东城区 2022—2023 学年度第一学期期末教学统一检测

高 一 数 学

2023.1

本试卷共 4 页，满分 100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分(选择题　共 30 分)

一、选择题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1)已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{0,1,2,3\}$，则 $A\cap B=$

(A)$\{0,1,2\}$　(B)$\{1,2,3\}$　(C)$\{-1,3\}$　(D)$\{-1,0,1,2,3\}$

(2)不等式 $x^2-x-2>0$ 的解集是

(A)$\{x|x<-2$或$x>-1\}$　(B)$\{x|x<-1$或 $x>2\}$

(C)$\{x|-1<x<2\}$　(D)$\{x|-2<x<1\}$

(3)下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递减的是

(A)$y=\sqrt{x}$　(B)$y=\ln x$　(C)$y=(\frac{1}{2})^x$　(D)$y=x^3$

(4)命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$x-1>0$”的否定是

(A)$\forall x\in\mathbf{R}$，$x-1\leqslant 0$　(B)$\exists x\in\mathbf{R}$，$x-1\leqslant 0$

(C)$\forall x\in\mathbf{R}$，$x-1<0$　(D)$\exists x\in\mathbf{R}$，$x-1<0$

(5)已知 $a>0$，则 $a+\frac{4}{a}+1$ 的最小值为

(A)2　(B)3　(C)4　(D)5

(6)函数 $f(x)=x^3+x$ 的图象关于

(A)x 轴对称　(B)y 轴对称　(C)原点对称　(D)直线 $y=x$ 对称

(7)“$\sin\alpha=\sin\beta$”是“$\alpha=\beta$”的

(A)充分而不必要条件　(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件　(D)既不充分也不必要条件

(8)已知函数 $f(x)=|\lg(x+1)|$，对 a,b 满足 $-1<a<b$ 且 $f(a)=f(b)$，则下面结论一定正确的是

(A)$a+b=0$　(B)$ab=1$

(C)$ab-a-b=0$　(D)$ab+a+b=0$

(9)记地球与太阳的平均距离为 R，地球公转周期为 T，万有引力常量为 G，根据万有引力定律和牛顿运动定律知：太阳的质量 $M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}$(kg). 已知 $\lg 2\approx 0.3$，$\lg\pi\approx 0.5$，$\lg\frac{R^3}{GT^2}\approx 28.7$，由上面的数据可以计算出太阳的质量约为

(A)2×10^{30} kg　(B)2×10^{29} kg　(C)3×10^{30} kg　(D)3×10^{29} kg

(10)已知实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{10},b_1,b_2,\cdots,b_{10}$ 互不相同，对 $\forall a_i(i=1,2,\cdots,10)$ 满足 $(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_{10})=2023$，则对 $\forall b_i(i=1,2,\cdots,10)$，$(a_1+b_i)(a_2+b_i)\cdots(a_{10}+b_i)=$

(A)2022　(B)-2022　(C)2023　(D)-2023

第二部分(非选择题　共 70 分)

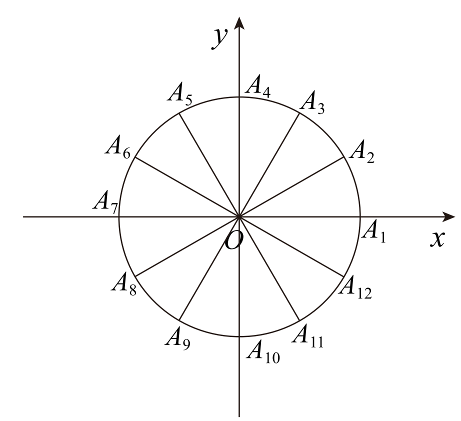
二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

(11)函数 $f(x)=\ln(1-2x)$的定义域是________.

(12)$(\frac{1}{2})^{-2}+\log_2 4=$________.

(13)已知 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$，$\alpha\in(0,\pi)$，则 $\tan\alpha=$________.

(14)如图，单位圆被点 $A_1,A_2,\cdots,A_{12}$分为 12 等份，其中 $A_1(1,0)$. 角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，若 α 的终边经过点 A_5，则 $\cos\alpha=$________；若 $\sin\alpha=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$，则角 α 的终边与单位圆交于点________(从 $A_1,A_2,\cdots,A_{12}$中选择，写出所有满足要求的点).



(15)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, & x\geqslant a,\\ 2^x-2, & x<a.\end{cases}$

①当 $a=1$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上的最小值为________；

②若 $f(x)$有 2 个零点，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题共 5 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(16)(本小题 10 分)

已知函数 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos x$.

(Ⅰ)求 $f(\frac{\pi}{6})$的值；

(Ⅱ)当 $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$时，求 $f(x)$的值域.

(17)(本小题 10 分)

已知关于 x 的不等式 $a(x-1)(x-2)>2x^2-8x+8$ 的解集为 A.

(Ⅰ)当 $a=1$ 时，求集合 A；

(Ⅱ)若集合 $A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$，求 a 的值；

(Ⅲ)若 $3\notin A$，直接写出 a 的取值范围.

(18)(本小题 10 分)

函数 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，若对任意的 $s,t\in(0,+\infty)$，均有 $f(s+t)>f(s)+f(t)$.

(Ⅰ)若 $f(1)>0$，证明：$f(2)>0$；

(Ⅱ)若对 $\forall x\in(0,+\infty)$，$f(x)>0$，证明：$f(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数；

(Ⅲ)若 $f(1)=0$，直接写出一个满足已知条件的 $f(x)$的解析式.

(19)(本小题 10 分)

已知函数 $f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}(a\neq 0)$.

(Ⅰ)若 $f(x)$为偶函数，求 a 的值.

(Ⅱ)从以下三个条件中选择两个作为已知条件，记所有满足条件的 a 值构成集合 A，若 $A\neq\varnothing$，求 A.

条件①：$f(x)$是增函数；

条件②：对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)>0$ 恒成立；

条件③：$\exists x_0\in[-1,1]$，使得 $f(x_0)\leqslant 4$.

注：如果选择的条件不符合要求，第(Ⅱ)问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

(20)(本小题 10 分)

对于非空数集 A，若其最大元素为 M，最小元素为 m，则称集合 A 的幅值为 $T_A=M-m$，若集合 A 中只有一个元素，则 $T_A=0$.

(Ⅰ)若 $A=\{2,3,4,5\}$，求 T_A；

(Ⅱ)若 $A=\{1,2,3,\cdots,9\}$，$A_i=\{a_i,b_i,c_i\}\subseteq A$，$A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\neq j)$，$A_1\cup A_2\cup A_3=A$，求 $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$ 的最大值，并写出取最大值时的一组 A_1，A_2，A_3；

(Ⅲ)若集合 $\mathbf{N}^*$ 的非空真子集 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ 两两元素个数均不相同，且 $T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}+\cdots+T_{A_n}=55$，求 n 的最大值.

(考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效)

东城区 2022—2023 学年度第一学期期末教学统一检测

高一数学参考答案及评分标准

2023.1

一、选择题(共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分)

(1)A	(2)B	(3)C	(4)A	(5)D
(6)C	(7)B	(8)D	(9)A	(10)D

二、填空题(共 5 小题,每小题 4 分,共 20 分)

(11)$(-\infty,\frac{1}{2})$　　(12)6

(13)$2\sqrt{2}$　　(14)$-\frac{1}{2}$；　A_3, A_9

(15)-1；　$(-\infty,0]\cup(1,2]$

三、解答题(共 5 小题,共 50 分)

(16)(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2})+\cos x$,

所以 $f(x)=2\cos x$.

所以 $f(\frac{\pi}{6})=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$. …………………………………… 5 分

(Ⅱ)当 $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时,$-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant 1$,

所以 $-1\leqslant 2\cos x\leqslant 2$.

所以 $f(x)$ 的值域为 $[-1,2]$. …………………………………… 10 分

(17)(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)当 $a=1$ 时,化简,得 $x^2-5x+6<0$,即 $(x-3)(x-2)<0$,解得 $2<x<3$.

所以集合 $A=\{x\,|\,2<x<3\}$. …………………………………… 4 分

(Ⅱ)原不等式等价于 $(x-2)[(a-2)x-(a-4)]>0$.

因为集合 $A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$,

所以 $a-2>0$.

所以原不等式等价于 $(x-2)\left(x-\frac{a-4}{a-2}\right)>0$.

所以 $\frac{a-4}{a-2}=-1$.

解得 $a=3$. …………………………………… 8 分

(Ⅲ)a 的取值范围是 $\{a\,|\,a\leqslant 1\}$. …………………………………… 10 分

(18)(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)令 $s=t=1$,得 $f(1+1)>f(1)+f(1)$,所以 $f(2)>2f(1)>0$. ………… 3 分

(Ⅱ)设 $0<x_1<x_2$,原式中令 $s=x_1, t=x_2-x_1$,

代入可得 $f(x_1+x_2-x_1)-f(x_1)>f(x_2-x_1)$,即 $f(x_2)-f(x_1)>f(x_2-x_1)$.

由于 $x_2-x_1>0$,所以 $f(x_2-x_1)>0$.

因此 $f(x_2)-f(x_1)>f(x_2-x_1)>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. …………………………………… 8 分

(Ⅲ)$f(x)=x-1, x\in(0,+\infty)$.(答案不唯一) …………………………………… 10 分

(19)(本小题 10 分)

解:(Ⅰ)若 $f(x)$ 为偶函数,则对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $f(-x)=f(x)$.

所以 $2^x+a\cdot 2^{-x}=2^{-x}+a\cdot 2^x$. 整理,得 $a(2^{-x}-2^x)=2^{-x}-2^x$,

解得 $a=1$. …………………………………… 4 分

(Ⅱ)选择条件①③:

因为 $y=2^x$ 是增函数,$y=2^{-x}$ 是减函数,

当 $a<0$ 时,$f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}$ 是增函数.

当 $a>0$ 时,令 $4^{x_1}=a, x_2=x_1-1$,则 $f(x_1)=2\sqrt{a}$.

因为 $f(x_2)=2^{x_2}+a\cdot 2^{-x_2}=\frac{5\sqrt{a}}{2}>2\sqrt{a}=f(x_1)$,

所以 $a>0$ 时,$f(x)=2^x+a\cdot 2^{-x}$ 不是增函数.

所以 $a<0$.

又因为 $\exists x_0\in[-1,1]$,使得 $f(x_0)\leqslant 4$,

所以 $f(-1)=\frac{1}{2}+2a\leqslant 4$,

解得 $a\leqslant\frac{7}{4}$.

综上,$A=(-\infty,0)$. …………………………………… 10 分

选择条件②③：

因为对于$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)>0$恒成立，即对$\forall x\in\mathbf{R}$，$2^x+a\cdot 2^{-x}>0$.

即对$\forall x\in\mathbf{R}$，$a>-4^x$，所以$a>0$.

又因为$\exists x_0\in[-1,1]$，使得$f(x_0)\leqslant 4$，即$2^{x_0}+a\cdot 2^{-x_0}\leqslant 4$.

所以$a\leqslant 4\times 2^{x_0}-(2^{x_0})^2$. 令$t=2^{x_0}$，$\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 2$，$g(t)=4t-t^2$.

因为$g(t)_{\max}=g(2)=4$，所以$a\leqslant 4$.

综上，$A=(0,4]$. …………………………………………………………………… 10分

(20)(本小题10分)

解：(Ⅰ)$T_A=5-2=3$. …………………………………………………………………… 2分

(Ⅱ)因为$A_i=\{a_i,b_i,c_i\}\subseteq A$，不妨设$a_i<b_i<c_i$，

由于要求$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$的最大值，且$A_i\cap A_j=\varnothing(i,j=1,2,3,i\neq j)$，

所以只需$\{c_1,c_2,c_3\}=\{7,8,9\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}=\{1,2,3\}$.

因此$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}$的最大值为$(7+8+9)-(1+2+3)=18$.

可取$A_1=\{1,4,9\}$，$A_2=\{2,5,8\}$，$A_3=\{3,6,7\}$.(答案不唯一)…………………………… 6分

(Ⅲ)设集合A_k的元素个数为$r_k(k=1,2,\cdots,n)$.

因为$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$两两元素个数均不相同，不妨设$r_1<r_2<\cdots<r_n$.

因为A_k为集合$\mathbf{N}^*$的非空真子集，则有$r_k\geqslant k$.

所以$T_{A_k}\geqslant k-1(k=1,2,\cdots,n)$.

于是$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}+\cdots+T_{A_n}\geqslant 0+1+2+\cdots+(n-1)$.

因为$T_{A_1}+T_{A_2}+T_{A_3}+\cdots+T_{A_n}=55$，

所以$n\leqslant 11$.

又$A_k=\{1,2,3,\cdots,k\}$，$k=1,2,3,\cdots,11$符合题意，

所以n的最大值为11. …………………………………………………………………… 10分