



数 学 试 卷

2024. 1

本试卷共 6 页，三道大题，28 个小题，满分 100 分。考试时间 120 分钟。考生务必将答案填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请交回答题卡。

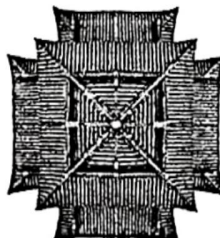
一、选择题（共 8 道小题，每小题 2 分，共 16 分）

第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个。

1. $\sqrt{9}$ 的值是

- (A) 3 (B) -3 (C) ± 3 (D) 81

2. 昌平，取“昌盛平安”之意，自西汉设县以来距今已有 2000 多年。期间辖区内修建了众多的古今建筑。下列是昌平区的四个建筑图片，其中既是轴对称图形，又是中心对称图形的是



- (A) 银山塔林 (B) 昌平大桥 (C) 昌平公园弘文阁 (D) 十三陵牌坊

3. 以下列长度的三条线段为边，能组成一个等腰三角形的是

- (A) 2, 4, 7 (B) 5, 6, 6 (C) 1, 1, 2 (D) 3, 4, 5

4. 下列事件中，属于随机事件的是

- (A) 李叔叔以家庭主申请人的身份申请北京市小客车指标，在提交申请后的第一次“摇号”就中签
(B) 直角三角形两锐角互余
(C) 第一小组的 10 名同学中，包含了 3 名女生，若从这组选出 4 名同学完成任务，则至少有 1 名男生
(D) 掷一枚标准的骰子，面朝上的点数等于 8

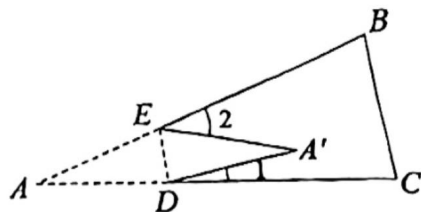
5. 下列选项中，最接近 $\sqrt{6}$ 的整数是

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

6. 甲做 360 个零件与乙做 480 个零件所用的时间相同，已知两人每天共做 140 个零件，若设甲每天做 x 个零件，则可列方程为

- (A) $\frac{360}{x} = \frac{480}{140-x}$ (B) $\frac{360}{140-x} = \frac{480}{x}$
(C) $\frac{360}{x} = 140 - \frac{480}{x}$ (D) $\frac{360}{x} = \frac{480}{140+x}$

7. 如图, 把 $\triangle ABC$ 沿 DE 折叠后, 点 A 的对应点为 A' , 且点 A' 落在四边形 $BCDE$ 内部, 则 $\angle A'$, $\angle 1$, $\angle 2$ 之间满足的数量关系是

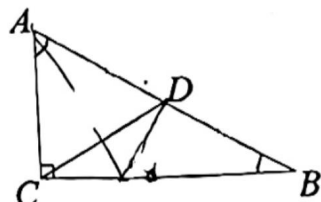


- (A) $\angle A' = \angle 1 + \angle 2$
 (B) $2\angle A' = \angle 1 + \angle 2$
 (C) $3\angle A' = 2\angle 1 + \angle 2$
 (D) $3\angle A' = 2(\angle 1 + \angle 2)$

8. 阅读下面材料:

已知: $\text{Rt}\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, 点 D 是 AB 中点, 给出下面四个结论:

- ① $\angle ACD = \angle BCD$;
 ② $\angle ADC = 60^\circ$;
 ③ $AC + BC > 2CD$;
 ④ 点 P 是 BC 上的一个动点, 当 $PD + PA$ 取最小值时, $PD + PA = BC$.



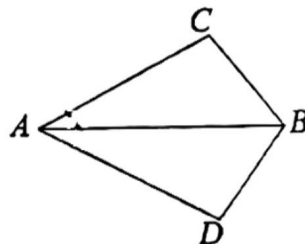
上述结论中, 所有正确结论的序号是

- (A) ①②④ (B) ②③ (C) ③④ (D) ②③④

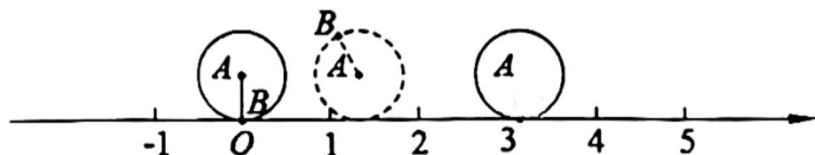
二、填空题 (共 8 道小题, 每小题 2 分, 共 16 分)

9. 若分式 $\frac{2x}{1-x}$ 的值为 0, 则 x 的值为_____.

10. 如图, $\angle CAB = \angle DAB$. 请你添加一个条件, 使 $\triangle ABC \cong \triangle ABD$. 你添加的条件是_____ (要求: 不再添加辅助线, 只需填一个答案即可)



11. 如图所示, 为了在数轴上找到表示无理数 π 的点, 小王同学制作了一个以 A 为圆心, m 为半径的圆, 并在此圆上标记一个点 B , 将点 B 与原点重合. 若让此圆在数轴上向右滚动一周后, 点 B 就是数轴上表示无理数 π 的点, 则 $m =$ _____.

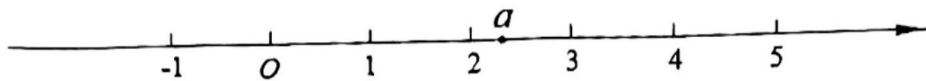


12. 已知命题“两个三角形全等, 则它们的面积相等”为真命题, 则这个命题的逆命题为_____命题. (用“真”, “假”填空)

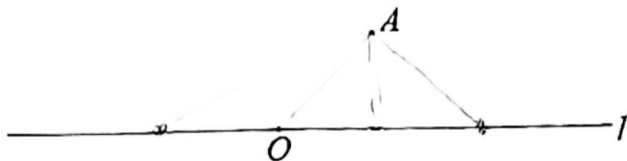
13. 如图, 货架上水平摆放着九个外包装完全一样的盲盒, 每个盲盒内装有一件商品, 装甲商品的盲盒有 5 个, 装乙商品的盲盒有 4 个, 随机抽取一个盲盒, 则抽到_____种商品的可能性大. (用“甲”, “乙”填空)



14. 若实数 a 在数轴上的对应点的位置如图所示, 则 $\sqrt{(2-a)^2} =$ _____.



15. 如图, 点 O 在直线 l 上, 点 A 在直线 l 外. 若直线 l 上有一点 P 使得 $\triangle APO$ 为等腰三角形, 则满足条件的点 P 位置有 _____ 个.



16. 某学校计划租用客车接送 251 名学生和 5 名教师去博物馆, 每辆车至少有 1 名教师, 现有甲、乙、丙三种客车, 它们的载客量和租金如下表所示:

	甲客车	乙客车	丙客车
载客量 (单位: 人/辆)	43	49	55
租金 (单位: 元/辆)	1350	1500	1600

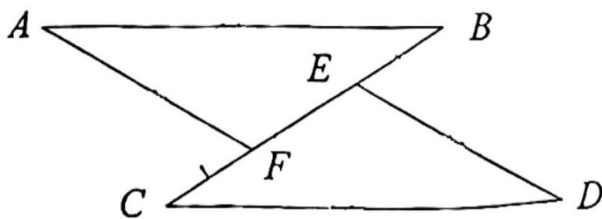
请写出一个满足乘坐需求的租车方案 _____, 若需要租车总费用最少, 则租车方案为 _____.

三、解答题 (本题共 12 道小题, 第 17 ~ 22 题, 每小题 5 分, 第 23 ~ 26 题, 每小题 6 分, 第 27 ~ 28 题, 每小题 7 分, 共 68 分)

17. 计算: $(\sqrt{8} - \frac{1}{\sqrt{2}}) \times \sqrt{2}$.

18. 计算: $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$.

19. 已知: 如图, E, F 是线段 BC 上两点, $AB = DC$, $AF = DE$, $BE = CF$.
求证: $\triangle ABF \cong \triangle DCE$.



20. 计算: $(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2) + (\sqrt{3}-1)^2$.

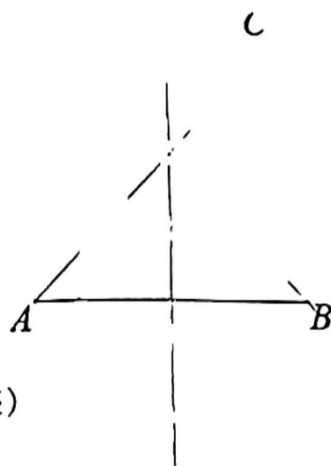


21. 解方程: $\frac{2}{x} + \frac{x}{x-3} = 1$.

22. 先化简 $\left(\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) \div \frac{1}{a^2-1}$, 再从 0, 1, 2 三个数中, 选择一个合适的数作为 a 的值代入求值.

23. 已知: 如图, $\angle BAC = 45^\circ$.
求作: 线段 BD , 使得 $BD \perp AC$.

作法: ①分别以点 A 和点 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径作弧, 两弧分别交于点 M 和点 N ;
②作直线 MN , 交 AC 于点 D ;
③连接 BD .



所以线段 BD 即为所求作的线段.

(1) 使用直尺和圆规, 依作法补全图形. (保留作图痕迹)

(2) 完成下列证明:

证明: $\because MN$ 是线段 AB 的垂直平分线,

$\therefore AD = BD$ (_____). (填写推理依据)

$\therefore \angle DAB = \angle DBA =$ _____ $^\circ$.

$\because \angle DAB + \angle DBA + \angle ADB = 180^\circ$,

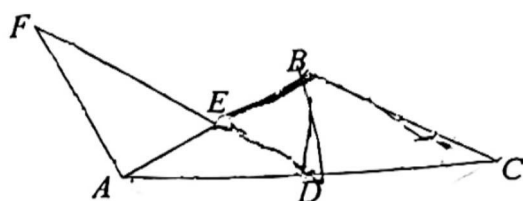
$\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle DAB - \angle DBA = 90^\circ$.

$\therefore BD \perp AC$.



24. 第31届世界大学生夏季运动会，于2023年7月28日至8月8日在成都举办。上海的学生小李一家想在此次运动会期间前往成都观赛，可供选择的交通工具具有我国自主知识产权的高铁和C919大型民航客机。已知民航客机的平均速度是高铁的3倍，当路程均为1620千米时，搭乘民航客机会比高铁节省4小时，求民航客机和高铁的平均速度。

25. 已知： $\triangle ABC$ 中， $AB = BC = 6$ ， D 为 AC 中点，过点 D 作 $DE \parallel BC$ ，交 AB 于点 E ，在 DE 的延长线上有一点 F ，连接 AF ，满足 $AF = AD$ 。



- (1) 求证： $BE = DE$ 。
 (2) 若 $AC = 6\sqrt{3}$ ，试判断 $\triangle AEF$ 的形状，并证明。

26. 阅读材料：

$\sqrt{1}$ 和 $\sqrt{4}$ 为整数， $4 - 1 = 3 = 2 \times 1 + 1$ ；
 $\sqrt{4}$ 和 $\sqrt{9}$ 为整数， $9 - 4 = 5 = 2 \times 2 + 1$ ；
 $\sqrt{9}$ 和 $\sqrt{16}$ 为整数， $16 - 9 = 7 = 2 \times 3 + 1$ ；
 ……

小明发现结论：若 \sqrt{a} 和 \sqrt{b} 为相邻的两个整数，其中 $a < b$ ，则有 $b - a = 2\sqrt{a} + 1$ 。
 并给出了证明：根据题意，得

$$\sqrt{a} + 1 = \sqrt{b}.$$

等式两边同时_____，得

$$\underline{\hspace{2cm}} = b.$$

整理得

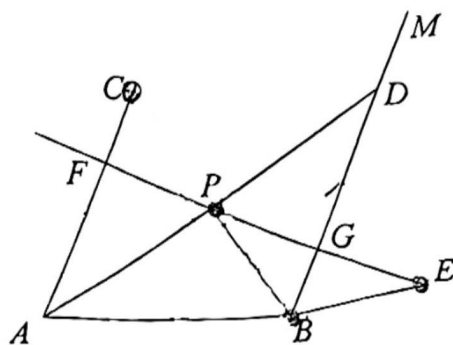
$$b - a = 2\sqrt{a} + 1.$$

请根据以上材料，解决以下问题：

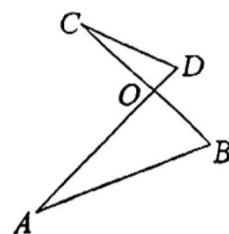
- (1) 请补全小明的证明过程。
 (2) 若 \sqrt{a} 和 $\sqrt{a+11}$ 为两个相邻整数，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。
 (3) 若 \sqrt{a} 和 $\sqrt{a+216}$ 为相差4的两个整数，求 a 的值。



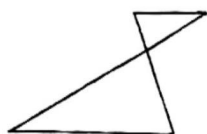
27. 已知：如图，线段 AB ，点 P 是线段 AB 上方一动点，且 $PA \perp PB$ ，线段 AB 和线段 AC 关于直线 AP 对称，过点 B 作 $BM \parallel AC$ ，与线段 AP 的延长线交于点 D ，点 P 和点 E 关于直线 BD 对称，作射线 EP 交 AC 于点 F ，交 BD 于点 G 。
- 当 $PB=3$ ， $AB=5$ 时，求 PD 的长。
 - 请用等式表示线段 EF 与 PF 之间的数量关系，并证明。
 - 当线段 EF 的长取最大值时， $\frac{AB}{EF}$ 的值为_____。



28. 给出如下定义：两条线段相交于一点（交点不与端点重合），连接不同线段的两个端点，再连接另两个端点所得图形称为“8字形”。如图，线段 AD 与 BC 交于点 O ，连接 AB 和 CD ，所得图即为“8字形”。



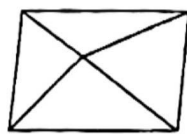
- (1) 下列四个图形中，含有“8字形”的有：_____。



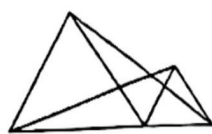
①



②



③



④

- (2) 如图 1， AD 与 BC 交于点 E ，连接 AB 和 CD ， AB 和 CD 的延长线交于点 F ，满足 $\angle ABC = \angle ADC = \alpha$ ， $AE = CF$ 。

①当 $\alpha = 90^\circ$ 时，判断 BE 与 BF 的数量关系，并证明；

②如图 2，当 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时，求证： $BE = BF$ 。

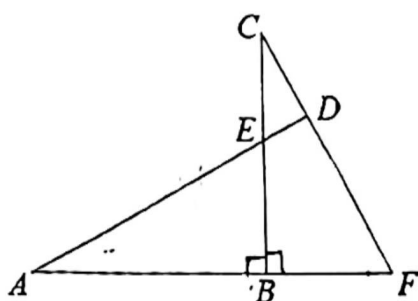


图 1

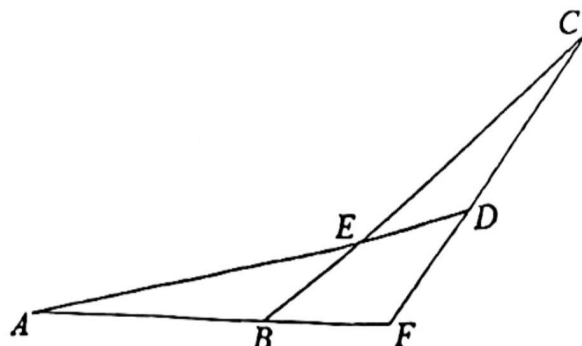


图 2