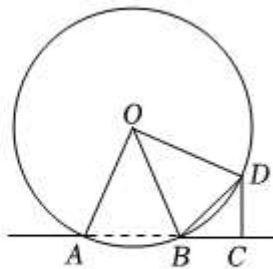
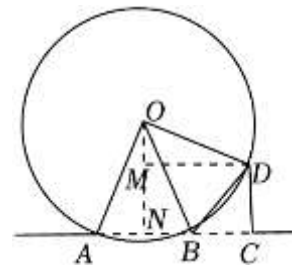
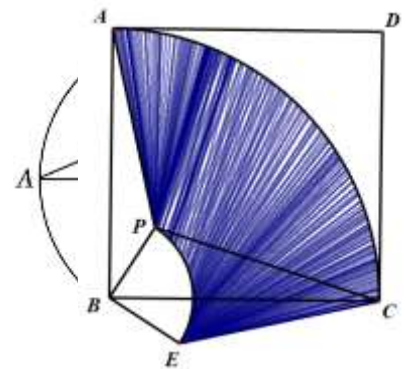


图2



21. 如图，在正方形 $ABCD$ 中有一点 P ，连接 AP 、 BP ，旋转 $\triangle APB$ 到 $\triangle CEB$ 的位置．

- (1) 若正方形的边长是 10， $PB=4$ ．则阴影部分面积为 _____；
- (2) 若 $PB=4$ ， $PA=7$ ， $\angle APB=135^\circ$ ，求 PC 的长．



22. 如图， AB 是半径为 5 的 $\odot O$ 的直径，点 C 、 D 是 $\odot O$ 上的点，且 $OD \parallel BC$ ， AC 分别与 BD 、 OD 相交于点 E 、 F ．

- (1) 求证：点 D 为 \widehat{AC} 的中点；
- (2) 若 $CB=4$ ，求 DF 的长；



23. 人工智能是数字经济高质量发展的引擎，也是新一轮科技革命和产业变革的重要驱动。人工智能市场分为决策类人工智能，人工智能机器人，语音类人工智能，视觉类人工智能四大类型，将四个类型的图标依次制成 A, B, C, D 四张卡片（卡片背面完全相同），将四张卡片背面朝上洗匀放置在桌面上。



A. 决策类人工智能



B. 人工智能机器人



C. 语音类人工智能



D. 视觉类人工智能

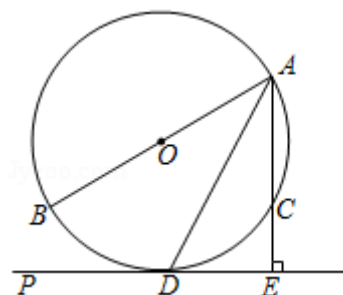
(1) 随机抽取一张，抽到决策类人工智能的卡片的概率为 _____；

(2) 从中随机抽取一张，记录卡片的内容后放回洗匀，再随机抽取一张，请用列表或画树状图的方法求抽取到的两张卡片内容一致的概率。

24. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C, D 是 $\odot O$ 上的点， P 是 $\odot O$ 外一点， $AC \perp PD$ 于点 E ， AD 平分 $\angle BAC$ 。

(1) 求证： PD 是 $\odot O$ 的切线；

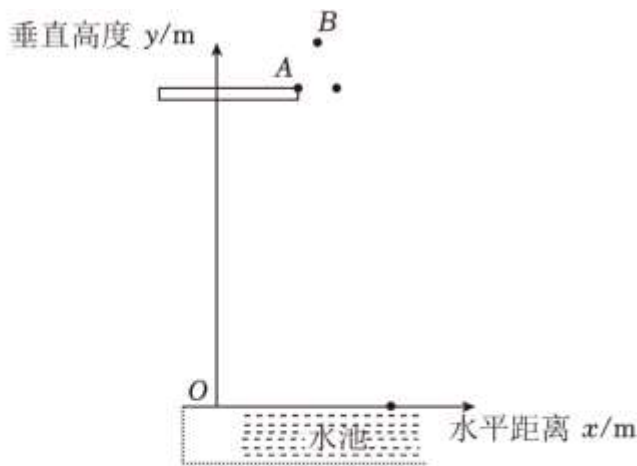
(2) 若 $DE = \sqrt{3}$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，求 $\odot O$ 的半径。



25. 中新社上海 3 月 21 日电（记者缪璐）21 日在上海举行的 2023 年全国跳水冠军赛女子单人 10 米跳台决赛中，陈芋汐以 416.25 分的总分夺得冠军，全红婵位列第二，掌敏洁获得铜牌。在精彩的比赛过程中，全红婵选择了一个极具难度的 207C（向后翻腾三周半抱膝）。如图 2 所示，建立平面直角坐标系 xOy 。如果她从点 $A(3, 10)$ 起跳后的运动路线可以看作抛物线的一部分，从起跳到入水的过程中，她的竖直高度 y （单位：米）与水平距离 x （单位：米）近似满足函数关系式 $y = a(x - h)^2 + k$ ($a < 0$)。



图1



(1) 在平时训练完成一次跳水动作时，全红婵的水平距离 x 与竖直高度 y 的几组数据如下：

水平距离 x/m	0	3	3.5	4	4.5
竖直高度 y/m	10	10	k	10	6.25

根据上述数据，直接写出 k 的值为 _____，直接写出满足的函数关系式：_____；



(2) 比赛当天的某一次跳水中，全红婵的竖直高度 y 与水平距离 x 近似满足函数关系 $y = -5x^2 + 40x - 68$ ，记她训练的入水点的水平距离为 d_1 ；比赛当天入水点的水平距离为 d_2 ，则 d_1 _____ d_2 (填“>”“=”或“<”);

(3) 在(2)的情况下，全红婵起跳后到达最高点 B 开始计时，若点 B 到水平面的距离为 c ，则她到水面的距离 y 与时间 t 之间近似满足 $y = -5t^2 + c$ ，如果全红婵在达到最高点后需要 1.6 秒的时间才能完成极具难度的 270C 动作，请通过计算说明，她当天的比赛能否成功完成此动作？

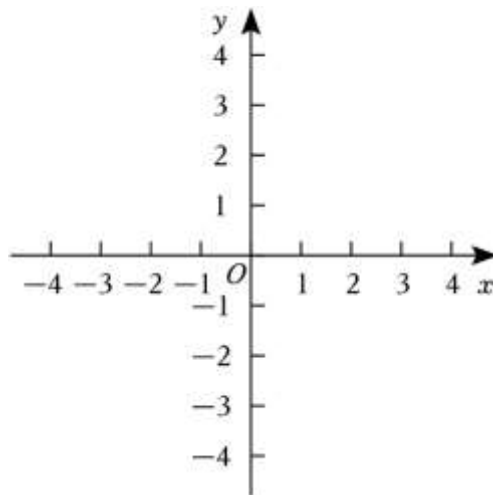
26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + 1$ 过点 $(2, 1)$.

(1) 求 b (用含 a 的式子表示);

(2) 抛物线过点 $M(-2, m)$, $N(1, n)$, $P(3, p)$,

①证明: $(m - 1)(n - 1) < 0$;

②若 M, N, P 恰有两个点在 x 轴上方，求 a 的取值范围.



27. 在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在射线 BC 上 (不与点 B, C 重合)，连接 DB, DE ，将 DE 绕点 E 逆时针旋转 90° 得到 EF ，连接 BF .

(1) 如图 1，点 E 在 BC 边上.

①依题意补全图 1;

②若 $AB = 6, EC = 2$ ，求 BF 的长;

(2) 如图 2，点 E 在 BC 边的延长线上，用等式表示线段 BD, BE, BF 之间的数量关系.

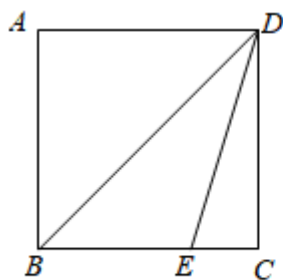


图 1

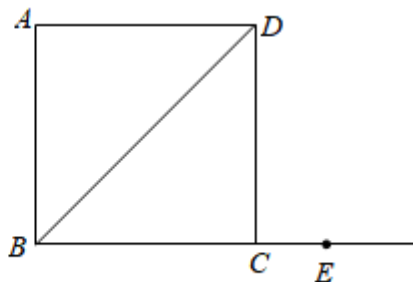


图 2



28.定义：对于一次函数 $y_1=ax+b$ 、 $y_2=cx+d$ ，我们称函数 $y=m(ax+b)+n(cx+d)$ ($ma+nc \neq 0$) 为函数 y_1 、 y_2 的“组合函数”。

(1) 若 $m=3$ ， $n=1$ ，试判断函数 $y=5x+2$ 是否为函数 $y_1=x+1$ 、 $y_2=2x-1$ 的“组合函数”，并说明理由；

(2) 设函数 $y_1=x-p-2$ 与 $y_2=-x+3p$ 的图象相交于点 P 。

①若 $m+n>1$ ，点 P 在函数 y_1 、 y_2 的“组合函数”图象的上方，求 p 的取值范围；

②若 $p \neq 1$ ，函数 y_1 、 y_2 的“组合函数”图象经过点 P 。是否存在大小确定的 m 值，对于不等于 1 的任意实数 p ，都有“组合函数”图象与 x 轴交点 Q 的位置不变？若存在，请求出 m 的值及此时点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。