

数学试卷

2023.11

数学教学班：_____ 姓名：_____ 学号：_____

考生须知

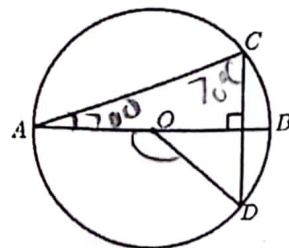
1. 本试卷有三道大题，共 7 页。考试时长 120 分钟，满分 100 分。
2. 考生务必将答案填写在机读卡 and 答题纸上，在试卷上作答无效。
3. 考试结束后，考生应将机读卡 and 答题纸交回。

第一部分 选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项均只有一个。

1. 二次函数 $y=(x-2)^2+3$ 的顶点坐标是 ()
 (A) $(-2,3)$ (B) $(2,3)$ (C) $(-2,-3)$ (D) $(2,-3)$
2. 将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位长度，得到的抛物线是 ()
 (A) $y=\frac{1}{2}x^2-1$ (B) $y=\frac{1}{2}x^2+1$ (C) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$ (D) $y=\frac{1}{2}(x+1)^2$
3. 用配方法解方程 $x^2+2x-3=0$ ，下列变形正确的是 ()
 (A) $(x+1)^2=-2$ (B) $(x+1)^2=2$ (C) $(x+1)^2=-4$ (D) $(x+1)^2=4$
4. 若点 $(-2, a)$ ， $(3, b)$ 都在二次函数 $y=(x-1)^2-1$ 的图象上，则 a 与 b 的大小关系是 ()
 (A) $a < b$ (B) $a = b$ (C) $a > b$ (D) 不确定
5. 如图，线段 AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ， $\angle CAB = 20^\circ$ ，则 $\angle AOD$ 等于 ()
 (A) 120° (B) 140° (C) 150° (D) 160°





6. 某区为发展教育事业，加强了对教育经费的投入，2021年投入3000万元，预计2023年投入5000万元。设教育经费的年平均增长率为 x ，根据题意，下面所列方程正确的是（ ）

(A) $3000(1+x^2) = 5000$

(B) $3000x^2 = 5000$

(C) $3000(1+x)^2 = 5000$

(D) $3000(1+x\%)^2 = 5000$

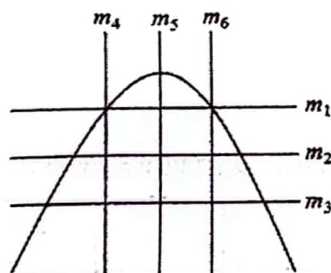
7. 某同学将如图所示的三条水平直线 m_1, m_2, m_3 的其中一条记为 x 轴（向右为正方向），三条竖直直线 m_4, m_5, m_6 的其中一条记为 y 轴（向上为正方向），并在此坐标平面内画出了二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1 (a < 0)$ 的图象，那么她所选择的 x 轴和 y 轴分别为直线（ ）

(A) m_1, m_4

(B) m_2, m_5

(C) m_3, m_6

(D) m_2, m_4



8. 已知抛物线 $y = x^2 - 1$ ，直线 $l: x = a$ ，将抛物线在直线 l 左侧的部分沿 x 轴翻折，其余部分保持不变，组成图形 G 。如果对于任意的实数 n ，都存在实数 m ，使得点 $P(m, n)$ 在 G 上，则 a 的取值范围是（ ）

(A) $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

(B) $a \leq -\sqrt{2}$ 或 $a \geq \sqrt{2}$

(C) $a \leq \sqrt{2}$

(D) $a \geq -\sqrt{2}$

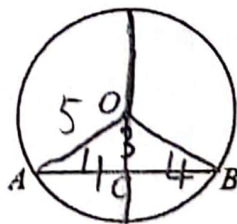
第二部分 非选择题

二、填空题（共16分，每题2分）

9. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + a - 1 = 0$ 有一个实数根为0，则 a 的值为_____。

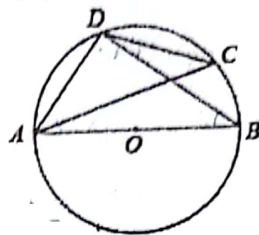
10. 一个二次函数满足过点 $(0, 1)$ ，且开口向上，该二次函数可以为_____。

11. 如图， $\odot O$ 的直径为10， AB 为弦， $OC \perp AB$ ，垂足为 C ，若 $OC = 3$ ，则弦 AB 的长为_____。



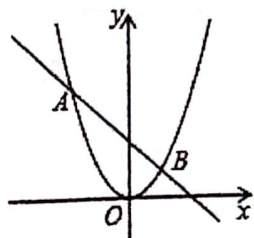


12. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的弦, 如果 $\angle ACD=36^\circ$, 那么 $\angle BAD=$ _____.



13. 已知抛物线 $y=x^2-mx$ 与 x 轴的一个交点的横坐标大于 1 且小于 2, 则 m 的取值范围是_____.

14. 如图, 抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=bx+c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2,4)$, $B(1,1)$, 则关于 x 的方程 $ax^2=bx+c$ 的解为_____.



15. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表:

x	...	-1	0	1	3	...
y	...	0	-1.5	-2	0	...

根据表格中的信息, 得到了如下的结论:

- ① 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可改写为 $y=a(x-1)^2-2$ 的形式;
- ② 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下;
- ③ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1.5$ 的两个根为 0 或 2;
- ④ 若 $y>0$, 则 $x>3$.

其中所有正确的结论为_____.

16. 某旅店的客房有两人间和三人间两种, 两人间每间 200 元, 三人间每间 250 元, 某学校 50 人的研学团到该旅店住宿, 租住了若干客房. 其中男生 27 人, 女生 23 人. 若要求男女不能混住, 且所有租住房间必须住满.

- (1) 要想使花费最少, 需要_____间两人间;
- (2) 现旅店对两人间打八折优惠, 且仅剩 15 间两人间, 此时要想花费最少, 需要_____间三人间.

三、解答题 (共 68 分, 第 17 题 8 分, 第 18-19 题每题 4 分, 第 20-22 题每题 5 分, 第 23-24 题每题 6 分, 第 25 题 5 分, 第 26 题 6 分, 第 27-28 题每题 7 分)

17. 解方程:

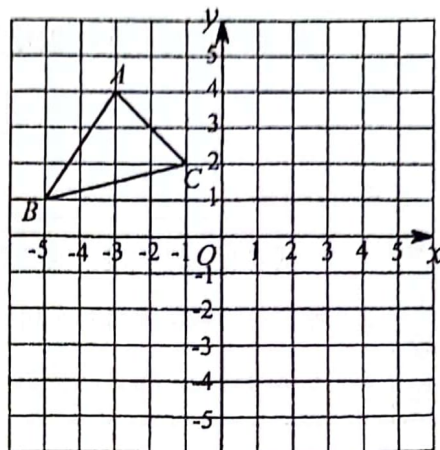
(1) $x(x+2)=0$;

(2) $x^2-2x-3=0$.



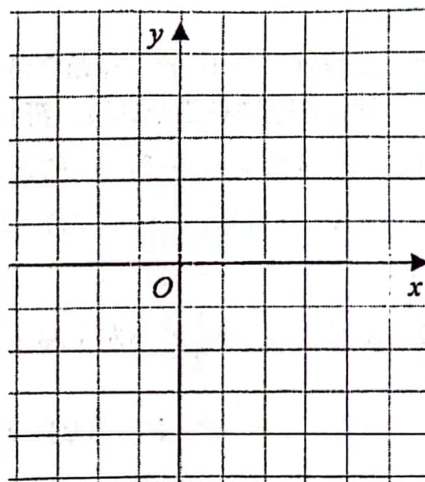
18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-3, 4)$ ， $B(-5, 1)$ ， $C(-1, 2)$ 。

- (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于原点对称的 $\triangle A_1B_1C_1$ ，并写出点 A_1 的坐标；
- (2) 画出 $\triangle ABC$ 绕原点逆时针旋转 90° 后的 $\triangle A_2B_2C_2$ ，并写出点 C_2 的坐标。



19. 已知二次函数 $C: y = x^2 - 4x + 3$ 。

- (1) 将 $y = x^2 - 4x + 3$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式；
- (2) 在右图中画出二次函数 C 的图象；
- (3) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时，利用图象直接写出 y 的取值范围；
- (4) 当 $y < 3$ 时，利用图象直接写出 x 的取值范围。

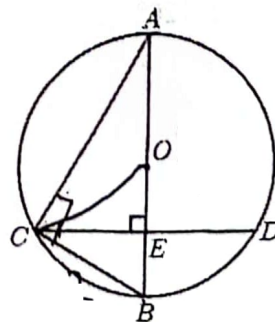


20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + (2m+1)x + m - 2 = 0$ 。

- (1) 求证：无论 m 取何值，此方程总有两个不相等的实数根；
- (2) 当该方程的判别式的值最小时，写出 m 的值，并求出此时方程的解。

21. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，连接 AC ， BC 。

- (1) 求证： $\angle CAB = \angle BCD$ ；
- (2) 若 $AB=4$ ， $BC=2$ ，求 CD 的长。

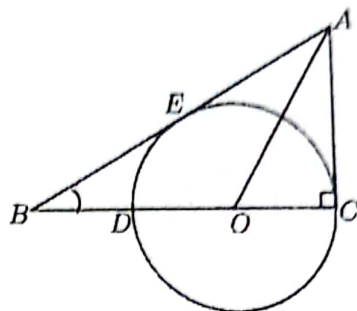




24. 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D 在 BC 边上, 以 CD 为直径的 $\odot O$ 与直线 AB 相切于点 E , 连接 OA , $OA=OB$.

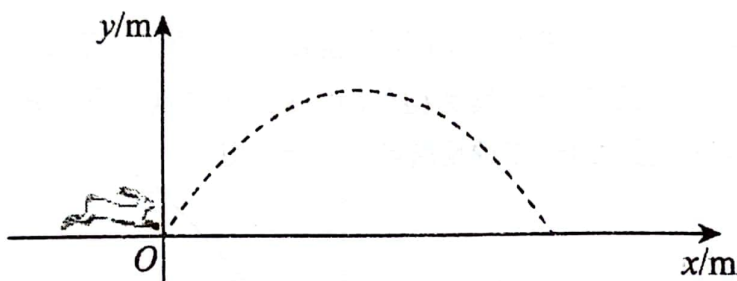
(1) 求证: $\angle ABC=30^\circ$;

(2) 连接 AD , 若 $AD=\sqrt{14}$, 求 $\odot O$ 的半径.



25. 野兔跳跃时的空中运动路线可以看作是抛物线的一部分.

(1) 建立如图所示的平面直角坐标系.



对某只野兔一次跳跃中水平距离 x (单位: m) 与竖直高度 y (单位: m) 进行测量, 得到以下数据:

水平距离 x	0	0.4	1	1.4	2	2.4
竖直高度 y	0	0.48	0.9	0.98	0.8	0.48

根据上述数据, 回答下列问题:

① 野兔本次跳跃的最大竖直高度为_____m;

② 求满足条件的抛物线的解析式.

(2) 在满足 (1) 的条件下, 在野兔起跳点前方 1.8m 处有宽为 0.8m 的小溪, 则野兔此次跳跃_____ (填“能”或“不能”) 跃过小溪.

26. 已知关于 x 的二次函数 $y=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$, 点 $M(-1,m)$, $N(5,n)$ 在二次函数图象上.

(1) ① 若 $m=n$, 求二次函数的对称轴;

② 若 $a<-4$, 比较 m, n 的大小, 并说明理由.

(2) 当 $a\leq x\leq a+1$ 时, 函数的最小值为 9, 求 a 的值.



27. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle B=\alpha$ ($0^\circ<\alpha<45^\circ$), P 是线段 BC 上的动点 (不与点 B, C 重合), 将线段 PC 绕点 P 顺时针旋转 2α 得到线段 PD .

(1) 如图 1, 当 $\alpha=30^\circ$, 且点 D 在线段 AB 上时, 求证 $PD=BP$;

(2) 如图 2, 点 D 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内部, 过点 D 作 AD 的垂线, 与直线 BC 交于点 Q .

① 请根据题意, 将图形补充完整;

② 判断 PQ 与 PB 的数量关系, 并证明.

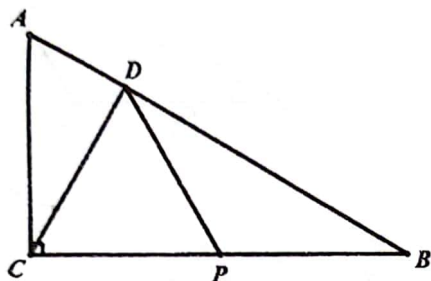


图 1

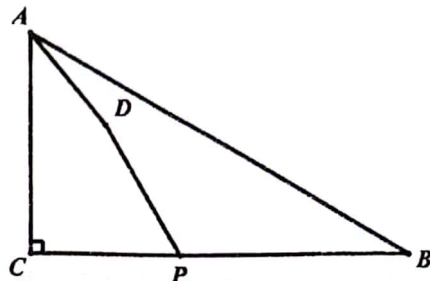


图 2

28. 已知 $\odot C$ 的半径为 r , 点 P 是与圆心 C 不重合的点, 点 P 关于 $\odot C$ 的反演点的定义如下: 若点 P' 在射线 CP 上, 满足 $CP' \cdot CP = r^2$, 则称点 P' 是点 P 关于 $\odot C$ 的反演点. 图 1 为点 P 及其关于 $\odot C$ 的反演点 P' 的示意图.

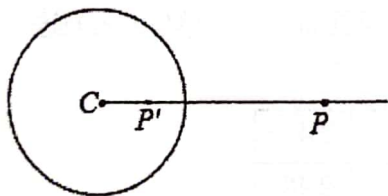


图 1

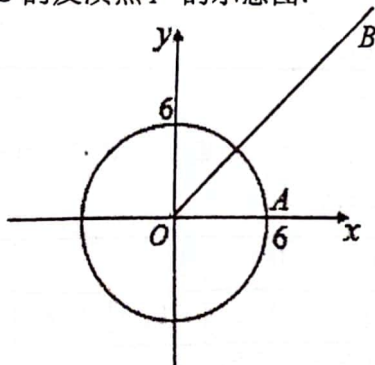


图 2

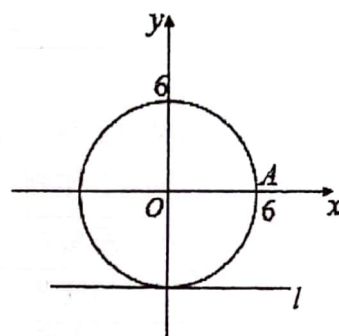


图 3

在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot O$ 的半径为 6, $\odot O$ 与 x 轴的正半轴交于点 A .

(1) 如图 2, $\angle AOB=45^\circ$, $OB=18$. 若点 A', B' 分别是点 A, B 关于 $\odot O$ 的反演点. 则点 A' 的坐标是 _____, 点 B' 的坐标是 _____;

(2) 已知点 Q 在 x 轴下方, 且 $2 \leq OQ \leq 9$, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + m$ 上存在点 Q 关于 $\odot O$ 的反演点 Q' , 求 m 的取值范围;

(3) 如图 3, 已知直线 $l: y = -6$, 点 K 是直线 l 上的动点, 点 K' 是点 K 关于 $\odot O$ 的反演点. 请直接写出线段 AK' 的长度 k 的取值范围.