

北京交大附中 2023—2024 学年第一学期期中练习

高一数学 2023.10



说明：本试卷共 4 页，共 120 分。考试时长 90 分钟。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1\}$, $N = \{x | -3 \leq x < 0\}$, 则 $M \cap N = (\quad)$
 - A. $\{-2\}$
 - B. $\{-2, -1\}$
 - C. $\{0, 1\}$
 - D. $\{-2, -1, 0, 1\}$

2. 命题“ $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, $x_0^2 + 1 \leq 2x_0$ ”的否定为 ()
 - A. $\forall x \in (0, +\infty)$, $x^2 + 1 > 2x$
 - B. $\forall x \in (0, +\infty)$, $x^2 + 1 \leq 2x$
 - C. $\forall x \in (-\infty, 0)$, $x^2 + 1 \leq 2x$
 - D. $\forall x \in (-\infty, 0]$, $x^2 + 1 > 2x$

3. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的两根同号, 则 m 的取值范围是 ()
 - A. $m \leq 1$
 - B. $m \leq 0$
 - C. $0 < m \leq 1$
 - D. $0 \leq m \leq 1$

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x < 1 \\ -x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(f(-1))$ 的值为 ()
 - A. 3
 - B. 0
 - C. -1
 - D. -2

5. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 则“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的 ()
 - A. 充分不必要条件
 - B. 必要不充分条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分又不必要条件

6. 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增且是奇函数的是 ()
 - A. $y = x + 1$
 - B. $y = x - \frac{1}{x}$
 - C. $y = |x|$
 - D. $y = x^2$

7. 已知实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示, 则下列式子中正确的是 ()
 - A. $b - a < c + a$
 - B. $c^2 < ab$
 - C. $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$
 - D. $|b|c < |a|c$

8. 设 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x < 0$ 时, $f(x) = 3x - 1$, 则 $f(0) + f(4) = (\quad)$
 - A. 12
 - B. -12
 - C. 13
 - D. -13

9. 已知当 $x > 0$ 时, 不等式 $x^2 - mx + 16 > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 8)$ B. $(-\infty, 8]$ C. $[8, +\infty)$ D. $(6, +\infty)$

10. 对于全集 U 的子集 A 定义函数 $f_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \in \complement_U A) \end{cases}$ 为 A 的特征函数, 设 A, B 为全集 U 的子集, 下列结论

中错误的是 ()

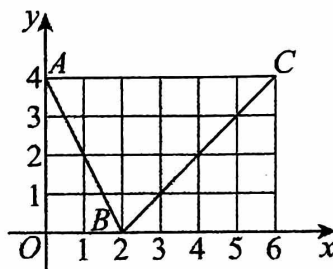
- A. 若 $A \subseteq B$, 则 $f_A(x) \leq f_B(x)$ B. $f_{\complement_U A}(x) = 1 - f_A(x)$
 C. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ D. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$



二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分, 把答案填在题中横线上)

11. 函数 $f(x) = \sqrt{2x-1}$ 的定义域是 _____ (用区间形式表示)

12. 如图, 函数 $f(x)$ 的图象是折线段 ABC , 其中 A, B, C 的坐标分别为 $(0, 4), (2, 0), (6, 4)$, 则 $f(x) \leq 2$ 的解集为 _____ (用区间形式表示)



13. 定义在 R 上的函数 $f(x)$, 给出下列三个论断:

① $f(x)$ 在 R 上单调递增; ② $x > 1$; ③ $f(x) > f(1)$. 以其中的两个论断为条件, 余下的一个论断为结论, 写出一个正确的命题: _____, _____ 推出 _____ (把序号写在横线上)

14. 为了保护水资源, 提倡节约用水, 某城市对居民生活用水, 实行“阶梯水价”. 计算方法如下表:

每户每月用水量	水价
不超过 12m^3 的部分	3 元/ m^3
超过 12m^3 但不超过 18m^3 的部分	6 元/ m^3
超过 18m^3 的部分	9 元/ m^3

若某户居民本月交纳的水费为 90 元, 则此户居民本月用水量为 _____ m^3 .



15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & x \leq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$ 给出下列四个结论:

① 函数 $f(x)$ 的值域是 \mathbb{R} ;

② $\forall x_1, x_2 \in (-2, +\infty) (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$;

③ $\exists x_0 > 0$, 使得 $f(-x_0) = f(x_0)$;

④ 若互不相等的实数 x_1, x_2, x_3 满足 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3)$, 则 $x_1 + x_2 + x_3$ 的取值范围是 $(-3, +\infty)$.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题 (本大题共 5 小题, 共 60 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

16. (本小题 12 分)

设关于 x 的不等式 $|x - a| < 2$ 的解集为 A , 不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ 的解集为 B .

(I) 求集合 A, B ;

(II) 若 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

17. (本小题 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

(I) 用函数单调性的定义证明: $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上是增函数;

(II) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 4]$ 上的值域.



18. (本小题 12 分)

已知二次函数 $f(x)$ 的最小值为 1, 且 $f(0) = f(2) = 3$.

(I) 求 $f(x)$ 的解析式;

(II) 在区间 $[-3, -1]$ 上, $y = f(x)$ 的图象恒在 $y = 2x + 2m + 1$ 的图象上方, 确定实数 m 的取值范围.

19. (本小题 12 分)

为了减少能源损耗, 房屋的屋顶和外墙通常需要建造隔热层, 某地正在建设一座购物中心, 现在计划对其建筑物建造可使用 40 年的隔热层, 已知每厘米厚的隔热层建造成本为 8 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 P (单位: 万元) 与隔热层厚度 x (单位: cm) 满足关系: $P(x) = \frac{3m}{4x+5}$ ($x \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq 8$). 若不建隔热层, 每年能源消耗费用为 9 万元. 设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与 40 年的能源消耗费用之和.

(I) 求 m 的值及 $f(x)$ 的表达式.

(II) 当隔热层的厚度为多少时, 总费用 $f(x)$ 达到最小, 并求最小值.



20. (本小题 12 分)

已知 $f(x)$ 定义域为 \mathbf{R} 的函数, 若对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 - x_2 \in S$, 均有 $f(x_1) - f(x_2) \in S$, 则称 $f(x)$ 是 S 关联.

(I) 判断和证明函数 $f(x) = 2x + 1$ 是否是 $[0, +\infty)$ 关联? 是否是 $[0, 1]$ 关联?

(II) 若 $f(x)$ 是 $\{3\}$ 关联, 当 $x \in [0, 3)$ 时, $f(x) = x^2 - 2x$, 解不等式: $2 \leq f(x) \leq 3$.

