



石景山区 2023-2024 学年第一学期初二期末试卷

数 学

学校 _____ 姓名 _____ 准考证号 _____

考生须知

1. 本试卷共 7 页，共三道大题，28 道小题。满分 100 分。考试时间 100 分钟。
2. 在试卷和答题卡上准确填写学校名称、姓名和考号。
3. 试卷答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
4. 考试结束，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的。

1. 6 的算术平方根为

- (A) 3 (B) $\pm\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{6}$ (D) $-\sqrt{6}$

2. 我国在环保方面取得的成就，为可持续发展奠定了基础。以下四个环保标志分别是“绿色食品”“节水”“安全饮品”“循环再生”，其中是轴对称图形的是



(A)



(B)



(C)



(D)

3. 若代数式 $\frac{3x}{x-1}$ 的值为 0，则实数 x 的值为

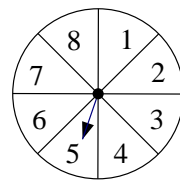
- (A) $x=0$ (B) $x=1$ (C) $x>0$ (D) $x\geq 1$

4. 下列说法中，正确的是

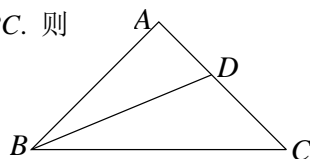
- (A) “在标准大气压下，将水加热到 100°C ，水会沸腾”是随机事件
(B) 随机事件是可能会发生，也可能不会发生的事件
(C) 投掷一枚硬币 10 次，一定有 5 次正面向上
(D) “事件可能发生”是指事件发生的机会很多



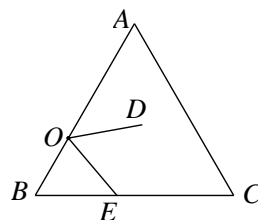
14. 国庆期间，某超市开展“有奖促销”活动，凡购物不少于 50 元的顾客均有一次转动转盘的机会. 如图，转盘被平均分为 8 等份，指针固定不动，转动转盘，转盘停止后，当指针指向数字 8 时，该顾客获一等奖；当指针指向 3 或 5 时，该顾客获二等奖；若指针指向分界线则重转. 顾客转动一次转盘，获一等奖或二等奖的可能性大小为_____.



15. 如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=1$ ， $BC=\sqrt{2}$. BD 平分 $\angle ABC$. 则
 (1) $\angle C=$ _____°；
 (2) 点 D 到 BC 的距离为_____.



16. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AB=6$ ，点 O 在 AB 上，且 $AO=4$ ，点 E 是边 BC 上一动点，连接 OE ，将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到线段 OD ，且 $\angle DOE=60^\circ$.
 (1) 连接 DE ，则 $\triangle ODE$ 的形状为_____；
 (2) 当点 E 在边 BC 上运动时，连接 CD ，
 则 CD 的最小值为_____.



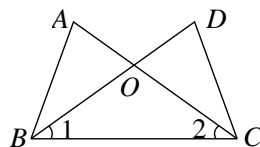
三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 每小题 5 分；第 22-23 每小题 6 分；24 题 5 分，第 25-26 每小题 6 分；第 27-28 每小题 7 分）解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

17. 计算： $\sqrt[3]{8}-\sqrt{(-2)^2}-(\pi-2)^0+|1-\sqrt{3}|$.

18. 计算： $\sqrt{18}\times 3\sqrt{\frac{3}{2}}-2\sqrt{12}$.

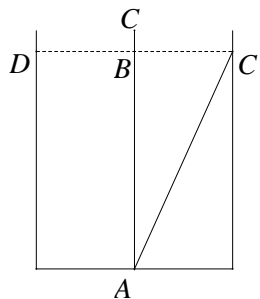
19. 解方程： $\frac{3}{2}-\frac{1}{3x-1}=\frac{13}{6x-2}$.

20. 如图， AC ， BD 交于点 O ， $OA=OD$ ， $\angle 1=\angle 2$.
 求证： $AB=CD$.

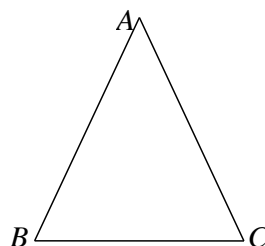




21. 《九章算术》中记载了这样一个问题：“今有池方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐. 问水深、葭长各几何？”题目大意为：“如图，有一个池塘，其底面是边长为 10 尺的正方形，一棵芦苇 AC 生长在池塘的中央，高出水面的部分 BC 为 1 尺，如果把该芦苇沿与池塘边垂直的方向拉向池塘边，那么芦苇的顶部 C 恰好碰到池塘边的 C' 处，问水深和芦苇长各多少尺？”请根据题意解决问题.



22. 已知：如图， $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $AB>BC$ 。
- (1) 利用尺规作图，作 $\triangle ABC$ 中 AC 边上的高 BD (不写作法，保留作图痕迹)；
- (2) 求证： $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle A$ 。



23. 已知 $a^2 + a - 1 = 0$ ，求代数式 $\left(\frac{a}{a-1} - 1\right) \div \frac{a^3 - a}{a^2 - 2a + 1}$ 的值.

24. 台球技艺中包含了许多物理、数学的知识. 图 1 是台球桌面的一部分，由于障碍球 E 的阻挡，击球者想通过正面击打主球 M ，使其撞击台球桌边框（仅碰撞一次），经过一次反弹后正面撞击到目标球 F . 球的反弹路径类似于光的反射光路. 台球桌面抽象为长方形，球抽象为点，如图 2，请在 AD 边上作出撞击点 P ，使得 $\angle MPA = \angle FPD$ ，并用数学知识进行证明.



图 1

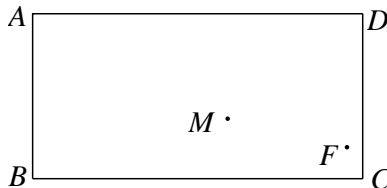


图 2

锦囊：某同学阅读理解题意后，先画了一个草图（如图 3）进行分析，发现“要保证 $\angle 1 = \angle 2$ ，只需保证 $\angle 1 = \angle 3$ 即可”。

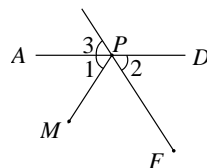


图 3



25. 2023年8月29日华为Mate 60系列正式开售,某用户购买后进行手机测试,分别在5G和4G网络环境下,下载容量为920兆的同一个文件,发现在5G网络环境下下载所需时间比4G网络环境下下载的时间少105秒,测得5G网络环境下下载的速度是4G网络环境下下载速度的11.5倍,问该用户在5G网络环境下下载文件的速度是每秒多少兆?

26. 小明根据学习“数与式”积累的经验,想通过“由特殊到一般”的方法探究分式的运算规律.下面是小明的探究过程,请补充完整:

(1) 具体运算,发现规律.

第1个: $\frac{2}{1} \times 2 = 2 + 2;$

第2个: $\frac{3}{2} \times 3 = \frac{3}{2} + 3;$

第3个: $\frac{4}{3} \times 4 = \frac{4}{3} + 4;$

第4个: $\frac{5}{4} \times 5 = \frac{5}{4} + 5;$

第5个: _____.

.....

(2) 观察、归纳,发现规律,得出猜想:

第 n 个等式可以表示为: _____ (n 为正整数).

(3) 证明(2)中的猜想.



27. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， D 为射线 BC 上一点（不与点 B ， C 重合），连接 AD 并延长到点 E ，使得 $DE=AD$ ，连接 BE 。过点 B 作 BE 的垂线交直线 AC 于点 F 。

(1) 如图1，点 D 在线段 CB 上，且 $DB < CD$ 。

①请补全图形；

②判断 CD ， DB ， CF 之间的数量关系，并证明。

(2) 如图2，若点 D 在线段 BC 的延长线上，请画出图形，直接写出 CD ， DB ， CF 之间的数量关系。

(3) 基于上面的题目，请提出一个变式或拓展探究性的问题。

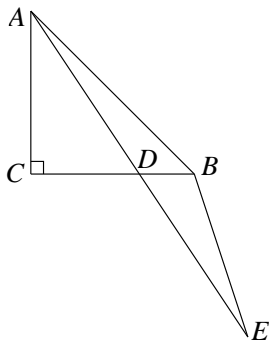


图1

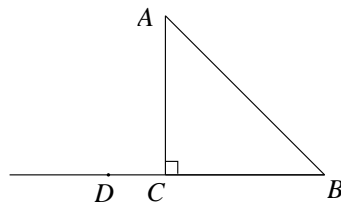


图2



28. 在 6×6 的正方形网格中，小正方形的边长为 1，网格线的交点为格点， $\triangle ABC$ 为格点三角形（顶点都在格点上）. 对于点 P 与格点 $\triangle ABC$ 给出如下定义：点 P 为网格中一点（与点 B, C 不共线），连接 PA, PB, PC ，若 PA 与 $\triangle PBC$ 的某条边相等，则称 P 为 $\triangle ABC$ 的关联点.

(1) 如图 1，在格点 P_1, P_2, P_3 中，是 $\triangle ABC$ 关联点的是_____；

(2) 如图 2，若点 P 为 $\triangle ABC$ 的关联点，当点 P 是 $\triangle ABC$ 内部(不含边界)的格点时，请标出所有满足条件的点 P 的位置；

(3) 如图 2， E 是 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点（不与点 A, C 重合），过点 E 作 AC 的垂线，与 $\triangle ABC$ 的边 AB (或 BC) 交于点 F . 若线段 EF 上存在 $\triangle ABC$ 的两个关联点，求线段 AE 的取值范围.

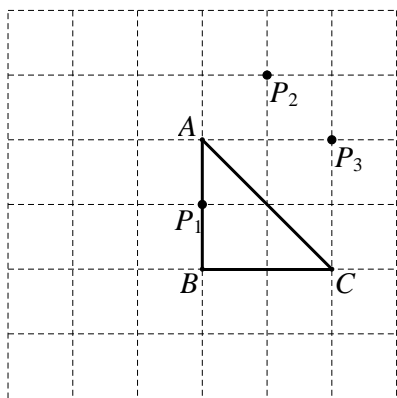


图 1

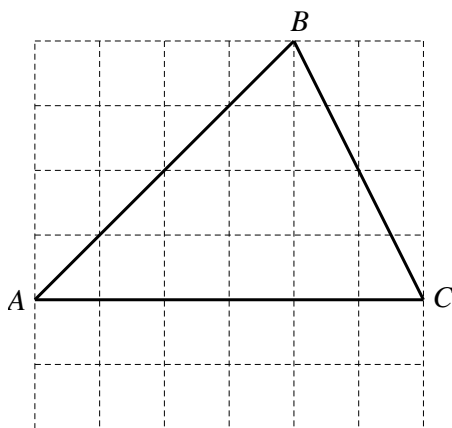


图 2



石景山区 2023-2024 学年第一学期初二期末

数学试卷答案及评分参考

阅卷须知:

为了阅卷方便,解答题中的推导步骤写得较为详细,考生只要写明主要过程即可。若考生的解法与本解法不同,正确者可参照评分参考给分,解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数

一、选择题(本题共 16 分,每小题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	A	B	B	D	A	C

二、填空题(本题共 16 分,每小题 2 分)

9. $x \geq 1$ 10. mn ; 分式的基本性质 11. 17 12. 75
 13. 答案不唯一,如 $AB=DE$; SAS 14. $\frac{3}{8}$
 15. 45; $\sqrt{2}-1$ 16. 等边三角形; $2\sqrt{3}$.

三、解答题(本题共 68 分,第 17-21 每小题 5 分;第 22-23 每小题 6 分;24 题 5 分,第 25-26 每小题 6 分;第 27-28 每小题 7 分)解答应写出文字说明,演算步骤或证明过程.

17. 解: 原式 $= 2 - 2 - 1 + \sqrt{3} - 1$ 4 分
 $= \sqrt{3} - 2.$ 5 分
18. 解: 原式 $= 3\sqrt{9 \times 3} - 2 \times 2\sqrt{3}$ 2 分
 $= 3 \times 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ 4 分
 $= 5\sqrt{3}.$ 5 分
19. 解: 原方程可化为: $\frac{3}{2} - \frac{1}{3x-1} = \frac{13}{2(3x-1)}$ 1 分
 去分母,得 $3(3x-1) - 2 = 13.$ 2 分
 去括号,整理得 $9x - 5 = 13.$ 3 分
 解得 $x = 2.$
 经检验 $x = 2$ 是原分式方程的解.
 \therefore 原分式方程的解为 $x = 2.$ 5 分



20. 证明:

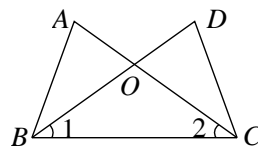
$\because \angle 1 = \angle 2,$

$\therefore OB = OC$ (等角对等边).

.....2 分

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 中

$$\begin{cases} OA = OD \\ \angle AOB = \angle DOC \\ OB = OC \end{cases}$$



$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC$ (SAS).

.....4 分

$\therefore AB = CD$ (全等三角形的对应边相等).

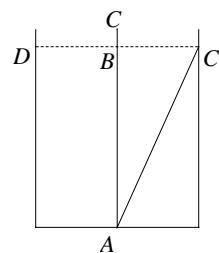
.....5 分

21. 解: 由题意, 原问题可转化为以下数学问题:

已知: $\text{Rt}\triangle ABC'$ 中, $\angle ABC' = 90^\circ$, 点 B 为 DC' 的中点,

$DC' = 10$, $AC = AC'$, $BC = 1$.

求 AB 和 AC 的长.



$\because DC' = 10$, 点 B 为 DC' 的中点,

$\therefore BC' = \frac{1}{2}DC' = 5.$

.....1 分

设 $AB = x$, 则 $AC' = AC = x + 1$.

在 $\text{Rt}\triangle ABC'$ 中,

.....3 分

$\because AB^2 + BC'^2 = AC'^2,$

$\therefore x^2 + 5^2 = (x + 1)^2.$

解得 $x = 12$.

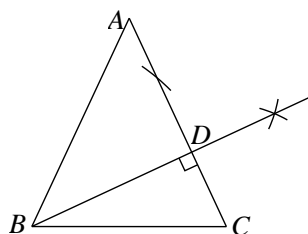
.....4 分

$\therefore AB = 12, AC = 13.$

答: 水深 12 尺, 芦苇长 13 尺.

.....5 分

22. 解: (1) 尺规作图, 如图所示:



.....2 分



(2)

证明: $\because BD \perp AC$ 于 D ,

$\therefore \angle 1 + \angle C = 90^\circ$3 分

$\because AB = AC$,

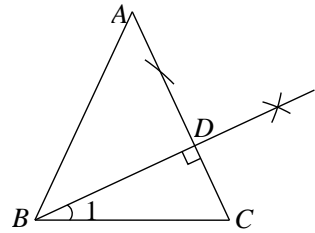
$\therefore \angle ABC = \angle C$.

$\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$,

$\therefore \angle A + 2\angle C = 180^\circ$.

$\therefore \frac{1}{2}\angle A + \angle C = 90^\circ$.

$\therefore \angle DBC = \angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$6 分



23. 解: 原式 = $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a-1}{a-1}\right) \div \frac{a(a+1)(a-1)}{(a-1)^2}$2 分

= $\frac{1}{a-1} \cdot \frac{(a-1)^2}{a(a+1)(a-1)}$3 分

= $\frac{1}{a(a+1)}$

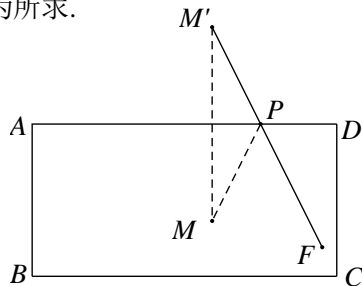
= $\frac{1}{a^2 + a}$ 4 分

$\because a^2 + a - 1 = 0$,

$\therefore a^2 + a = 1$

\therefore 原式 = 1.6 分

24. 解: 如图所示, 作点 M 关于 AD 的对称点 M' , 连接 $M'F$ 交 AD 于点 P , 点 P 即为所求.



.....2 分



连接 MP , MM' .

\because 点 M 与点 M' 关于 AD 对称,
 \therefore 直线 AD 是 MM' 的垂直平分线.3 分

$\therefore MP = M'P$.

$\therefore \angle MPA = \angle M'PA$.

$\because \angle M'PA = \angle FPD$,

$\therefore \angle MPA = \angle FPD$5 分

25. 解: 设该用户在 4G 网络环境下载的速度是每秒 x 兆,
 在 5G 网络环境下载的速度是每秒 $11.5x$ 兆.1 分

根据题意列方程, 得 $\frac{920}{11.5x} = \frac{920}{x} - 105$3 分

解得: $x = 8$5 分

经检验, $x = 8$ 是原分式方程的解且符合实际意义.

$11.5 \times 8 = 92$.

答: 该用户在 5G 网络环境下载文件的速度是每秒 92 兆.6 分

26. 解: (1) 第 5 个: $\frac{6}{5} \times 6 = \frac{6}{5} + 6$1 分

(2) 第 n 个等式可以表示为: $\frac{n+1}{n} \cdot (n+1) = \frac{n+1}{n} + (n+1)$.

(3) 证明:3 分

$$\because \frac{n+1}{n} \cdot (n+1) = \frac{(n+1)^2}{n},$$

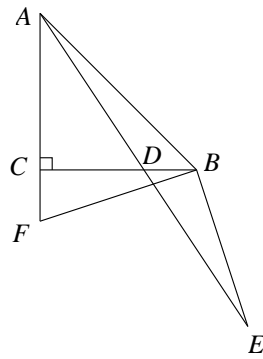
$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n} + (n+1) &= \frac{n+1}{n} + \frac{n(n+1)}{n} \\ &= \frac{(n+1)(1+n)}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n},$$

$$\therefore \frac{n+1}{n} \cdot (n+1) = \frac{n+1}{n} + (n+1). \quad \dots\dots 6 \text{ 分}$$



27. 解：(1) ①补全图形如图所示：



.....1分

②判断： $CD = DB + CF$.

证明：过点 E 作 $EG \perp CB$ 交 CB 的延长线于 G .

$\because \angle ACB = 90^\circ, EG \perp CB$ 于 G ,

$\therefore \angle ACD = \angle EGD = 90^\circ$.

$\because DE = AD, \angle ADC = \angle EDG$,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle EGD$.

$\therefore AC = EG, CD = GD$.

$\because AC = BC$,

$\therefore BC = EG$.

$\because BE \perp BF$,

$\therefore \angle FBE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBF + \angle GBE = 90^\circ$.

\because 在 $\triangle EGB$ 中, $\angle GEB + \angle GBE = 90^\circ$,

$\therefore \angle CBF = \angle GEB$.

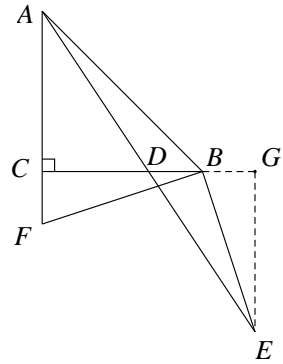
$\because \angle FCB = \angle BGE = 90^\circ$

$\therefore \triangle BCF \cong \triangle EGB$.

$\therefore CF = GB$.

$\because DG = DB + BG$,

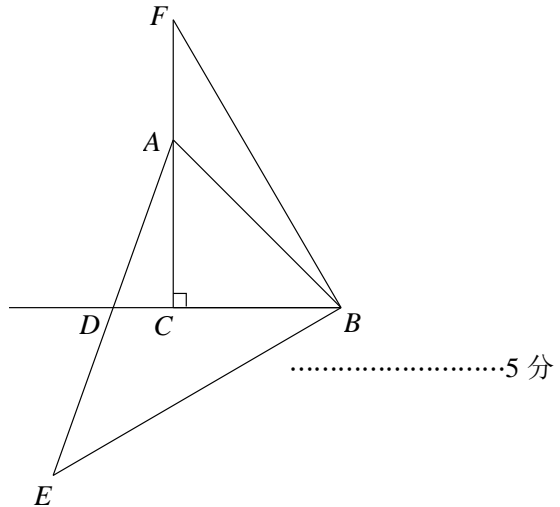
$\therefore CD = DB + CF$.



.....4分



(2) 画出图形如下:



.....5分

数量关系: $CD = CF - DB$6分

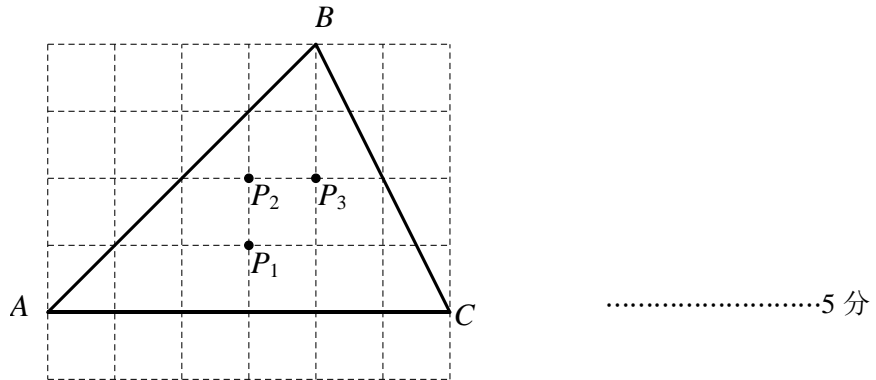
(3) 答案不唯一, 只要合理有价值即可.

如: 点 D 在线段 CB 上, 且 $DB > CD$, 判断 CD, DB, CF 之间的数量关系.

如: 判定 AF 与 CD 的数量关系并证明等.7分

28. 解: (1) P_1, P_32分

(2) 如图所示:



.....5分

(3) $\sqrt{10} \leq AE \leq 4$7分