2024北京海淀高二（上）期末

数　　学

2024.01

学校____________　班级____________　姓名____________

考生须知	1．本试卷共6页，共3道大题，19道小题。满分100分。考试时间90分钟。 2．在试卷上准确填写学校名称、班级名称、姓名。 3．答案一律填涂或书写在试卷上，用黑色字迹签字笔作答。 4．考试结束，请将本试卷交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）椭圆$\frac{y^2}{2}+x^2=1$的焦点坐标为（　）

（A）$(-1,0),(1,0)$　（B）$(0,-1),(0,1)$　（C）$(-\sqrt{3},0),(\sqrt{3},0)$　（D）$(0,-\sqrt{3}),(0,\sqrt{3})$

（2）抛物线$y^2=x$的准线方程为（　）

（A）$x=-\frac{1}{4}$　（B）$y=-\frac{1}{2}$　（C）$x=-\frac{1}{2}$　（D）$y=-\frac{1}{4}$

（3）直线$3x+\sqrt{3}y+1=0$的倾斜角为（　）

（A）30°　（B）60°　（C）120°　（D）150°

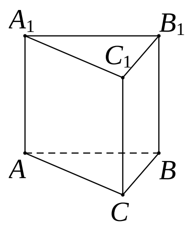
（4）已知点P与$A(0,2),B(-1,0)$共线，则点P的坐标可以为（　）

（A）$(1,-1)$　（B）$(1,4)$　（C）$(-\frac{1}{2},-1)$　（D）$(-2,1)$

（5）已知P为椭圆$C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的动点，$A(-1,0),B(1,0)$，且$|PA|+|PB|=4$，则$b^2=$（　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

（6）已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$ABB_1A_1\perp$底面ABC，则“$CB\perp BB_1$”是“$CB\perp AB$”的（　）



（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

（7）在空间直角坐标系$O-xyz$中，点P $(-2,3,1)$到x轴的距离为（　）

（A）2　（B）3　（C）$\sqrt{5}$　（D）$\sqrt{10}$

（8）已知双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$的左右顶点分别为A_1,A_2，右焦点为F，以A_1F为直径作圆，与双曲线C的右支交于两点P,Q.若线段PF的垂直平分线过A_2，则b^2的数值为（　）

（A）3　　（B）4　　（C）8　　（D）9

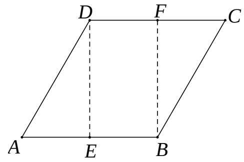
（9）设动直线 l 与 $\odot O:(x+1)^2+y^2=5$ 交于 A,B 两点. 若弦长 $|AB|$ 既存在最大值又存在最小值，则在下列所给的方程中，直线 l 的方程可以是　　　　（ ）

（A）$x+2y=a$　（B）$ax+y=2a$　（C）$ax+y=2$　（D）$x+ay=a$

（10）如图，已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，且 $\angle A=60^\circ$，E,F 分别为边 AB，DC 中点. 将△BCF 和△ADE 分别沿 BF,DE 折叠，若满足 $AC//$ 平面 $DEBF$，则线段 AC 的取值范围为（ ）

（A）$[\sqrt{3},2\sqrt{3})$　　（B）$[\sqrt{3},2\sqrt{3}]$

（C）$[2,2\sqrt{3})$　　（D）$[2,2\sqrt{3}]$

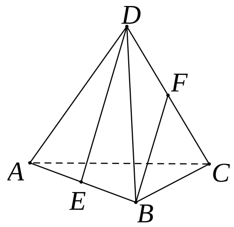


第二部分（非选择题 共 60 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分。

（11）双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程为__________.

（12）如图，已知 E,F 分别为三棱锥 $D-ABC$ 的棱 AB,DC 的中点，则直线 DE 与 BF 的位置关系是________（填“平行”，“异面”，“相交”）.



（13）经过点 $A(0,1)$ 且与直线 $l:x+2y-1=0$ 垂直的直线方程为____________.

（14）作为我国古代称量粮食的量器，米斗有着吉祥的寓意，是丰饶富足的象征，带有浓郁的民间文化韵味. 右图是一件清代老木米斗，可以近似看作正四棱台，测量得其内高为 12cm，两个底面内棱长分别为 18cm 和 9cm，则估计该米斗的容积为__________ cm^3.

（15）已知四边形 $ABCD$ 是椭圆 $M:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的内接四边形，其对角线 AC 和 BD 交于原点 O，且斜率之积为 $-\frac{1}{3}$，给出下列四个结论：

① 四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

② 存在四边形 $ABCD$ 是菱形；

③ 存在四边形 $ABCD$ 使得 $\angle AOD=91^\circ$；

④ 存在四边形 $ABCD$ 使得 $|AC|^2+|BD|^2=\frac{64}{5}$.

其中所有正确结论的序号为__________.

三、解答题共 4 小题，共 40 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 10 分）

已知圆 $C:(x-2)^2+y^2=r^2\ (r>0)$ 与 y 轴相切.

（Ⅰ）直接写出圆心 C 的坐标及 r 的值；

（Ⅱ）直线 $l: 3x-4y-1=0$ 与圆 C 交于两点 A,B，求 $|AB|$.

（17）（本小题 10 分）

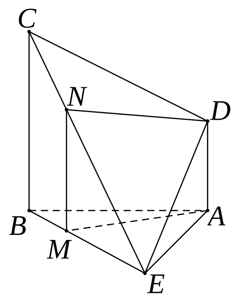
已知直线 $l: y=kx+1$ 经过抛物线 $C: x^2=2py$ 的焦点 F.

（Ⅰ）求 C 的方程；

（Ⅱ）将 l 向上平移 5 个单位得到 l'，l' 与 C 交于两点 M,N. 若 $|MN|=24$，求 k 值.

（18）（本小题 10 分）

如图，四棱锥 $E-ABCD$ 中，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，$AD/\!/BC$，$AE=AB=BC=2$，$AD=1$，过 AD 的平面分别与棱 EB,EC 交于点 M,N.



（Ⅰ）求证：$AD/\!/MN$；

（Ⅱ）记二面角 $A-DN-E$ 的大小为 θ，求 $\cos\theta$ 的最大值.

（19）（本小题 10 分）

已知椭圆 $E: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个顶点分别为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，离心率 $e=\dfrac{1}{2}$，$P(x_0,y_0)$ $(y_0\neq 0)$ 为椭圆上的动点，直线 PA,PB 分别交动直线 $x=t$ 于点 C,D，过点 C 作 PB 的垂线交 x 轴于点 H.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}$ 是否存在最大值？若存在，求出最大值；若不存在，说明理由.

海淀区高二年级练习

数学参考答案

2024.01

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

（1）B	（2）A	（3）C	（4）B	（5）C
（6）B	（7）D	（8）C	（9）D	（10）A

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分）

（11）$y=2x$ 或 $y=-2x$　　（12）异面

（13）$2x-y+1=0$　　（14）2268

（15）①③④　（答案中若含有②，0 分；①③④中只含一个，2 分；①③④中只含两个 3 分；①③④，4 分）

三、解答题（本大题共 4 小题，共 40 分）

（16）（本小题 10 分）

解:（Ⅰ）$C(2,0)$，--------------------2 分

$r=2$；--------------------4 分

（Ⅱ）圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|6-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1$，--------------------7 分

$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-1}=2\sqrt{3}$. --------------------10 分

（17）（本小题 10 分）

解:（Ⅰ）由题设可得 $\dfrac{p}{2}=1$，即 $p=2$，--------------------2 分

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. --------------------3 分

（Ⅱ）由已知可得 $l':y=kx+6$，--------------------4 分

由 $\begin{cases} x^2=4y, \\ y=kx+6 \end{cases}$ 消 y 得 $x^2-4kx-24=0$，--------------------5 分

设 l' 与 C 交于两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=4k, x_1x_2=-24$，--------------------7 分

$|MN|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}$ --------------------8 分

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\sqrt{(1+k^2)[(4k)^2-4\times(-24)]}$

$=4\sqrt{(1+k^2)(k^2+6)}$ --9 分

由$|MN|=24$化简整理得$k^4+7k^2-30=0$，

解得$k^2=3, k^2=-10$（舍）

所以$k=\pm\sqrt{3}$.　--10 分

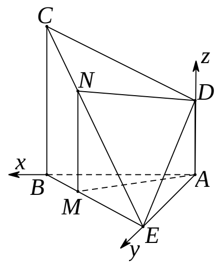
（18）（本小题 10 分）

解:（Ⅰ）因为$AD // BC$，　$AD\not\subset$平面BCE，$BC\subset$平面BCE

所以$AD //$ 平面BCE．-------------------------2 分

因为过AD的平面分别与棱EB, EC交于点M, N，

所以$AD//MN$．--------------------------------4 分



（Ⅱ）因为$AE\perp$平面$ABCD$，

$AB\subset$平面$ABCD$，　$AD\subset$平面$ABCD$，

所以$AE\perp AB$，　$AE\perp AD$．

又因为$AB\perp AD$.

如图，建立空间直角坐标系$A-xyz$，-------------------------------5 分

则$B(2,0,0), C(2,0,2), E(0,2,0), D(0,0,1)$，

所以$\overrightarrow{ED}=(0,-2,1), \overrightarrow{EC}=(2,-2,2)$，　$\overrightarrow{BE}=(-2,2,0), \overrightarrow{AD}=(0,0,1)$ --------6 分

设$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BE}$，　$\lambda\in[0,1]$.

则$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=(2,0,0)+\lambda(-2,2,0)=(2-2\lambda,2\lambda,0)$

设平面AND即平面$AMND$的法向量为$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}z=0,\\ (2-2\lambda)x+2\lambda y=0,\end{cases}$

令$x=\lambda$，则$y=\lambda-1$，于是$\boldsymbol{m}=(\lambda,\lambda-1,0)$. ------------------------7 分

设平面END即平面ECD的法向量为$\boldsymbol{n}=(x',y',z')$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2y'+z'=0,\\ 2x'-2y'+2z'=0,\end{cases}$

令$y'=1$，则$z'=2, x'=-1$，于是$\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$. ----------------------8 分

所以，$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{2(\lambda-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}}$ --9 分

所以，$\cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>\in[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{\sqrt{6}}{6}]$.

由 $\boldsymbol{m}=(\lambda,\lambda-1,0)$， $\boldsymbol{n}=(-1,1,2)$ 的方向判断可得 $\theta=\pi-<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>$，

所以，当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，$\cos\theta$ 的最大值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ------------------------10 分

（19）（本小题 10 分）

解：（I）由题设，$\begin{cases} a=2, \\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases}$ -----------------------------------2 分

解得 $c=1$， ---3 分

$b^2=3$，

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. -------------------------------------4 分

（II）由题意得，直线 PA 为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$， -------------------------5 分

代入 $x=t$，得 $y_C=\dfrac{(t+2)y_0}{x_0+2}$.

因为直线 PB 为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，

同理可得 $D\left(t,\dfrac{(t-2)y_0}{x_0-2}\right)$. --------6 分

由 $CH\perp PB$ 得直线 CH：

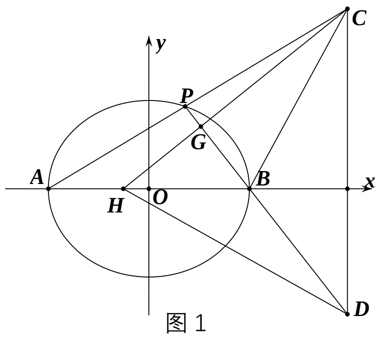


图 1

$$y-\frac{(t+2)y_0}{x_0+2}=\frac{2-x_0}{y_0}(x-t)，$$ ------------------7 分

代入 $y=0$，得 $x_H=t+\dfrac{(t+2){y_0}^2}{{x_0}^2-4}$， ---------------------------------8 分

由 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 E 上，得 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+\dfrac{{y_0}^2}{3}=1$，整理得 ${y_0}^2=\dfrac{3\left(4-{x_0}^2\right)}{4}$， ---9 分

所以 $x_H=t-\dfrac{3}{4}(t+2)=\dfrac{t-6}{4}$，从而可得 $H\left(\dfrac{t-6}{4},0\right)$.

所以$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}=\left(\frac{3t+6}{4},\frac{(t+2)y_0}{x_0+2}\right)\cdot\left(\frac{3t+6}{4},\frac{(t-2)y_0}{x_0-2}\right)=\frac{(3t+6)^2}{16}+\frac{(t^2-4){y_0}^2}{{x_0}^2-4}$

$$=\frac{(3t+6)^2}{16}-\frac{3(t^2-4)}{4}=-\frac{3(t-6)^2}{16}+12.$$

综上，存在$t=6$，使得$\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HD}$有最大值 12. ----------------------10 分

备注：

以上评分标准供大家评阅试卷参考，与评标不同的解法可以按评标采分点相对应给分。