2023 北京八十中高一 10 月月考

数　学

班级______ 姓名______ 考号______

（考试时间 90 分钟 满分 100 分）

提示：试卷答案请一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.

在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色签字笔作答.

一、选择题共 10 题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 下列各组对象不能构成集合的是（　）

A. 上课迟到的学生　　B. 2023 年高考数学难题

C. 所有有理数　　D. 小于 π 的正整数

2. 设集合 $A=\left\{x\middle|x\geq -1\right\}$，则下列四个关系中正确的是（　）

A. $1\in A$　　B. $1\notin A$　　C. $1 \in A$　　D. $1\subseteq A$

3. 设集合 M 中有 n 个元素，则集合 M 的非空真子集个数为（　）

A. 2^n　　B. 2^n-2　　C. 2^n-1　　D. 不能确定

4. 已知集合 $A=\{x\,|-2\leq x<1\}$，$B=\left\{-2,-1,0,1\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\left\{-2,-1,0,1\right\}$　　B. $\left\{-2,-1,0\right\}$

C. $\left\{-1,0\right\}$　　D. $\left\{-1,0,1\right\}$

5. 下列语句中：① $-1<2$；② $x>1$；③ $x^2-1=0$ 有一个根为 0；④高二年级的学生；⑤今天天气好热！⑥有最小的质数吗？其中是命题的是（　）

A. ①②③　　B. ①④⑤　　C. ②③⑥　　D. ①③

6. 已知 $p:0<x<2$，$q:-1<x<3$，则 p 是 q 的（　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充要也不必要条件

7. 存在量词命题"$\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2\leq |x|$"的否定是（　）

A. $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2\geq |x|$　　B. $\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2>|x|$

C. $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2>|x|$　　D. $\exists x\in \mathbf{R}$，$x^2\geq |x|$

8. 对于实数 a，b，c 下列命题中的真命题是（　）

A. 若 $a>b$，则 $ac^2>bc^2$　　B. 若 $a>b>0$，则 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

C. 若 $a<b<0$，则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$

D. 若 $a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，则 $a>0$，$b<0$

9. 设 $x\in\mathbf{R}$，则“$x>0$”是“$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}>2$”的（　）

A. 充要条件

B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件

D. 既不充分也不必要条件

10. 设 a、b、c 是两个两两不相等的正整数．若 $\{a+b,b+c,c+a\}=\left\{n^2,(n+1)^2,(n+2)^2\right\}(n\in\mathbf{N}_+)$，则 $a^2+b^2+c^2$ 的最小值是（　　）

A. 2007　　B. 1949　　C. 1297　　D. 1000

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 已知 $-1<x<4$，$2<y<3$，则 $3x+2y$ 的取值范围是________.

12. 集合 $A=\{1,2,a\}$，$B=\{1,a^2-2\}$，若集合 $A\cup B$ 中有三个元素，则实数 $a=$__________.

13. 已知 $\alpha:|x-1|<1$，$\beta:x<m$，若 α 是 β 的充分条件，则实数 m 的取值范围为_________.

14. 设 $x>0$，则函数 $y=2-\frac{4}{x}-x$ 的最大值为__________；此时 x 的值是__________.

15. 某地为了加快推进垃圾分类工作，新建了一个垃圾处理厂，每月最少要处理 300 吨垃圾，最多要处理 600 吨垃圾，月处理成本 y（元）与月处理量 x（吨）之间的函数关系可近似表示为 $y=\frac{1}{2}x^2-300x+80000$，为使每吨的平均处理成本最低，则该厂每月的处理量应为___________吨.

16. 对于问题：当 $x>0$ 时，均有 $[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geq 0$，求实数 a 的所有可能值．几位同学提供了自己的想法.

甲：解含参不等式，其解集包含正实数集；

乙：研究函数 $y=[(a-1)x-1](x^2-ax-1)$；

丙：分别研究两个函数 $y_1=(a-1)x-1$ 与 $y_2=x^2-ax-1$；

丁：尝试能否参变量分离研究最值问题.

你可以选择其中某位同学的想法，也可以用自己的想法，可以得出的正确答案为________.

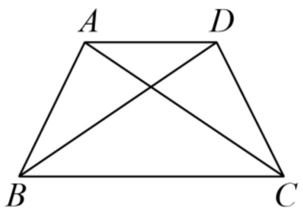
三、解答题共 4 小题，共 36 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 已知集合 $A=\{x|\ x>3a+1\}$，集合 $B=\left\{x|\ x^2-5x+6>0\right\}$

（1）当 $a=-3$ 时，求 $A\cap B$；

（2）若 $A\cup B=B$，求实数 a 的取值范围.

18. 证明：如图，梯形 $ABCD$ 为等腰梯形的充要条件是 $AC=BD$.



19. 已知函数 $f\left(x\right)=x^2-\left(a+b\right)x+2a$.

（1）若关于 x 的不等式 $f\left(x\right)<0$ 的解集为 $\{x|1<x<2\}$，求 $a-b$ 的值；

（2）当 $b=2$ 时，解关于 x 的不等式 $f\left(x\right)>0$.

20. 已知集合 $S=\{1,2,\cdots,\mathrm{n}\}$（$n\geq 3$ 且 $n\in\mathrm{N}^*$），$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $A\subseteq S$. 若对任意 $a_i\in A,a_j\in A\left(1\leq i\leq j\leq m\right)$，当 $a_i+a_j\leqslant n$ 时，存在 $a_k\in A\left(1\leq k\leq m\right)$，使得 $a_i+a_j=a_k$，则称 A 是 S 的 m 元完美子集.

（1）判断下列集合是否是 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的 3 元完美子集，并说明理由；

① $A_1=\{1,2,3\}$；

② $A_2=\{2,4,5\}$.

（2）若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,7\}$ 的 3 元完美子集，求 $a_1+a_2+a_3$ 的最小值.

参考答案

一、选择题共 10 题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】由集合定义分别判断是否满足集合中元素的性质即可得出结论.

【详解】根据集合中元素的确定性可知，

“2023 年高考数学难题”中的“难题”没有评判标准，不具备确定性，因此不能构成集合.

故选：B

2.【答案】A

【分析】根据描述法表示集合的含义，由元素集合的关系，即可判断结论.

【详解】由题意知，集合 $A=\{x\mid x\geq -1\}$ 表示所有不小于 -1 的实数组成的集合，

所有，1 是集合中的元素，故 $1\in A$.

故选：A.

3.【答案】B

【分析】依题意按照子集中的元素个数分类，找出规律即可得 n 个元素的集合 M 共有 2^n 个子集，2^n-2 个非空真子集.

【详解】根据题意，按照子集中的元素个数分类可写出 2^n 个子集，

则非空真子集即去掉空集 $\varnothing$ 和集合 M 本身，

所以集合 M 的非空真子集个数为 2^n-2 个.

故选：B

4.【答案】B

【分析】根据交集的定义直接求解即可.

【详解】因为 $A=\{x|-2\leq x<1\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，

所以 $A\cap B=\{-2,-1,0\}$，

故选：B

5.【答案】D

【分析】根据命题的定义即可求解.

【详解】命题是能判断真假的陈述句，

由于⑤⑥不是陈述句，故不是命题，

②④无法判断真假，故不是命题，

①③可以判断真假且是陈述句，故是命题，

故选：D

6.【答案】A

【分析】利用集合的包含关系判断可得出结论.

【详解】因为$\{x|0<x<2\}\subsetneqq\{x|-1<x<3\}$，所以，　是　的充分而不必要条件.

故选：A.

7.【答案】B

【分析】存在量词命题的否定是全称量词命题，把存在改为任意，把结论否定.

【详解】“$\exists x\in \mathrm{R}, x^2\le |x|$”的否定是$\forall x\in \mathrm{R}, x^2>|x|$.

故选：B.

8.【答案】D

【分析】通过不等式的性质一一验证即可.

【详解】对于选项A：若　　，当$c=0$时，$ac^2=bc^2$，故选项A错误；

对于选项B：若　　　　，可得$\frac{b-a}{ab}<0$，则$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，故选项B错误；

对于选项C：若　　　　，则$a^2>b^2$，则$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，故选项C错误，

对于选项D：若－　－，则$\frac{b-a}{ab}>0$，又$\because a>b$，则　　，　　，故选项D正确；

故选：D.

9.【答案】C

【分析】根据　　与$\sqrt{\ }\ \frac{}{\sqrt{\ }}$　之间的推出关系判断.

【详解】$\sqrt{\ }\ \frac{}{\sqrt{\ }}$　能推出　　，故必要性成立，

当　　时，取$x=1$，则$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$，不能推出$\sqrt{\ }\ \frac{}{\sqrt{\ }}$　，故充分性不成立，

所以“　　”是“$\sqrt{\ }\ \frac{}{\sqrt{\ }}$　”的必要不充分条件，

故选：C.

10.【答案】C

【详解】不妨设$a>b>c$，则$a+b>c+a>b+c$.

因为$(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)$为偶数，所以$n^2$、$(n+1)^2$、$(n+2)^2$必为两奇一偶，从而，　为奇数.

又因为$b+c>1$，所以　为不小于3的奇数.

若$n=3$.则$\{a+b,b+c,c+a\}=\{3^2,4^2,5^2\}$.故$a+b+c=\frac{1}{2}(3^2+4^2+5^2)=5^2$，且$a+b=5^2$.

所以$c=0$，不符合要求.

若 $n=5$，则 $\{a+b,b+c,c+a\}=\{5^2,6^2,7^2\}$.

故 $\begin{cases}a+b=7^2,\\c+a=6^2,\\b+c=5^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=30,\\b=19,\\c=6.\end{cases}$

此时，$a^2+b^2+c^2=1297$.

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11.【答案】$(1,18)$

【分析】由 $-1<x<4,2<y<3$ 得到 $-3<3x<12,4<2y<6$ ，相加后得到取值范围.

【详解】因为 $-1<x<4,2<y<3$ ，

所以 $-3<3x<12,4<2y<6$ ，

得 $3x+2y\in(-3+4,12+6)=(1,18)$.

故答案为：$(1,18)$

12.【答案】-2 或

【分析】集合　　中有三个元素，则 $a^2-2=2$ 或 $a^2-2=a$ ，解方程并检验即可.

【详解】集合　　，　　，若集合　　中有三个元素，

则 $a^2-2=2$ 或 $a^2-2=a$ ，

若 $a^2-2=2$ ，解得 $a=\pm2$ ，其中 $a=2$ 与元素互异性矛盾舍去，$a=-2$ 满足题意；

若 $a^2-2=a$ ，解得 $a=2$ 或 $a=-1$ ，$a=2$ 舍去，$a=-1$ 满足题意，

所以 $a=-2$ 或 $a=-1$.

故答案为：-2 或

13.【答案】$m\ge2$

【分析】首先解出绝对值不等式，再根据充分条件得到集合的包含关系，即可得解.

【详解】由 $|x-1|<1$，即 $-1<x-1<1$，解得 $0<x<2$，

记 $A=(0,2)$，$B=(-\infty,m)$，

因为　是　的充分条件，所以 $A\subseteq B$，所以 $m\ge2$，

即实数　的取值范围为 $m\ge2$.

故答案为：$m\ge2$

14.【答案】　①. -2　②. 2

【分析】利用基本不等式求解.

【详解】解：因为　　，

所以函数 $y=2-\dfrac{4}{x}-x=2-\left(\dfrac{4}{x}+x\right)\le2-2\sqrt{\dfrac{4}{x}\cdot x}=-2$ ，

当且仅当$\frac{4}{x}=x$即$x=2$时，等号成立，

所以函数 $-$ 的最大值为-2；此时 的值是 2，

故答案为：-2；2

15.【答案】400

【分析】根据条件得到$s=\frac{y}{x}=\frac{x}{2}+\frac{80000}{x}-300$，结合基本不等式，即可求解.

【详解】设每吨的平均处理成本为s元，

由题意可得$s=\frac{y}{x}=\frac{x}{2}+\frac{80000}{x}-300$，其中$300\le x\le 600$.

由基本不等式可得：$\frac{x}{2}+\frac{80000}{x}-300\ge 2\sqrt{\frac{x}{2}\times\frac{80000}{x}}-300=100$，

当且仅当$\frac{x}{2}=\frac{80000}{x}$，即$x=400$时，每吨的平均处理成本最低.

故答案为：400.

16.【答案】$\frac{3}{2}$##1.5

【分析】题意可以选择丙同学的想法对两个函数分开进行分$a-1<0$、$a-1>0$和$a-1=0$三种情况情况讨论，从而可得到答案.

【详解】解：可以选择丙同学的想法.

对于函数$y=(a-1)x-1$，

①当$a-1<0$时，由于当$x=0$时，$y_1=-1$，因此$y_1<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

若 ，$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$恒成立，

则$y_2=x^2-ax-1$在$(0,+o)$上亦恒小于或等于 0，显然不可能成立；

②当$a-1>0$时，对于函数$y_1=(a-1)x-1$在$(0,\frac{1}{a-1})$上$y_1<0$，

在$(\frac{1}{a-1}$，$+\infty)$上$y_1>0$恒成立；

若 ，$[(a-1)x-1](x^2-ax-1)\geqslant 0$恒成立，

因此$y_2=x^2-ax-1$在$(0,\frac{1}{a-1})$上$y_2<0$，在$(\frac{1}{a-1}$，$+\infty)$上$y_2>0$恒成立，

即当$x=\frac{1}{a-1}$时，$y_2=0$，即$\frac{1}{(a-1)^2}-a\cdot\frac{1}{a-1}-1=0$，$2a^2-3a=0$，$a=\frac{3}{2}$或$a=0$（舍去）.

检验：当$a=\frac{3}{2}$时，原不等式可化为$(\frac{1}{2}x-1)(x^2-\frac{3}{2}x-1)\geqslant 0$，. 即$(x-2)(2x^2-3x-2)\geqslant 0$，

$(x-2)^2\cdot(2x+1)\geqslant 0$，

又∵ $x>0$，所以 $(x-2)^2\geqslant 0$ 恒成立，因此 $a=\dfrac{3}{2}$ 时，符合题意.

③当 $a-1=0$ 时，易知不符合题意，

综上所述：$a=\dfrac{3}{2}$.

故答案为：$\dfrac{3}{2}$.

三、解答题共 4 小题，共 36 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17.【答案】（1）$\left\{x\middle|\ x>3\text{或}-8<x<2\right\}$

（2）$a\geq\dfrac{2}{3}$

【分析】（1）由题意可得 $A=\{x|\ x>-8\}$，解一元二次不等式求出集合 B，再根据集合的交集运算即可求出结果;

（2）因为　　　　，所以 $A\subseteq B$，所以 $3a+1\geq 3$，由此即可求出结果.

【小问 1 详解】

解：当　　　时，集合 $A=\{x|\ x>3a+1\}=\{x|\ x>-8\}$

集合 $B=\left\{x\middle|\ x^2-5x+6>0\right\}=\left\{x\middle|\left(x-3\right)\left(x-2\right)>0\right\}=\left\{x\middle|\ x>3\text{或}x<2\right\}$；

所以 $A\cap B=\left\{x\middle|\ x>3\text{或}-8<x<2\right\}$.

【小问 2 详解】

解：因为　　　　，所以 $A\subseteq B$，

所以 $3a+1\geq 3$，即 $a\geq\dfrac{2}{3}$.

18.【答案】证明见解析

【分析】先由梯形　　　为等腰梯形，证明　　　　，验证必要性；再由　　　　证明梯形　　　为等腰梯形，验证充分性，即可得出结论成立.

【详解】证明：（1）必要性.

在等腰梯形　　　中，$AB=DC$，$\angle ABC=\angle DCB$，

又∵ $BC=CB$，∴ $\triangle BAC\cong\triangle CDB$，∴　　　　.

（2）充分性.

如图，过点 D 作 $DE//AC$，交 BC 的延长线于点 E.

∵ $AD//BE$，$DE//AC$，∴四边形 $ACED$ 是平行四边形.∴ $DE=AC$.

∵　　　　，∴ $BD=DE$，∴ $\angle E=\angle 1$.

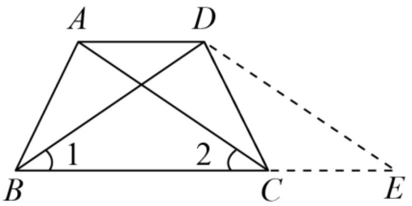
又∵ $AC//DE$，∴ $\angle 2=\angle E$，∴ $\angle 1=\angle 2$.

在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中，$\begin{cases} AC = DB, \\ \angle 2 = \angle 1, \\ BC = CB, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DCB$. $\therefore AB = DC$.

∴梯形　　　　为等腰梯形.

由（1）（2）可得，梯形　　　　为等腰梯形的充要条件是　　　　　.



【点睛】本题主要考查充要条件的证明，熟记充分条件与必要条件的概念即可，属于常考题型.

19.【答案】（1）$a-b=-1$

（2）答案见解析

【分析】（1）根据一元二次不等式和一元二次方程的关系列方程，解方程得到$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$，然后求　　即可；

（2）分$a<2$、$a=2$和$a>2$三种情况解不等式即可.

【小问 1 详解】

由题意可知，关于　的不等式$x^2-(a+b)x+2a<0$的解集为$\{x|1<x<2\}$，

所以关于　的方程$x^2-(a+b)x+2a=0$的两个根为 1 和 2，

所以$\begin{cases} a+b=3 \\ 2a=2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$，

则$a-b=-1$.

【小问 2 详解】

由条件可知，$x^2-(a+2)x+2a>0$，即$(x-a)(x-2)>0$，

当$a<2$时，解得$x<a$或$x>2$；

当$a=2$时，解得$x\neq 2$；

当$a>2$时，解得$x<2$或$x>a$.

综上可知，当$a<2$时，原不等式的解集为$\{x|x<a$或$x>2\}$；

当$a=2$时，原不等式的解集为$\{x|x\neq 2\}$；

当$a>2$时，原不等式的解集为2或$x>a\}$.

20.【答案】（1）A_1不是　的 3 元完美子集，A_2是　的 3 元完美子集，理由见解析

（2）12

【分析】（1）理解3元完美子集的定义，并判断两个集合是否满足完美子集的定义；

（2）分别设$a_1=1$，$a_1=2$，以及$a_1\geq 3$时，判断是否存在3元完美子集，并比较最小值，即可求解.

【小问1详解】

①因为$2+2=4<5$，且$4\notin A_1$，

所以A_1不是 的3元完美子集；

②因为$2+2=4<5$，且$4\in A_2$，

而$5+5>4+5>4+4>2+5>2+4>5$，

$\therefore A_2$是 的3元完美子集.

【小问2详解】

不妨设$a_1<a_2<a_3$.

若$a_1=1$，则$a_1+a_1=2\in A, 1+2=3\in A, 1+3=4\in A$，且$4<7$，

则集合 的元素个数大于3个，这与3元完美子集矛盾；

若$a_1=2$，则$a_1+a_1=4\in A, 2+4=6\in A$，而$2+6>7$，符合题意，

此时$a_1=2, a_2=4, a_3=6$，即$A=\{2,4,6\}$，

此时$a_1+a_2+a_3=12$.

若$a_1\geq 3$，则$a_1+a_1\geqslant 6$，于是$a_2\geq 4$，$a_1+a_2\geq 7$，若存在3元完美子集，

则$a_1+a_1=a_3$或$a_1+a_2=a_3$，即$a_3\geqslant 6$，所以$a_1+a_2+a_3\geqslant 13$.

综上， 的最小值是12.

【点睛】关键点点睛：本题考查有关集合新定义的综合应用，本题的关键是理解3元完美子集的定义.