2022—2023 学年度第一学期 9 月学习诊断—初三数学

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的．

1．一元二次方程 $3x^2-6x-1=0$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别是

A．3，6，1　　B．3，6，-1　　C．3，-6，1　　D．3，-6，-1

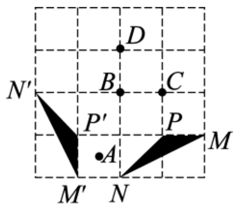
2．把抛物线 $y=x^2$ 向上平移 1 个单位长度得到的抛物线的表达式为

A．$y=x^2+1$　　B．$y=x^2-1$　　C．$y=-x^2+1$　　D．$y=-x^2-1$

3．如图，在正方形网格中，△MPN 绕某一点旋转某一角度得到△$M'P'N'$，

则旋转中心可能是

A．点 A　　B．点 B　　C．点 C　　D．点 D



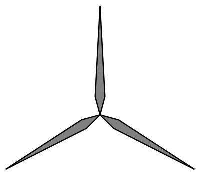
4．用配方法解方程 $x^2-4x+2=0$，配方正确的是

A．$(x-2)^2=2$　　B．$(x+2)^2=2$　　C．$(x-2)^2=-2$　　D．$(x-2)^2=6$

5．已知抛物线 $y=x^2+2x$ 经过点 $(-4,\ y_1)$，$(1,\ y_2)$，则 y_1 与 y_2 的大小关系为

A．$y_1=y_2$　　B．$y_1<y_2$　　C．$y_1>y_2$　　D.无法确定

6．风力发电机可以在风力作用下发电．如图的转子叶片图案绕中心旋转 $n°$ 后能与原来的图案重合，那么 n 的值可能是



A．45　　B．60　　C．90　　D．120

7. 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$，其中 $ab<0$，$c>0$．下列说法正确的是

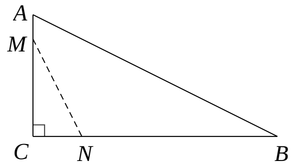
A. 该抛物线经过原点

B. 该抛物线的顶点可能在第一象限

C. 该抛物线的对称轴在 y 轴左侧

D. 该抛物线与 x 轴必有公共点

8．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$BC=10$．动点M，N分别从A，C两点同时出发，点M从点A开始沿边AC向点C以每秒1个单位长度的速度移动，点N从点C开始沿CB向点B以每秒2个单位长度的速度移动．设运动时间为t，点M，C之间的距离为y，$\triangle MCN$的面积为S，则y与t，S与t满足的函数关系分别是



（A）正比例函数关系，一次函数关系　　（B）正比例函数关系，二次函数关系

（C）一次函数关系，正比例函数关系　　（D）一次函数关系，二次函数关系

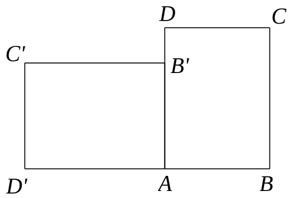
二、填空题（本题共16分，每小题2分）

9．一元二次方程$x^2=2x$的解为________．

10．写出一个图象开口向上，过点（0，1）的二次函数的表达式：________．

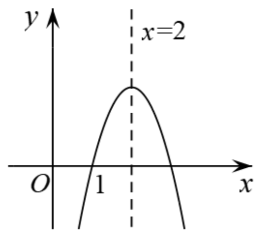
11．若关于x的一元二次方程$(a-2)x^2+2x+a^2-4=0$有一个根为0，则a的值为________．

12．如右图，矩形$ABCD$中，$AB=3$，$BC=4$．以点A为中心，将矩形$ABCD$旋转得到矩形$AB'C'D'$，使得点B'落在边AD上，则此时DB'的长为__________．



13．南宋数学家杨辉在《田亩比类乘除算法》中提出一个问题：“直田积八百六十四步，只云阔不及长一十二步．问阔及长各几步．”译文：“矩形面积是864平方步，宽比长少12步，求长、宽分别是多少步？”设矩形的长为x步，可列方程为__________．

14．如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线$y=ax^2+bx+c$的对称轴为直线$x=2$，与x轴的一个交点为$(1,0)$，则关于x的方程$ax^2+bx+c=0$的解为__________．



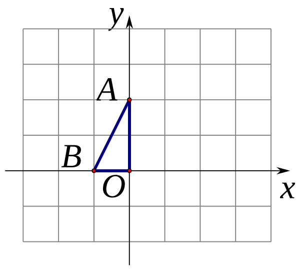
15．抛物线$y=ax^2-2ax-3$与x轴交于两点，分别是（m，0），（n，0），则$m+n$的值为_____．

16．若抛物线$y=-2x^2+mx+n$与x轴交于A,B两点，其顶点C到x轴距离是8，则线段AB的长为___．

三、解答题（本题共68分，第17题10分，第18题3分，第19题~25题，每小题5分，第26题6分，27~28题，每小题7分）

17．解方程：（1）$(x-1)^2-3=0$　　（2）$x^2-4x+3=0$

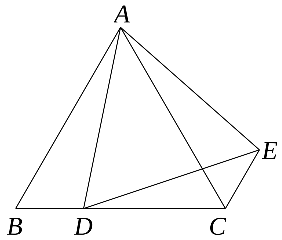
18．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，点 A，点 B 的坐标分别为（0，2），（-1，0），将△AOB 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到△A_1OB_1.



（1）画出△A_1OB_1；

（2）直接写出点 A_1 和点 B_1 的坐标

19．如图，等边三角形 ABC 的边长为 3，点 D 是线段 BC 上的点，$CD=2$，以 AD 为边作等边三角形 ADE，连接 CE．求 CE 的长．



20．已知 m 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的一个根，求 $\left(m-3\right)^2+\left(m+2\right)\left(m-2\right)$ 的值．

21．二次函数 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$）图象上部分点的横坐标 x，纵坐标 y 的对应值如下表：

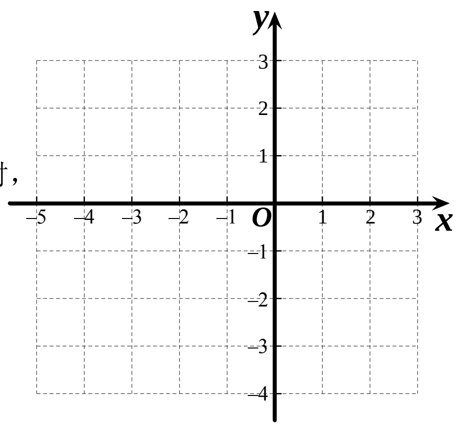
x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	…

（1）求这个二次函数的表达式；

（2）在右图中画出此二次函数的图象；

（3）结合图象，直接写出当 $y>0$ 时，自变量 x 的取值范围．

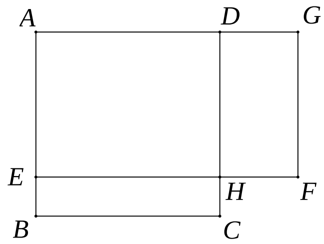
（4）当抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点在直线 $y=x+n$ 的下方时，n 的取值范围是 ____．



22．如图，四边形 $ABCD$ 是一块边长为 4 米的正方形苗圃，园林部门拟将其改造为矩形 $AEFG$ 的形状，其中点 E 在 AB 边上，点 G 在 AD 的延长线上，$DG=2BE$．设 BE 的长为 x 米，改造后苗圃 $AEFG$ 的面积为 y 平方米．

（1）y 与 x 之间的函数关系式为____________________（不需要写出自变量的取值范围）；

（2）根据改造方案，改造后的矩形苗圃 $AEFG$ 的面积与原正方形苗圃 $ABCD$ 的面积相等，请问此时 BE 的长为多少米？



23．关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-1=0$ 有两个不相等的实数根 x_1,x_2．

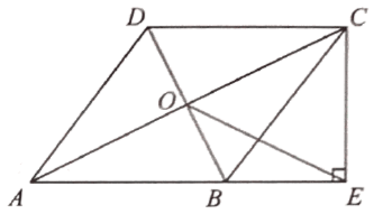
（1）求实数 m 的取值范围；

（2）是否存在实数 m，使得 $x_1x_2=0$ 成立？如果存在，求出 m 的值；如果不存在，请说明理由．

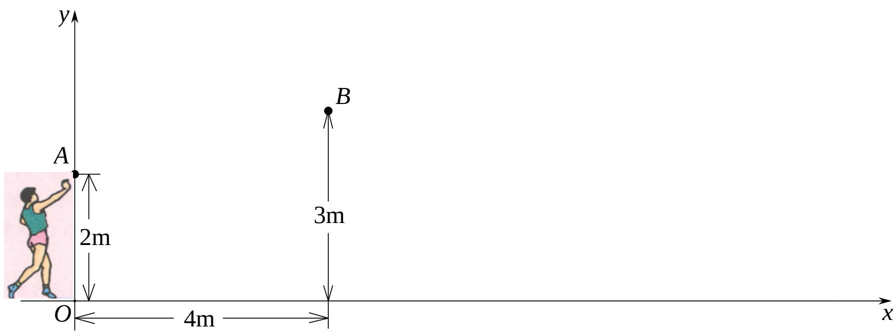
24．如图，在四边形 ABCD 中，AB//DC，AB=AD，对角线 AC，BD 交于点 O，AC 平分∠BAD，过点 C 作 CE⊥AB 交 AB 的延长线于点 E，连接 OE.

(1)求证:四边形 ABCD 是菱形;

(2)若 AB=$\sqrt{5}$，BD=2，求 OE 的长 .



25．小明进行铅球训练，他尝试利用数学模型来研究铅球的运动情况．他以水平方向为 x 轴方向，1 m 为单位长度，建立了如图所示的平面直角坐标系，铅球从 y 轴上的 A 点出手，运动路径可看作抛物线，在 B 点处达到最高位置，落在 x 轴上的点 C 处．小明某次试投时的数据如图所示．



（1）在图中画出铅球运动路径的示意图；

（2）根据图中信息，求出铅球路径所在抛物线的表达式（不需要写出自变量的取值范围）；

（3）若铅球投掷距离（铅球落地点 C 与出手点 A 的水平距离 OC 的长度）不小于 10 m，成绩为优秀．请通过计算，判断小明此次试投的成绩是否能达到优秀．

26．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点（0，-2），（2，-2）．

（1）直接写出 c 的值和此抛物线的对称轴；

（2）若此抛物线与直线 $y=-6$ 没有公共点，求 a 的取值范围；

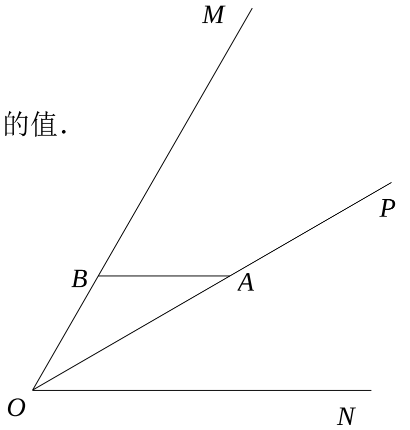
（3）点（t，y_1），（$t+1$，y_2）在此抛物线上，且当 $-2\leqslant t\leqslant 4$ 时，都有 $|y_2-y_1|<\frac{7}{2}$，直接写出 a 的取值范围．

27. 如图，已知$\angle MON=\alpha$（$0°<\alpha<90°$），OP是$\angle MON$的平分线，A，B分别在OP，OM上，且AB // ON．以点A为中心，将线段AO旋转到AC处，使点O的对应点C恰好在射线BM上，在射线ON上取一点D，使得$\angle BAD=180°-\alpha$．

（1）① 依题意补全图；

② 求证：$OC=OD+AD$；

（2）连接CD，若$CD=OD$，求α的度数，并直接写出$\dfrac{AD}{OD}$的值．



28. 点P到$\angle AOB$的距离定义如下：点Q为$\angle AOB$的两边上的动点，当PQ最小时，我们称此时PQ的长度为点P到$\angle AOB$的距离，记为$d(P，\angle AOB)$．特别的，当点P在$\angle AOB$的边上时，$d(P，\angle AOB)=0$．

在平面直角坐标系xOy中，$A(4,0)$．

（1）如图1，若M（0，2），N（-1，0），则$d(M，\angle AOB)=$______，$d(N，\angle AOB)=$______；

（2）在正方形$OABC$中，点B（4，4）．

①如图2，若点P在直线$y=3x+4$上，且$d(P，\angle AOB)=2\sqrt{2}$，求点$P$的坐标；

②将抛物线$y=-x^2+4$向下平移k（$k\geqslant 0$）个单位长度后得到的新抛物线记作图象W，若点P在图象W上，且满足$d(P，\angle AOB)=2\sqrt{2}$的点$P$有且只有两个，请直接写出$k$的取值范围．

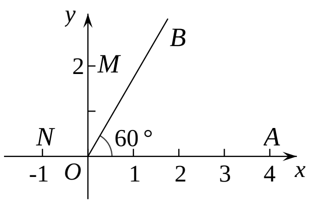


图 1

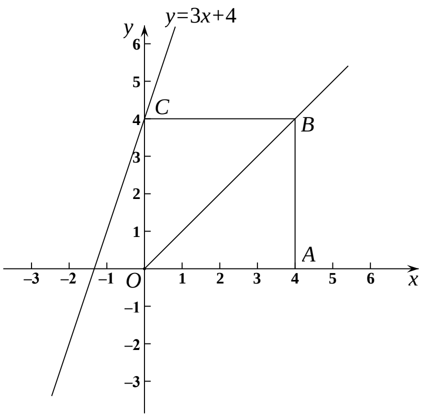
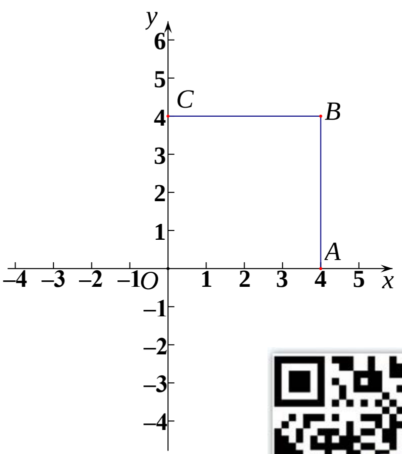


图 2



备用图

2022-2023 学年度第一学期 9 月学习诊断初三数学

答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	A	C	D	B	D

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9．$x_1=0$，$x_2=2$　　10．答案不唯一，例如 $y=x^2+1$　　11．-2　　12. 1

13．$x(x-12)=864$　　14．$x_1=1$，$x_2=3$　　15．2　　16．4

三、解答题（本题共 68 分）

17．(1) 解：$(x-1)^2=3$

$x-1=\pm\sqrt{3}$,………………3 分

$x=1\pm\sqrt{3}$,………………4 分

$x_1=1+\sqrt{3},x_2=1-\sqrt{3}$………………5 分

(2)解法一：

解：$x^2-4x+4=1$，

$(x-2)^2=1$，………………3 分

$x-2=\pm1$，

$x_1=1$，$x_2=3$．………………5 分

解法二：

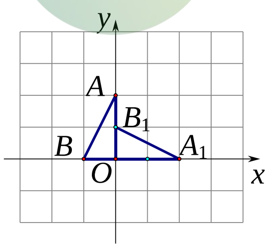
解：$(x-1)(x-3)=0$，………………3 分

$x-1=0$ 或 $x-3=0$，

$x_1=1$，$x_2=3$．………………5 分

18.（1）如图　……………1 分

（2）A_1（2，0），B_1（0，1）……………3 分



19．解：∵△ABC 是等边三角形，

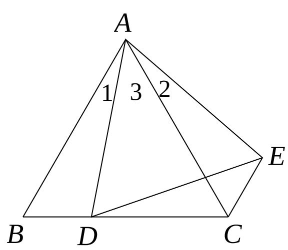
∴$AB=BC=AC$，∠BAC=60°.

∴∠1+∠3=60°.　………………1 分

∵△ADE 是等边三角形，

∴$AD=AE$，∠DAE=60°.

∴∠2+∠3=60°.　………………2 分



∴∠1=∠2.

在△ABD 与△ACE 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle 1 = \angle 2 \\ AD = AE \end{cases},$$

∴△ABD ≌ △ACE（SAS）.

∴CE=BD.………………4 分

∵BC=3，CD=2，

∴BD=BC−CD=1.

∴CE=1. ………………5 分

20．解：∵m 是方程 $x^2-3x+1=0$ 的一个根，

∴ $m^2-3m+1=0$. ………………2 分

∴ $m^2-3m=-1$.

∴原式 $=m^2-6m+9+m^2-4$ ………………4 分

$=2\left(m^2-3m\right)+5$

$=3$. ………………5 分

21.（1）解法一：由题意，设二次函数的表达式为 $y=a(x+1)^2+2$.

∵二次函数经过点 $(1,0)$，

∴ $4a+2=0$.

∴ $a=-\frac{1}{2}$. ………………… 1 分

∴二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2$. ………………… 2 分

即 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

解法二：由题意，设二次函数的表达式为 $y=a(x+3)(x-1)$.

∵二次函数经过点 $(-1,2)$，

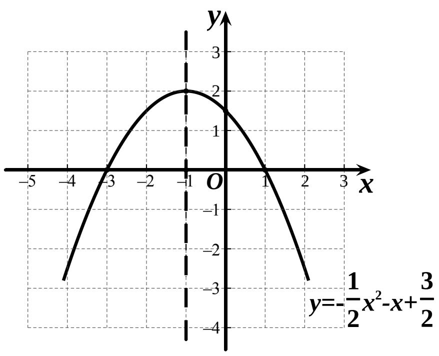
∴ $-4a=2$.

∴ $a=-\frac{1}{2}$. ………………… 1 分

∴二次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+3)(x-1)$. ………………… 2 分

即 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

（2）如右图. …………… 3 分



（3） $-3<x<1$. …………… 4 分

（4）n>3. …………… 5 分

22．解：（1）$y=-2x^2+4x+16$（或 $y=(4-x)(4+2x)$）……………… 3 分

（2）由题意，原正方形苗圃的面积为 16 平方米，得 $-2x^2+4x+16=16$．

解得：$x_1=2$，$x_2=0$（不合题意，舍去）．……………… 5 分

答：此时 BE 的长为 2 米.

23．解：（1）∵方程 $x^2+2(m-1)x+m^2-1=0$ 有两个不相等的实数根，

$\therefore \Delta=4(m-1)^2-4(m^2-1)=-8m+8>0$，

$\therefore m<1$．……………… 2 分

（2）存在实数 m 使得 $x_1x_2=0$．

$x_1x_2=0$，即是说 0 是原方程的一个根，则 $m^2-1=0$．……………… 3 分

解得：$m=-1$ 或 $m=1$．……………… 4 分

当 $m=1$ 时，方程为 $x^2=0$，有两个相等的实数根，与题意不符，舍去．

$\therefore m=-1$．……………… 5 分

24．

（1）证明：∵ $AB \parallel CD$

$\therefore \angle CAB=\angle ACD$

∵ AC 平分 $\angle BAD$

$\therefore \angle CAB=\angle CAD$

$\therefore \angle CAD=\angle ACD$

$\therefore AD=CD$

又∵ $AD=AB$

$\therefore AB=CD$

又∵ $AB \parallel CD$

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形

又∵ $AB=AD$

$\therefore$ ▱$ABCD$ 是菱形 …………… 3 分

（2）解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，对角线 AC、BD 交于点 O．

$\therefore AC\perp BD$．$OA=OC=\frac{1}{2}AC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，

$\therefore OB=\frac{1}{2}BD=1$．

在 Rt△AOB 中，$\angle AOB=90^\circ$．

$\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=2$．

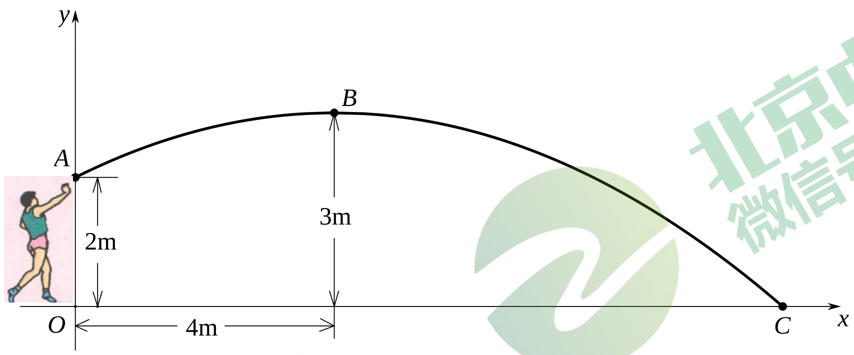
∵ $CE\perp AB$，

$\therefore \angle AEC=90^\circ$．

在 Rt△AEC 中，$\angle AEC=90^\circ$．O 为 AC 中点．

$\therefore OE=\frac{1}{2}AC=OA=2$．…………… 5 分

25．解：（1）如图所示．



…………………………1 分

（2）解：依题意，抛物线的顶点 B 的坐标为（4，3），点 A 的坐标为（0，2）．

设该抛物线的表达式为 $y=a(x-4)^2+3$．…………………………1 分

由抛物线过点 A，有 $16a+3=2$．

解得 $a=-\frac{1}{16}$．…………………………2 分

∴该抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{16}(x-4)^2+3$．…………………………3 分

（3）解：令 $y=0$，得 $-\frac{1}{16}(x-4)^2+3=0$．

解得 $x_1=4+4\sqrt{3}$，$x_2=4-4\sqrt{3}$（C 在 x 正半轴，故舍去）．

∴点 C 的坐标为（$4+4\sqrt{3}$，0）．…………………………4 分

∴ $OC=4+4\sqrt{3}$．

由 $\sqrt{3}>\frac{3}{2}$，可得 $OC>4+4\times\frac{3}{2}=10$．

∴小明此次试投的成绩达到优秀．…………………………5 分

26．解：（1）$c=-2$，对称轴为 $x=1$．………………………………………………………… 2 分

（2）当 $a>0$ 时，

∵此抛物线与直线 $y=-6$ 没有公共点，

∴此抛物线顶点的纵坐标大于 -6．

∵抛物线的对称轴为 $x=1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$．

∵当 $x=1$ 时，$y=ax^2-2ax-2=-a-2$，

∴ $-a-2>-6$，解得 $a<4$．

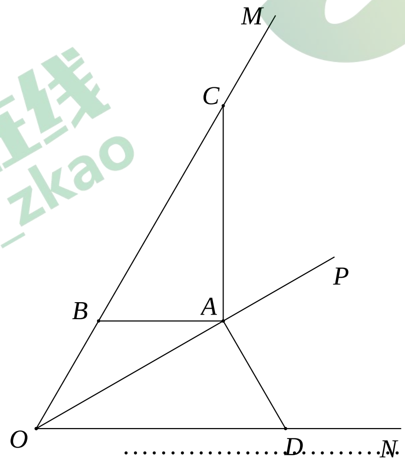
∴ $0<a<4$．

当 $a<0$ 时，此抛物线与直线 $y=-6$ 一定有公共点，不符合题意.

综上，$0<a<4$. ……………………………………………………………………4 分

（3）$-\frac{1}{2}<a<0$ 或 $0<a<\frac{1}{2}$. ……………………………………………………6 分

27.（1）①补全图形，如图.



……………………………………………1 分

②证明：

∵ OP 平分 $\angle MON$，$\angle MON=\alpha$，

∴ $\angle AOC=\angle AON=\frac{1}{2}\angle MON=\frac{1}{2}\alpha$.

∵ $AB /\!/ ON$，

∴ $\angle BAO=\angle AON$.

∴ $\angle BAO=\angle AOC$.

∴ $AB=BO$. ………………………………………………………………2 分

∵ 由旋转，$AO=AC$，

∴ $\angle AOC=\angle ACO=\frac{1}{2}\alpha$.

∴ $\angle ACO=\angle AON$,

$\angle OAC=180°-\alpha$.

∵ $\angle BAD=180°-\alpha$,

∴ $\angle OAC=\angle BAD$.

∴ $\angle BAC=\angle DAO$.

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADO$. …………………………………………………3 分

∴ $AB=AD$，$CB=OD$.

∴ $BO=AD$.

∵ $OC=CB+BO$，

∴ $OC=OD+AD$. ………………………………………………………4 分

（2）如图所示，

∵$AB // ON$，

∴$\angle BAD+\angle ADO=180°$．

∵ $\angle BAD=180°-\alpha$，

∴$\angle ADO=\alpha$．

∵$AC=AO$，$CD=OD$，$AD=AD$，

∴$\triangle ADC \cong \triangle ADO$．

∴$\angle DCA=\angle DOA=\frac{1}{2}\alpha$，

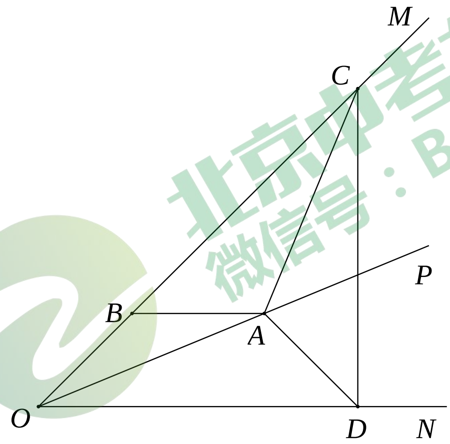
$\angle CDA=\angle ODA=\alpha$．

∵在$\triangle CDO$中，$\angle OCD+\angle CDO+\angle DOC=180°$，

∴ $4\alpha=180°$．

∴ $\alpha=45°$．……………………………………………6 分

此时，$\frac{AD}{OD}$的值为$\sqrt{2}-1$．……………………………………………7 分



28．（1）1；1．（说明：每空 1 分）--2 分

（2）①如图，

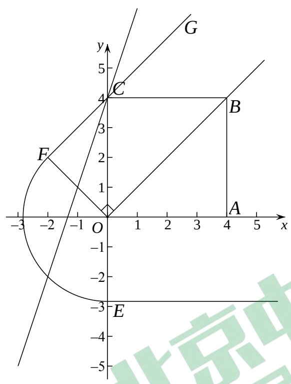
点 P 在 EF 上时，$OP=2\sqrt{2}$，

设 P（x，$3x+4$），

$x^2+(3x+4)^2=8$，

$x_1=-2$，$x_2=-\frac{2}{5}$（舍），

$P(-2,-2)$，------------------------------4 分



点 P 在射线 FG 上时，P 到射线 OB 的距离为$2\sqrt{2}$，

点 P 与点 C 重合，

$P(0,4)$，------------------------------------5 分

∴$P(-2,-2)$，$(0,4)$．

②$\frac{1}{4}<k<4+2\sqrt{2}$ ----------------7 分