

2023 北京五十五中高一（上）期中

数 学



一、选择题 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

1. 设非空集合 P, Q 满足 $P \subseteq Q$ ，则表述正确的是 ()

| | |
|--|--|
| A. $\forall x \in Q$, 有 $x \in P$ | B. $\forall x \in P$, 有 $x \in Q$ |
| C. $\exists x \notin Q$, 使得 $x \in P$ | D. $\exists x \in P$, 使得 $x \notin Q$ |
2. 不等式 $(x+1)(x+3) < 0$ 的解集是 ()

| | | | |
|-----------------|----------------|--------------------------|--|
| A. \mathbb{R} | B. \emptyset | C. $\{x -3 < x < -1\}$ | D. $\{x x < -3, \text{ 或 } x > -1\}$ |
|-----------------|----------------|--------------------------|--|
3. 已知 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，且 $a > b, c > d$ ，则下列结论中正确的是 ()

| | |
|--------------------|--------------------------------|
| A. $a + c > b + d$ | B. $a - c > b - d$ |
| C. $ac > bd$ | D. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ |
4. 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的奇函数，当 $x > 0$ 时， $f(x) = -x + 1$ ，则当 $x < 0$ 时， $f(x)$ 的解析式为 ()

| | |
|--------------------|--------------------|
| A. $f(x) = -x + 1$ | B. $f(x) = -x - 1$ |
| C. $f(x) = x + 1$ | D. $f(x) = x - 1$ |
5. 下列各组函数中，表示同一个函数的是 ()

| | |
|---|--|
| A. $f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2$ | B. $f(t) = t , g(x) = \sqrt{x^2}$ |
| C. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, g(x) = x + 1$ | D. $f(x) = \frac{ x }{x}, g(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$ |
6. 若幂函数 $f(x) = (m^2 - m - 5)x^m$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减，则 $m =$ ()

| | | | |
|------|----------|----------|-------|
| A. 3 | B. 3, -2 | C. -3, 2 | D. -2 |
|------|----------|----------|-------|
7. “关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有实数根”是“ $ac < 0$ ”的 ()

| | | | |
|------------|------------|---------|-------------|
| A. 充分非必要条件 | B. 必要非充分条件 | C. 充要条件 | D. 非充分非必要条件 |
|------------|------------|---------|-------------|
8. 已知函数 $y = f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数，且 $f(2a - 1) < f(1 - a)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

| | | | |
|--|----------------------------------|-------------|-------------------|
| A. $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ | B. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ | C. $(0, 2)$ | D. $(0, +\infty)$ |
|--|----------------------------------|-------------|-------------------|

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 0\}$ ， $B = \{x | 0 < x \leq 3\}$ ，则 $A \cup B =$ _____.

10. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + (x+1)^0$ 定义域为_____.

11. 函数 $y = x(5-2x) (0 < x < 2)$ 的最大值是_____.

12. 不等式 $\frac{x+2}{2x-1} < 0$ 的解集为_____.

13. 化简: $(a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}) \div (\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^9}) =$ _____. (用分数指数幂表示).

14. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[2b, 1-b]$ 上的偶函数, 且在 $[2b, 0]$ 上为增函数, 则 $f(x-1) \leq f(2x)$ 的解集为_____.

三、解答题 6 小题, 共 80 分

15. 已知 $A = \{x | x^2 - x - 6 < 0\}$, $B = \{x | -3 < x \leq 3\}$.

(1) 求集合 A ;

(2) 求 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$, $(\complement_{\mathbb{R}}A) \cap B$.

16. 已知函数 $f(x) = x^2 + ax - 3$.

(1) 当 $a = 2, x \in [-2, 3]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值和最小值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[1, 3]$ 上的最小值为 1, 求实数 a 的值.

17. 某工厂要建造一个长方体形无盖贮水池, 其容积为 4800m^3 , 深为 3m . 如果池底每平方米的造价为 150 元, 池壁每平方米造价为 120 元, 怎样设计水池能使总造价最低? 最低总造价是多少?

18. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

(1) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并证明结论;

(2) 证明函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数;

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上的最值.

19. 已知二次函数 $f(x) = x^2 + 2ax + 2$.

(1) 若 $1 \leq x \leq 5$ 时, 不等式 $f(x) > 3ax$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

(2) 解关于 x 的不等式 $(a+1)x^2 + x > f(x)$ (其中 $a \in \mathbb{R}$).

20. 记 $\sum_{t=1}^k a_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $\prod_{t=1}^k a_t = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_k$, 存在正整数 n , 且 $n \geq 2$. 若集合

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 满足 $\sum_{t=1}^n a_t = \prod_{t=1}^n a_t$, 则称集合 A 为“谐调集”.

(1) 分别判断集合 $E = \{1, 2\}$ 、集合 $F = \{-1, 0, 1\}$ 是否为“谐调集”;

(2) 已知实数 x, y , 若集合 $\{x, y\}$ 为“谐调集”, 是否存在实数 z 满足 $z^2 = xy$, 并且使得 $\{x, y, z\}$ 为“谐调集”? 若存在, 求出所有满足条件的实数 z , 若不存在, 请说明理由;



(3) 若有限集 M 为“谐调集”，且集合 M 中的所有元素均为正整数，试求出所有的集合 M .



参考答案



一、选择题 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

1. 【答案】B

【分析】根据子集的定义即可求解.

【详解】因为 $P \subseteq Q$ ，则由子集的定义知集合 P 中的任何一个元素都在 Q 中，而 Q 中元素不一定在 P 中(集合相等或不相等两种情况)，故 B 正确，ACD 错误.

故选：B

2. 【答案】C

【分析】根据一元二次不等式的解法计算可得；

【详解】解：由 $(x+1)(x+3) < 0$ ，解得 $-3 < x < -1$ ，即不等式的解集为 $\{x | -3 < x < -1\}$ ；

故选：C

3. 【答案】A

【分析】根据不等式的性质判断 A；举反例即可判断 B，C，D.

【详解】由 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ ，且 $a > b, c > d$ ，可得 $a + c > b + d$ ，A 正确；

取 $a = 3, b = 2, c = 1, d = 0$ ，满足条件，但 $a - c = b - d$ ，B 错误；

取 $a = 3, b = 2, c = -2, d = -3$ ，满足条件，但 $ac = bd$ ， $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ ，C，D 错误；

故选：A

4. 【答案】B

【分析】

当 $x < 0$ 时 $-x > 0$ 可将其代入 $x > 0$ 时的解析式求出 $f(-x)$ ，再通过奇偶性将其转化为 $f(x)$ 即可.

【详解】设 $x < 0$ ，则 $-x > 0$.

可得 $f(-x) = x + 1$ ，又函数 $f(x)$ 是奇函数.

$$\therefore f(-x) = -f(x) = x + 1,$$

$$\therefore f(x) = -x - 1 (x < 0).$$

故选：B.

5. 【答案】B

【分析】求出两个函数定义域以及化简对应关系. 若两个函数定义域相同且对应关系相同，则这两个函数相同，进而判断答案.

【详解】对 A， $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $g(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$ ，则 A 错误；

对 B， $f(t)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} ，且 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ，则 B 正确；

对 C， $f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$ ， $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，则 C 错误；

对 D, 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 的定义域为 \mathbf{R} , 则 D 错误.

故选: B.

6. 【答案】D

【分析】由幂函数的区间单调性有 $\begin{cases} m^2 - m - 5 = 1 \\ m < 0 \end{cases}$, 求参数值即可.

【详解】由题设 $\begin{cases} m^2 - m - 5 = 1 \\ m < 0 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} (m-3)(m+2) = 0 \\ m < 0 \end{cases}$, 可得 $m = -2$.

故选: D

7. 【答案】B

【分析】根据充分、必要性定义, 结合根与系数关系判断条件间的关系即可.

【详解】若方程 有实数根, 则 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, 即 $b^2 \geq 4ac$, 但不一定有

, 充分性不成立;

若 , 则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 即方程 有实数根, 必要性成立;

所以“关于 x 的方程 有实数根”是“ ”的必要非充分条件.

故选: B

8. 【答案】B

【分析】

由函数的单调性及定义域可得不等式, 即可得解.

【详解】因为函数 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数, 且 ,

$$\text{所以 } \begin{cases} 2a-1 > 1-a \\ -1 < 2a-1 < 1 \\ -1 < 1-a < 1 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{2}{3} < a < 1,$$

所以实数 a 的取值范围是 $-\quad$.

故选: B.

【点睛】本题考查了利用函数单调性解不等式, 考查了运算求解能力, 属于基础题.

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分

9. 【答案】 $\{x|-2 \leq x \leq 3\}$

【分析】根据并集的概念运算即得.

【详解】因为集合 , ,

所以 $A \cup B = \{x|-2 \leq x \leq 3\}$.

故答案为: $\{x|-2 \leq x \leq 3\}$.

10. 【答案】 $\{x|x > -2 \text{ 且 } x \neq -1\}$

【分析】根据题意得到 $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$, 再解不等式组即可.

【详解】由题知: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $x > -2$ 且 $x \neq -1$.

故答案为: $\{x|x > -2 \text{ 且 } x \neq -1\}$.

11. 【答案】 $\frac{25}{8}$ ## 3.125

【分析】方法一: 将函数变形为 $y = x(5-2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (5-2x)$, 然后利用基本不等式可求出其最大值,

方法二: 将函数变形为 $y = 2x\left(\frac{5}{2} - x\right)$, 然后利用基本不等式可求出其最大值.

【详解】方法一: $y = x(5-2x) = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot (5-2x)$,

$\because 0 < x < 2, \therefore 0 < 2x < 4, 1 < 5-2x < 5,$

$\therefore y \leq \frac{1}{2} \times \left[\frac{2x+(5-2x)}{2} \right]^2 = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4} = \frac{25}{8}$, 当且仅当 $2x = 5-2x$, 即 $x = \frac{5}{4}$ 时取等号.

故当 $x = \frac{5}{4}$ 时, $y_{\max} = \frac{25}{8}$.

方法二: 由 $0 < x < 2$ 知 $\frac{5}{2} - x > 0, \therefore y = 2x\left(\frac{5}{2} - x\right) \leq 2 \left[\frac{x + \left(\frac{5}{2} - x\right)}{2} \right]^2 = \frac{25}{8}$,

当且仅当 $x = \frac{5}{2} - x$, 即 $x = \frac{5}{4}$ 时取等号.

故当 $x = \frac{5}{4}$ 时, $y_{\max} = \frac{25}{8}$.

故答案为: $\frac{25}{8}$

12. 【答案】 $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

【分析】由分式不等式可得 $(x+2)(2x-1) < 0$, 解一元二次不等式求解集.

【详解】由题设 $(x+2)(2x-1) < 0 \Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$,

所以不等式解集为 $(-2, \frac{1}{2})$.

故答案为： $(-2, \frac{1}{2})$

13. 【答案】 $a^{\frac{6}{5}}$

【分析】先把根式转化成指数幂的形式，再利用分数指数幂的运算法则，即可求出结果.

【详解】因为

$$(a^2 \cdot \sqrt[5]{a^3}) \div (\sqrt{a} \cdot \sqrt[10]{a^9}) = (a^2 \cdot a^{\frac{3}{5}}) \div (a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{9}{10}}) = a^{\frac{13}{5}} \div a^{\frac{7}{5}} = a^{\frac{13-7}{5}} = a^{\frac{6}{5}}.$$

故答案为： $a^{\frac{6}{5}}$.

14. 【答案】 $\{x | -1 \leq x \leq \frac{1}{3}\}$

【分析】

由偶函数定义域的对称性可求 $b = -1$ ，从而可得 $f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上为增函数，在 $[0, 2]$ 上为减函数，距离对称轴越远，函数值越小，由此可解不等式.

【详解】解： $\because f(x)$ 是定义在 $[-2, 2]$ 上的偶函数，

$$\therefore 2b + 1 - b = 0,$$

$$\therefore b = -1,$$

$\because f(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上为增函数，

$\therefore f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上为减函数，距离对称轴越远，函数值越小，

由 $f(x) \leq f(2)$ 可得 $|x - 1| \geq |2x|$ ，且 $-2 \leq x - 1 \leq 2$ ， $-2 \leq 2x \leq 2$ ，

解得 $-1 \leq x \leq \frac{1}{3}$ ，

故不等式的解集为 $\{x | -1 \leq x \leq \frac{1}{3}\}$.

故答案为： $\{x | -1 \leq x \leq \frac{1}{3}\}$.

三、解答题 6 小题，共 80 分

15. 【答案】 (1) $A = \{x | -2 < x < 3\}$

$$(2) \complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}, (\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } x = 3\}$$

【分析】(1) 解出一元二次不等式得到集合 A 即可；

(2) 由集合的交集与补集的运算求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $x^2 - x - 6 < 0$ ，所以解不等式 $x^2 - x - 6 < 0$ 可得：

$-2 < x < 3$, 故集合 $A = \{x | -2 < x < 3\}$

【小问 2 详解】

由 (1) 可知: $A = \{x | -2 < x < 3\}$, 又

所以 $A \cap B = \{x | -2 < x < 3\}$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B) = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$.

$\complement_{\mathbb{R}}A = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$, $(\complement_{\mathbb{R}}A) \cap B = \{x | -3 < x \leq -2 \text{ 或 } x = 3\}$.

16. 【答案】(1) 最大值为 12, 最小值为 -4

(2) $a = 3$

【分析】(1) 配方后利用二次函数的性质求解即可.

(2) 根据对称轴的位置, 分类讨论, 求其最小值并为 1, 得到 的值.

【小问 1 详解】

当 $a = 2$ 时, $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$,

又 $x \in [-2, 3]$, 所以 $f(x)_{\min} = f(-1) = -4$, $f(x)_{\max} = f(3) = 12$,

所以函数 的最大值为 12, 最小值为 -4.

【小问 2 详解】

的对称轴为 $x = -\frac{a}{2}$, 开口向上,

① 当 $-\frac{a}{2} \leq 1$, 即 $a \geq -2$ 时,

$f(x)_{\min} = f(1) = a - 2 = 1$, 即 $a = 3$, 符合题意;

② 当 $-\frac{a}{2} \geq 3$, 即 $a \leq -6$ 时,

$f(x)_{\min} = f(3) = 3a + 6 = 1$, 即 $a = -\frac{5}{3}$, 不符合题意;

③ 当 $1 < -\frac{a}{2} < 3$, 即 $-6 < a < -2$ 时,

$f(x)_{\min} = f\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} - 3 = 1$, 无解, 不符合题意;

综上, 可得 $a = 3$.

17. 【答案】将水池的地面设计成边长为 40m 的正方形时总造价最低, 最低总造价是 297600 元.

【分析】设底面长为 xm , 宽为 ym , 由容积为 , 可得 $y = \frac{1600}{x}$, 列出水池的总造价关于 的函

数关系可得 $f(x) = \left(x + \frac{1600}{x}\right) \times 720 + 1600 \times 150$, 借助均值不等式即得解

【详解】设底面长为 xm , 宽为 ym

则 $3xy = 4800 \therefore y = \frac{1600}{x}$

水池的总造价:

$$f(x) = xy \times 150 + 2(3x + 3y) \times 120 = (x + \frac{1600}{x}) \times 720 + 1600 \times 150$$

$$\geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1600}{x}} \times 720 + 240000 = 57600 + 240000 = 297600 \text{ (元)}$$

当且仅当 $x = y = 40$ 时, 等号成立.

所以, 将水池的地面设计成边长为 $40m$ 的正方形时总造价最低, 最低总造价是 297600 元.

18. 【答案】(1) 奇函数, 证明见解析;

(2) 证明见解析; (3) 无最大值, 最小值为 $-\frac{1}{2}$.

【分析】(1) 应用奇偶性定义证 的奇偶性;

(2) 应用单调性定义证 的单调性;

(3) 根据 (1) (2) 的结论确定区间最值即可.

【小问 1 详解】

函数 为奇函数, 证明如下:

由 —— 知: 函数定义域为 \mathbb{R} ,

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x),$$

所以 为奇函数, 得证.

【小问 2 详解】

$$\text{令 } x_1 > x_2 \geq 1, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1 x_2^2 + x_1 - x_2 x_1^2 - x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)},$$

$$\text{所以 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{(x_1 x_2 - 1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)},$$

而 $x_1 x_2 > 1, x_2 - x_1 < 0, (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) > 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,

所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 故函数 在 上是减函数, 得证.

【小问 3 详解】

由 (1) (2) 知: 在 上是减函数,

且 $f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}$, 易知 趋向 $-\infty$ 时函数值趋向于 0 ,

所以 $f(x)_{\min} = f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$, 无最大值.

19. 【答案】(1) $a < 2\sqrt{2}$;

(2) 答案见解析.

【分析】(1) 当 $x \in [1, 5]$ 时将原不等式变形为 $a < x + \frac{2}{x}$, 根据基本不等式计算即可;

(2) 不等式化为 $(x-2)(ax+1) > 0$, 讨论 a 的取值, 从而求出对应不等式的解集.

【小问 1 详解】

不等式 $x^2 + 2ax + 2 > 3ax$, 即为: $x^2 + 2ax + 2 > 3ax$,

当 $x \in [1, 5]$ 时, 不等式可变形为: $a < \frac{x^2 + 2}{x} = x + \frac{2}{x}$,

因为 $x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$,

当且仅当 $x = \sqrt{2}$ 时取等号, 所以 $\left(x + \frac{2}{x}\right)_{\min} = 2\sqrt{2}$,

所以实数 a 的取值范围是 $a < 2\sqrt{2}$.

【小问 2 详解】

不等式 $(a+1)x^2 + x > x^2 + 2ax + 2$,

等价于 $ax^2 + (1-2a)x - 2 > 0$, 即 $(x-2)(ax+1) > 0$,

① 当 $a = 0$ 时, 不等式整理为 $x - 2 > 0$, 解得 $x > 2$;

当 $a \neq 0$ 时, 方程 $(x-2)(ax+1) = 0$ 的两根为 $x_1 = -\frac{1}{a}$, $x_2 = 2$,

② 当 $a > 0$ 时, 可得 $-\frac{1}{a} < 0 < 2$, 解不等式 $(x-2)(ax+1) > 0$ 得 $x < -\frac{1}{a}$ 或 $x > 2$;

③ 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 因为 $-\frac{1}{a} > 2$, 解不等式 $(x-2)(ax+1) > 0$ 得 $2 < x < -\frac{1}{a}$;

④ 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 因为 $-\frac{1}{a} = 2$, 不等式 $(x-2)(ax+1) > 0$ 的解集为 \emptyset ;

⑤ 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 因为 $-\frac{1}{a} < 2$, 解不等式 $(x-2)(ax+1) > 0$ 得 $-\frac{1}{a} < x < 2$;

综上所述, 不等式的解集为:

① 当 $a = 0$ 时, 不等式解集为 $(2, +\infty)$;

② 当 $a > 0$ 时, 不等式解集为 $(-\infty, -\frac{1}{a}) \cup (2, +\infty)$;

③ 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 不等式解集为 $(2, -\frac{1}{a})$;

④当 $a = -\frac{1}{2}$ 时，不等式解集为 ；

⑤当 $a < -\frac{1}{2}$ 时，不等式解集为 $\left(-\frac{1}{a}, 2\right)$.

20. 【答案】(1) E 不是, F 是

(2) 不存在, 理由见解析

(3) $\{1, 2, 3\}$

【分析】(1) 根据新定义计算即可判断;

(2) 若存在符合题意的实数 z , 根据题意可得
$$\begin{cases} z^2 = xy \\ x + y = xy \\ x + y + z = xyz \end{cases}$$
, 求解 z 后, 检验 x, y , 进而可判断;

(3) 不妨设 A 中所有元素满足 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, 从而可得 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 进而可得 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} < n$, 再分 $n = 2$ 、 $n = 3$ 、 $n \geq 4$ 三种情况求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $1 \times 2 \neq 1 + 2$, 所以 E 不是“谐调集”,

因为 $(-1) \times 0 \times 1 = (-1) + 0 + 1$, 所以 F 是“谐调集”;

【小问 2 详解】

若存在符合题意的实数 z , 则
$$\begin{cases} z^2 = xy \\ x + y = xy \\ x + y + z = xyz \end{cases}$$
,

所以 $z^2 + z = z^3$, 即 $z(z^2 - z - 1) = 0$, 解得 $z = 0$ 或 $z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 或 $z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

当 $z = 0$ 时, 则 $x = 0$, $y = 0$, 不符合题意;

当 $z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ 时, $x + y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, $xy = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$,

由此, x, y 是方程 $t^2 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}t + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0$ 的实数解.

但 $\Delta = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\sqrt{5} - 5}{2} < 0$, 方程无实数解, 所以不符合题意;

当 $z = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 时, 同理 $z = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, 可得不符合题意,

综上, 不存在符合题意的实数 z ;

【小问 3 详解】

不妨设 A 中所有元素满足 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$,

则 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,

于是, $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} = \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$,

即 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} < n$,

当 $n=2$ 时, 则 $a_1 < 2$, $\therefore a_1 = 1$, 但 $1 \cdot a_2 = 1 + a_2$ 无解, 所以不存在符合题意的“和谐集”,

当 $n=3$ 时, 则 $a_1 a_2 < 3$, $\therefore a_1 = 1, a_2 = 2, 1 \times 2 \times a_3 = 1 + 2 + a_3, \therefore a_3 = 3$,

当 $n \geq 4$ 时, $\because a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为正整数, $\therefore a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \cdots, a_n \geq n$.

$\therefore a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} \geq 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \geq (n-2)(n-1)$,

又 $n > a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1}, \therefore n > (n-2)(n-1)$, 即 $n^2 - 4n + 2 < 0$,

但当 $n \geq 4$ 时, $n^2 - 4n + 2 = n(n-4) + 2 > 0$, 矛盾.

所以不存在符合题意的“和谐集”

综上, 符合题意的“和谐集”为 $\{1, 2, 3\}$.

【点睛】 关键点睛:

本题第三问关键是能够由 $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 结合正整数的特点得到

$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n-1} = \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1 < 1 + 1 + \cdots + 1 = n$, 再分 $n=2$ 、 $n=3$ 、 $n \geq 4$ 三种情况求解.