2023北京北大附中元培学院高一（上）期末

数　学

考生须知：

1.本试卷共5页，分为两部分：第一部分为选择题，共40分；第二部分为非选择题，共110分.

2.试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效.第一部分必须用2B铅笔作答，第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答.

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合$A=\{x|\ x>0\},B=\{x|-1<x<2\}$，若$A\cap B=$（　）

A. $\{x|\ x<2\}$　　B. $\{x|0<x<2\}$

C. $\{x|1<x<2\}$　　D. $\{x|-1<x<2\}$

2. 下列函数中，是奇函数且在区间$\left(0,+\infty\right)$上单调递增的是（　）

A. $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}}$　　B. $f\left(x\right)=x^2$

C. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$　　D. $f\left(x\right)=x^3$

3. “$\sin\theta=1$”是“$\theta=\dfrac{\pi}{2}$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 下列结论正确的是（　）

A. 若$a>b,c<0$，则$a+c<b+c$

B. 若$\sqrt{a}<\sqrt{b}$，则$a<b$

C. 若$a>b$，则$ac^2>bc^2$

D. 若$a^2>b^2$，则$a>b$

5. 已知$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=$（　）

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$或2

6. 已知$a=4^{0.1},b=2^{0.6},c=\log_4 0.6$，则$a,b,c$的大小关系为（　）

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$

C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

7. 已知平面向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是非零向量，$|\vec{a}|=2$，$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$，则向量 $\vec{b}$ 在向量 $\vec{a}$ 方向上的投影为（　）

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

8. 已知 $f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{4}}x$，则不等式 $f\left(x\right)\geq-\frac{4}{3}\left(x-1\right)$ 的解集为（　）

A. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$

B. $\left(-\infty,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

D. $\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$

9. 函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[1,2\right]$ 上的图像是连续不断的，则“$f\left(1\right)f\left(2\right)\geq0$”是“函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $(1,2)$ 上没有零点”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

10. 已知 $f\left(x\right)=x^2-2x$.若对于 $\forall x_1,x_2\in\left[m,m+1\right]$，均有 $f\left(x_1+1\right)\geq f\left(x_2\right)$ 成立，则实数 m 的取值范围是（　）

A. $\left(-\infty,0\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　C. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　D. $\left[1,+\infty\right)$

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在题中横线上.

11. 函数 $f(x)=\ln\left(1-x\right)$ 的定义域是_____.

12. $3^0+8^{\frac{2}{3}}=$__________，$\lg6-\lg\left(\frac{3}{5}\right)+\ln e^2=$__________.

13. 已知 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2-mx+m^2-6=0$ 的两个实根，且 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$，则 $m=$__________.

14. 已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-1,x<0\\x^2-ax,x\geq0\end{cases}$，当 $a=2$ 时，$f\left(x\right)$ 的单调减区间为__________；若 $f\left(x\right)$ 存在最小值，则实数 a 的取值范围是__________.

15. 请阅读以下材料，并回答后面的问题：

材料 1：人体成分主要由骨骼、肌肉、脂肪等组织及内脏组成，肌肉是最大的组织，且肌肉的密度相比脂肪而言要大很多.肌肉和脂肪在体重中占比个体差异较大，脂肪占体重的百分比（称为体脂率，记为 F%）经常作为反映肥胖程度的一个重要指标，但是不易于测量.

材料 2：体重指数 BMI（BodyMassIndex 的缩写）计算公式为：体重指数 $\mathrm{BMI}=\frac{G}{h^2}$（$G$ 为体重，单位：千克；h 为身高，单位：米），是衡量人体整体胖瘦程度的一个简单易得的重要指标.1997 年，世界卫生组织经过大范围的调查研究后公布：BMI 值在 $18.5\sim24.9$ 为正常；$\mathrm{BMI}\geq25$ 为超重；$\mathrm{BMI}\geq30$ 为肥胖.由于亚洲人与欧美人的体质有较大差异，国际肥胖特别工作组经调查研究后，于 2000 年提出了亚洲成年人

BMI 值在$18.5\sim22.9$为正常.中国肥胖问题工作组基于中国人体质特征，于 2003 年提出中国成年人 BMI 值在$18.5\sim23.9$为正常；$\mathrm{BMI}\geq24$为超重；$\mathrm{BMI}\geq28$为肥胖. 30 岁的小智在今年的体检报告中，发现体质指数 BMI 值为24.8，依照标准属于超重.因为小智平时还是很注意体育锻炼的，正常作息，且每周去健身房有大约 2 小时的健身运动，周末还经常会和朋友去打篮球，所以小智对自己超重感觉很困惑.

请你结合上述材料，从数学模型的视角，帮小智做一下分析（包括：是否需要担心？为什么？）：__________.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16. 已知集合$A=\{x||x-1|<2\},B=\{x|\ m<x<2m+3\}$

（1）求集合 A 中的所有整数；

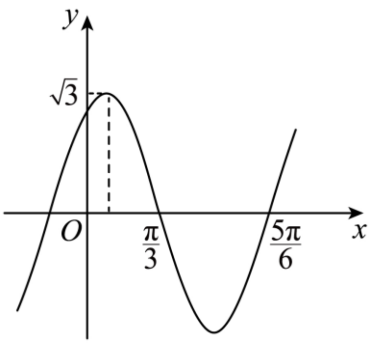
（2）若$\left(\complement_{\mathbf{R}}A\right)\cap B=\varnothing$，求实数$m$的取值范围.

17. （1）已知α,β都是锐角，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$，求$a+\beta$；

（2）求$\dfrac{1+\tan15^{\circ}}{1-\tan15^{\circ}}$；

（3）若$\tan\alpha=m\tan\dfrac{\pi}{5}\ (m\neq1)$，求$\dfrac{\cos\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{5}\right)}$.

18. 已知函数$f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示.



（1）求函数$f\left(x\right)$的解析式；

（2）将函数$f\left(x\right)$的图象向右平移$\dfrac{\pi}{4}$个单位长度，再向上平移 1 个单位长度，得到函数$g\left(x\right)$的图象，令$F\left(x\right)=f\left(x\right)+g\left(x\right)$.当$x\in\left[0,\dfrac{13\pi}{24}\right]$时，求$F\left(x\right)$的值域.

19. 已知$a>0$且$a\neq1$，函数$f\left(x\right)=\dfrac{a^{x}-a^{-x}}{a^{x}+a^{-x}}+b$在 R 上是单调减函数，且满足下列三个条件中的两个.

①函数$f\left(x\right)$为奇函数；②$f\left(1\right)=-\dfrac{3}{5}$；③$f\left(-1\right)=-\dfrac{3}{5}$.

（1）从中选择的两个条件的序号为_____，依所选择的条件求得 $b=$____， $a=$____；

（2）利用单调性定义证明函数 $g\left(t\right)=\frac{2}{t}-t$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递减；

（3）在（1）的情况下，若方程 $f\left(x\right)=m+4^x$ 在 $\left[0,1\right]$ 上有且只有一个实根，求实数 m 的取值范围.

20. 在 $\triangle ABC$ 中， D、E 为边 BC、AC 上的点，且满足 $\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=m,\frac{\left|\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}=n$.

（1）若 $\triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形， $m=\frac{1}{2},n=1$，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$；

（2）若 $m=\frac{1}{3},n=\frac{1}{2},\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 $x+y$；

（3）若 $\angle A=\frac{\pi}{3},AB=2,AC=1,m=n$，求 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最大值；

（4）若将"D、E 为边 BC、AC 上的点"改为"D、E 在 $\triangle ABC$ 的内部（包含边界）"，其它条件同（1），则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 是否为定值？若是，则写出该定值；若不是，则写出取值范围.（不需要说明理由）

21. 设函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 M，且区间 $I\subseteq M$，对任意 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$，记 $\Delta x=x_2-x_1$， $\Delta y=f\left(x_2\right)-f\left(x_1\right)$.若 $\Delta y+\Delta x>0$，则称 $f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 A；若 $\Delta y-\Delta x>0$，则称 $f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 B；若 $\Delta y\cdot\Delta x>0$，则称 $f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 C；若 $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$，则称 $f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 D.

（1）记：①充分而不必要条件；

②必要而不充分条件；

③充要条件；

④既不充分也不必要条件

则 $f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 A 是 $f\left(x\right)$ 在 I 上单调递增的_____（填正确选项的序号）；

$f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 B 是 $f\left(x\right)$ 在 I 上单调递增的_____（填正确选项的序号）；

$f\left(x\right)$ 在 I 上具有性质 C 是 $f\left(x\right)$ 在 I 上单调递增的_____（填正确选项的序号）；

（2）若 $f\left(x\right)=ax^2+1$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 满足性质 B，求实数 a 的取值范围；

（3）若函数 $g\left(x\right)=\frac{1}{|x|}$ 在区间 $\left[m,n\right]$ 上恰满足性质 A、性质 B、性质 C、性质 D 中的一个，直接写出实数 m 的最小值.

参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】B

【分析】利用交集的定义运算即得.

【详解】因为 $A=\{x|\ x>0\}$，$B=\{x|-1<x<2\}$，

则 $A\cap B=\{x|0<x<2\}$.

故选：B.

2.【答案】D

【分析】根据函数奇偶性的定义，结合幂函数的图象与性质，逐项分析即得.

【详解】对于 A，函数 $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2}}$ 的定义域为 $[0,+\infty)$ 不关于原点对称，所以函数 $f\left(x\right)$ 为非奇非偶函数，不符合题意；

对于 B，函数 $f\left(x\right)=x^2$ 定义域为 R，又 $f\left(-x\right)=(-x)^2=x^2=f\left(x\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，不符合题意；

对于 C，函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 为单调递减函数，不符合题意；

对于 D，函数 $f\left(x\right)=x^3$，由 $f\left(-x\right)=(-x)^3=-x^3=-f\left(x\right)$，所以函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数，

根据幂函数的性质，可得函数 $f\left(x\right)=x^3$ 在区间 $\left(0,+\infty\right)$ 上为单调递增函数，符合题意.

故选：D.

3.【答案】B

【分析】解三角函数的方程，由小范围能推出大范围，大范围不能推出小范围可得结果.

【详解】$\because \sin\theta=1$，$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z \not\Rightarrow \theta=\dfrac{\pi}{2}$ 且 $\theta=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，

$\therefore$“$\sin\theta=1$”是“$\theta=\dfrac{\pi}{2}$”的必要不充分条件.

故选：B.

4.【答案】B

【分析】根据不等式的性质确定正确答案.

【详解】A 选项，若 $a>b,c<0$，则 $a+c>b+c$，所以 A 选项错误.

B 选项，若 $\sqrt{a}<\sqrt{b}$，两边平方得 $a<b$，所以 B 选项正确.

C 选项，若 $a>b,c=0$，则 $ac^2=bc^2$，所以 C 选项错误.

D 选项，若 $a^2>b^2$，如 $a=-1,b=0$，则 $a<b$，所以 D 选项错误.

故选：B

5.【答案】C

【分析】根据数量积的运算律，即可求出.

【详解】因为 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2^2+2^2-2\times2=4$，

所以，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=2$.

故选：C.

6.【答案】A

【分析】化简 a，通过讨论函数 $f\left(x\right)=2^x$ 和 $g\left(x\right)=\log_4 x$ 的单调性和取值范围即可得出 a,b,c 的大小关系.

【详解】解：由题意，

$a=4^{0.1}=2^{0.2}$，

在 $f\left(x\right)=2^x$ 中，函数单调递增，且 $f\left(x\right)>0$，

$\therefore 0<a=2^{0.2}<b=2^{0.6}$，

在 $g\left(x\right)=\log_4 x$ 中，函数单调递增，且当 $0<x<1$ 时，$g\left(x\right)<0$，

$\therefore c=\log_4 0.6<0$，

$\therefore c<a<b$，

故选：A.

7.【答案】A

【分析】首先通过条件 $\vec{a}\perp\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$ 求得 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，然后根据数量积的运算公式求出 $\left|\vec{b}\right|\cdot cos\theta$，进而求解 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影.

【详解】$\because$ 平面向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 是非零向量，$\left|\vec{a}\right|=2$，$\vec{a}\perp\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)$，

$\therefore \vec{a}\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=\vec{a}?\vec{a}+2\vec{a}?\vec{b}=|\vec{a}|^2+2\vec{a}?\vec{b}=4+2\vec{a}?\vec{b}=0$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$.

设 $\vec{a}$ 与 b 夹角为 θ，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\theta=-2$，则 $\left|\vec{b}\right|\cdot cos\theta=\dfrac{-2}{\left|\vec{a}\right|}=-1$，

$\therefore \vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上投影为 -1.

故选：A

8.【答案】D

【分析】化简不等式 $f\left(x\right)\geq-\dfrac{4}{3}\left(x-1\right)$，结合解方程组以及函数的图象确定正确答案.

【详解】$f\left(x\right)$的定义域是$\left(0,+\infty\right)$，AB选项错误.

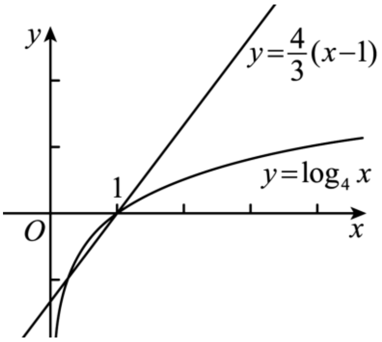
$f\left(x\right)=\log_{\frac{1}{4}}x=-\log_4 x\ge-\frac{4}{3}\left(x-1\right),\log_4 x\le\frac{4}{3}\left(x-1\right)$①,

由$\begin{cases}y=\log_4 x\\ y=\frac{4}{3}\left(x-1\right)\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=\frac{1}{4}\\ y_1=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x_2=1\\ y_2=0\end{cases}$,

画出$y=\log_4 x,y=\frac{4}{3}\left(x-1\right)$的图象如下图所示，

由图可知，不等式①的解集为$\left(0,\frac{1}{4}\right]\cup\left[1,+\infty\right)$.

故选：D



9.【答案】B

【分析】由零点存在性定理，及充分必要条件的判定即可得解.

【详解】因为函数$f\left(x\right)$在区间$\left[1,2\right]$上的图像是连续不断的，

由零点存在性定理，可知由$f\left(1\right)f\left(2\right)<0$可得函数$f\left(x\right)$在区间$(1,2)$上有零点，

即由函数$f\left(x\right)$在区间$(1,2)$上没有零点，可得$f\left(1\right)f\left(2\right)\ge0$,

而由$f\left(1\right)f\left(2\right)\ge0$推不出函数$f\left(x\right)$在区间$(1,2)$上没有零点，如$f\left(x\right)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$，$f\left(1\right)f\left(2\right)\ge0$,

函数$f\left(x\right)$在区间$(1,2)$上有零点$\frac{3}{2}$,

所以“$f\left(1\right)f\left(2\right)\ge0$”是“函数$f\left(x\right)$在区间$(1,2)$上没有零点”的必要不充分条件.

故选：B.

10.【答案】C

【分析】将$f\left(x_1+1\right)\ge f\left(x_2\right)$成立转化成$f\left(x+1\right)_{\min}\ge f\left(x\right)_{\max}$恒成立的问题，构造函数$h\left(x\right)=f\left(x+1\right)$，然后分类讨论，即可求出$m$的取值范围.

【详解】解：由题意

在 $f(x)=x^2-2x$ 中，对称轴 $x=-\dfrac{-2}{2\times1}=1$

函数在 $(-\infty,1)$ 上单调减，在 $(1,+\infty)$ 上单调增

$f(x+1)=(x+1)^2-2(x+1)=x^2-1$，

$\because$ 对于 $\forall x_1,x_2\in[m,m+1]$，均有 $f(x_1+1)\geq f(x_2)$ 成立

即对于 $\forall x_1,x_2\in[m,m+1]$，均有 $f(x+1)_{\min}=(x^2-1)_{\min}\geq f(x)_{\max}=(x^2-2x)_{\max}$ 恒成立

在 $h(x)=f(x+1)=x^2-1$ 中，对称轴 $x=-\dfrac{0}{2\times1}=0$，

函数在 $(-\infty,0)$ 上单调减，在 $(0,+\infty)$ 上单调增

当 $m+1\leq0$ 即 $m\leq-1$ 时，

函数 $h(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上单调减

函数 $f(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上单调减

$h(x)_{\min}=(m+1)^2-1=m^2+2m$

$f(x)_{\max}=m^2-2m$

$\therefore\begin{cases}m^2+2m\geq m^2-2m\\ m\leq-1\end{cases}$

解得 $m=\varnothing$

当 $\begin{cases}m+1>0\\ m<0\end{cases}$，即 $-1<m<0$ 时，

函数 $h(x)$ 在 $[m,0)$ 上单调减，在 $(0,m+1]$ 上单调增

函数 $f(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上单调减

$\therefore h(x)_{\min}=0^2-1=-1$

$f(x)_{\max}=m^2-2m$

$\therefore\begin{cases}-1\geq m^2-2m\\ -1<m<0\end{cases}$

解得 $m=\varnothing$

当 $\begin{cases}m\geq0\\ m+1\leq1\end{cases}$，即 $m=0$ 时，$[m,m+1]=[0,1]$

函数 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增

函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调减

$\therefore h(x)_{\min}=0^2-1=-1$

$f(x)_{\max}=f(0)=0^2-0=0$

$\therefore h(x)_{\min}=-1<f(x)_{\max}=0$

故不符题意，舍去.

当$\begin{cases}\dfrac{m+m+1}{2}<1\\ m>0\end{cases}$即$0<m<\dfrac{1}{2}$时

函数$h(x)$在$[m,m+1]$上单调增，$h(x)_{\min}=m^2-1$

函数$f(x)$在$[m,1)$上单调减，在$(1,m+1]$上单调增，$f(x)_{\max}=f(m)=m^2-2m$

$\therefore\begin{cases}m^2-1\geq m^2-2m\\ 0<m<\dfrac{1}{2}\end{cases}$

解得$m=\varnothing$

当$\begin{cases}\dfrac{m+m+1}{2}\geq 1\\ m<1\end{cases}$即$\dfrac{1}{2}\leq m<1$时

函数$h(x)$在$[m,m+1]$上单调增，$h(x)_{\min}=m^2-1$

函数$f(x)$在$[m,1)$上单调减，在$(1,m+1]$上单调增，$f(x)_{\max}=f(m+1)=m^2-1$

此时，$h(x)_{\min}=m^2-1=f(x)_{\max}$

$\therefore\dfrac{1}{2}\leq m<1$符合题意

当$m\geq 1$时，

函数$h(x)$在$[m,m+1]$上单调增

函数$f(x)$在$[m,m+1]$上单调增

$\therefore h(x)_{\min}=m^2-1$

$f(x)_{\max}=f(m+1)=(m+1)^2-2(m+1)=m^2-1$

此时$h(x)_{\min}=m^2-1=f(x)_{\max}$

$\therefore m\geq 1$符合题意

综上，实数m的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

故选：C.

【点睛】本题考查恒成立问题，二次函数不同区间的单调性，以及分类讨论的思想，具有很强的综合性.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分.把答案填在题中横线上.

11.【答案】$\{x \mid x<1\}$

【分析】直接令真数大于 0 可得定义域.

【详解】函数 $f(x)=\ln(1-x)$，由 $1-x>0$，得 $x<1$，

所以定义域为 $\{x \mid x<1\}$.

故答案为：$\{x \mid x<1\}$.

【点睛】本题主要考查了对数型函数的定义域，属于基础题.

12.【答案】 ①. 5 ②. 3

【分析】根据指数幂的运算法则和对数的运算法则即得.

【详解】$3^0+8^{\frac{2}{3}}=1+\left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}=1+4=5$，

$$\lg 6-\lg\left(\frac{3}{5}\right)+\ln e^2=\lg 6+\lg\left(\frac{5}{3}\right)+2=\lg\left(6\times\frac{5}{3}\right)+2=3.$$

故答案为：5；3.

13.【答案】2

【分析】根据根与系数的关系结合条件即得.

【详解】因为 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $x^2-mx+m^2-6=0$ 的两个实根，

则 $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=m^2-6 \\ \Delta=m^2-4\left(m^2-6\right)\geq 0 \end{cases}$，又 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-1$，

所以 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{m}{m^2-6}=-1$，

解得 $m=-3$ 或 $m=2$，

经判别式检验知 $m=2$.

故答案为：2.

14.【答案】 ①. $(0,1)$ ②. $[2,+\infty)$

【分析】空一：分开求解单调性；空二：分 $\frac{a}{2}\leq 0$ 和 $\frac{a}{2}>0$ 两种情况讨论.

【详解】当 $a=2$ 时，$f(x)=\begin{cases} 2^x-1, x<0 \\ x^2-2x, x\geq 0 \end{cases}$

当 $x<0$ 时函数 $f(x)=2^x-1$ 单调递增，

当 $x\geq 0$ 时函数 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的单调减区间为 $\left(0,1\right)$

因为函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^{x}-1,x<0\\x^{2}-ax,x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}2^{x}-1,x<0\\\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^{2}-\dfrac{a^{2}}{4},x\geq 0\end{cases}$

$\dfrac{a}{2}\leq 0\Rightarrow a\leq 0$ 并且 $f\left(0\right)=0$，所以函数 $f\left(x\right)$ 在 R 上单调递增，没有最小值；

$\dfrac{a}{2}>0\Rightarrow a>0$，要想函数 $f\left(x\right)$ 有最小值则满足 $-\dfrac{a^{2}}{4}\leq -1$ 即 $a\geq 2$

故答案为：$\left(0,1\right)$，$\left[2,+\infty\right)$

15.【答案】答案见解析

【分析】根据材料结合条件分析即得.

【详解】因为小智平时注意锻炼，肌肉占比相对高，意味着身体密度大，相同体型和身高情况下，BMI 值与密度成正比（或者说，体重更大），

所以他的 BMI 值就会偏高，如果小智体型基本正常（或者说身高远高于中国人平均值），就不必担心.

故答案为：如果小智体型基本正常（或者说身高远高于中国人平均值），他的 BMI 值就会偏高，就不必担心，因为小智平时注意锻炼，肌肉占比相对高，意味着身体密度大，相同体型和身高情况下，BMI 值与密度成正比（或者说，体重更大）.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 40 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16.【答案】（1）$0,1,2$

（2）$\left(-\infty,-3\right]\cup\left[-1,0\right]$

【分析】（1）解绝对值不等式求得集合 A，从而确定正确答案.

（2）对集合 B 是否为空集进行分类讨论，结合 $\left(\complement_{R}A\right)\cap B=\varnothing$ 求得 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

$\left|x-1\right|<2,-2<x-1<2,-1<x<3$，所以 $A=\left\{x\mid -1<x<3\right\}$，

所以集合 A 中的所有整数为 $0,1,2$.

【小问 2 详解】

由（1）得：$A=\{x|-1<x<3\}$，所以 $\complement_{R}A=\{x|\ x\leq -1$ 或 $x\geq 3\}$

① $B=\varnothing$ 时，即 $m\geq 2m+3$，

所以 $m\leq -3$，符合 $\left(\complement_{R}A\right)\cap B=\varnothing$；

② $B\neq\varnothing$ 时，即 $m<2m+3$，

所以 $m>-3$，

由于 $\left(\complement_{R}A\right)\cap B=\varnothing$，

所以$\begin{cases} m \geq -1 \\ 2m+3 \leq 3 \end{cases}$，

所以$-1 \leq m \leq 0$.

综上，实数m的取值范围是$\left(-\infty,-3\right] \cup \left[-1,0\right]$.

17.【答案】(1) $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$；(2) $\frac{1+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 15^{\circ}}=\sqrt{3}$；(3) $\frac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{m+1}{m-1}$.

【分析】(1) 根据已知可得，$\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，根据两角和的余弦公式求出$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即可得出答案；

(2) 原式可化为$\frac{1+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 15^{\circ}}=\frac{\tan 45^{\circ}+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 45^{\circ}\cdot\tan 15^{\circ}}$，根据两角和的正切公式逆用，即可得出；

(3) 观察可知$\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$，根据两角差的正余弦公式以及诱导公式可得$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\tan\frac{\pi}{5}+\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{5}}$，代入已知即可求出结果.

【详解】(1) 解：因为α,β都是锐角，所以$\cos\alpha>0$，$\sin\beta>0$，$0<\alpha+\beta<\pi$.

所以，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

又$0<\alpha+\beta<\pi$，所以$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$；

(2) $\frac{1+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 15^{\circ}}=\frac{\tan 45^{\circ}+\tan 15^{\circ}}{1-\tan 45^{\circ}\cdot\tan 15^{\circ}}=\tan\left(45^{\circ}+15^{\circ}\right)=\tan 60^{\circ}=\sqrt{3}$；

(3) 由已知$\cos\alpha\neq 0$.

因为$\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$，所以$\cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{\pi}{5}$，$\sin\frac{3\pi}{10}=\cos\frac{\pi}{5}$.

所以，$\frac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=\frac{\cos\alpha\cos\frac{3\pi}{10}+\sin\alpha\sin\frac{3\pi}{10}}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{5}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\cos\alpha\sin\frac{\pi}{5}+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\alpha\cos\frac{\pi}{5}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\tan\frac{\pi}{5}+\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{5}}$，

又 $\tan\alpha = m\tan\frac{\pi}{5}\left(m\neq 1\right)$，所以 $\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{5}\neq 0$，

所以 $\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}+\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{5}}=\dfrac{\tan\frac{\pi}{5}+m\tan\frac{\pi}{5}}{m\tan\frac{\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{5}}=\dfrac{m+1}{m-1}$，

所以 $\dfrac{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{10}\right)}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=\dfrac{m+1}{m-1}$.

18.【答案】（1） $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

（2）$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}+1,\sqrt{6}+1\right]$.

【分析】（1）由图象可得 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\varphi\right)$，由 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，根据 φ 的范围求出，即可得出解析式；

（2）根据已知得到 $g\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$，由辅助角公式化简得到 $F\left(x\right)=\sqrt{6}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)+1$. 令 $X=2x+\frac{\pi}{12}$，求出 $\frac{\pi}{12}\leq X\leq\frac{7\pi}{6}$，根据函数 $h\left(X\right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{6}\right]$ 上的单调性以及端点处的函数值，即可得到 $h\left(X\right)$ 的最值，然后求出 $F\left(x\right)$ 的值域.

【小问 1 详解】

由图象可知，$A=\sqrt{3}$，$\frac{T}{2}=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，即 $f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\varphi)$.

由 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，即 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

【小问 2 详解】

由（1）知，$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

将函数 $f\left(x\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度，得到函数 $y=\sqrt{3}\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象；再向上平移 1 个单位长度，得到函数 $g\left(x\right)=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ 的图象.

所以$F(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)+1=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$

$=\sqrt{6}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]+1=\sqrt{6}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+1=\sqrt{6}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)+1$，

令$X=2x+\frac{\pi}{12}$，因为$x\in\left[0,\frac{13\pi}{24}\right]$，所以$\frac{\pi}{12}\le X\le\frac{7\pi}{6}$，设$h(X)=\sqrt{6}\sin X+1$.

当$\frac{\pi}{12}\le X\le\frac{\pi}{2}$时，函数$h(X)$单调递增；当$\frac{\pi}{2}\le X\le\frac{7\pi}{6}$时，函数$h(X)$单调递减.

所以，当$X=\frac{\pi}{2}$时，$h(X)$有最大值$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{2}+1=\sqrt{6}+1$；

又$h\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sqrt{6}\sin\frac{7\pi}{6}+1=-\frac{\sqrt{6}}{2}+1$，$h\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{6}\sin\frac{\pi}{12}+1$，

$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以$h\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+1=\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}>-\frac{\sqrt{6}}{2}+1$，所以$h(X)$最小值为$-\frac{\sqrt{6}}{2}+1$.

所以$F(x)$的值域为$\left[-\frac{\sqrt{6}}{2}+1,\sqrt{6}+1\right]$.

19.【答案】(1) ①②；0；$\frac{1}{2}$

(2) 证明见解析　(3) $\left[-\frac{23}{5},-1\right]$

【分析】(1) 通过分析可知一定满足①②，从而列出方程组，求出$b=0$，$a=\frac{1}{2}$；

(2) 定义法判断函数的单调性步骤：取值，作差，变形，判号；

(3) 参变分离得到$m=\frac{2}{4^x+1}-\left(4^x+1\right)$，$x\in[0,1]$，换元后转化为$m=\frac{2}{t}-t$在$[2,5]$上有唯一解，结合

(2) 中函数单调性，求出$g(t)=\frac{2}{t}-t$的值域，从而得到m的取值范围.

【小问1详解】

因为函数$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}+b$在R上是单调减函数，

故② $f(1)=-\frac{3}{5}$；③ $f(-1)=-\frac{3}{5}$不会同时成立，两者选一个，

故函数一定满足①函数 $f(x)$ 为奇函数，

由于函数定义域为 R，所以有 $f(0)=0$，则 $f(1)<0$， $f(-1)>0$，

故一定满足②，

选择①②； $f(-x)+f(x)=\dfrac{a^{-x}-a^{x}}{a^{-x}+a^{x}}+b+\dfrac{a^{x}-a^{-x}}{a^{x}+a^{-x}}+b=0$，

$f(1)=\dfrac{a-a^{-1}}{a+a^{-1}}+b=-\dfrac{3}{5}$，

解得： $b=0$， $a=\dfrac{1}{2}$；

【小问 2 详解】

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

则 $g(x_2)-g(x_1)=\left(\dfrac{2}{x_2}-x_2\right)-\left(\dfrac{2}{x_1}-x_1\right)=(x_1-x_2)\left(\dfrac{2}{x_1x_2}+1\right)$，

由于 $0<x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0,\dfrac{2}{x_1x_2}+1>0$，

所以 $g(x_2)-g(x_1)<0$，即 $g(x_2)<g(x_1)$，

所以函数 $g(t)=\dfrac{2}{t}-t$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

【小问 3 详解】

由（1）可得 $f(x)=\dfrac{1-4^{x}}{1+4^{x}}$，

所以方程为 $\dfrac{1-4^{x}}{1+4^{x}}=m+4^{x}$，即 $m=\dfrac{1-4^{x}}{1+4^{x}}-4^{x}=\dfrac{2}{4^{x}+1}-(4^{x}+1)$，

令 $t=4^{x}+1$，由于 $x\in[0,1]$，所以 $t\in[2,5]$，

则问题转化为 $m=\dfrac{2}{t}-t$ 在 $[2,5]$ 上有唯一解.

由（2）知，函数 $g(t)=\dfrac{2}{t}-t$ 在 $[2,5]$ 上单调递减，

所以 $g(t)_{\min}=g(5)=\dfrac{2}{5}-5=-\dfrac{23}{5},g(t)_{\max}=g(2)=\dfrac{2}{2}-2=-1$，

所以，实数 m 的取值范围是 $\left[-\dfrac{23}{5},-1\right]$.

20.【答案】（1） $-\dfrac{3}{2}$

（2）$-\frac{1}{3}$

（3）$-\frac{1}{2}$

（4）不是定值，理由见解析

【分析】（1）D、E 分别是 BC、AC 的中点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 60°，$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，计算 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 即可；

（2）若 $m=\frac{1}{3},n=\frac{1}{2}$，则 D 距离是 B 近的 BC 三等分点，E 是距离 C 近的 AC 三等分点，

则由 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ 可得 x,y，从而求出 $x+y$；

（3）$\frac{\left|\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}+1=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}=n+1$，$\overrightarrow{AD}=(1-m)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{AC}$，且 $m\in[0,1]$，由

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=3(m+1)+\frac{1}{m+1}-7$，$m+1\in[1,2]$，令 $f(x)=3x+\frac{1}{x},x\in[1,2]$，由函数的单调性定义可得

$f(x)=3x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递增，可求出 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 的最大值；

（4）以 CB 的中点 F 为原点，CB 所在的直线为 x 轴，BC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，，设 $D(x,y)$，$E(m,n)$，可得点 D 在以 B 为圆心，半径为 1 的三角形 ABC 内部的圆弧上，包括与三角形 ABC 的边上的两个交点 F、H，点 E 在三角形 ABC 内部线段 AC 的垂直平分线上，包括点 B 和 AC 的中点 N，取点 D、点 E 特殊位置可得答案.

【小问 1 详解】

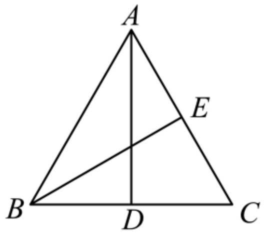
若 $\triangle ABC$ 为边长为 2 的等边三角形，$m=\frac{1}{2},n=1$，

则 D、E 分别是 BC、AC 的中点，$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 60°，

$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

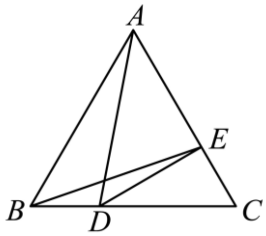
$=\frac{1}{4}\left(-2\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)=\frac{1}{4}\times\left(-8-2\times2\times\frac{1}{2}+4\right)=-\frac{3}{2}$；



【小问 2 详解】

若 $m=\frac{1}{3},n=\frac{1}{2},\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

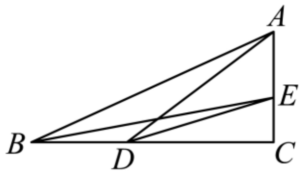
则 D 距离是 B 近的 BC 三等分点， E 是距离 C 近的 AC 三等分点，



则 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以 $x=\frac{1}{3},y=-\frac{2}{3}$， $x+y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$；

【小问 3 详解】



因为 $\frac{\left|\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}=n$， 所以 $\frac{\left|\overrightarrow{CE}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}+1=\frac{\left|\overrightarrow{CE}\right|+\left|\overrightarrow{EA}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{EA}\right|}=n+1$，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+m\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\left(1-m\right)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{AC}$，

因为 $m=n$， 所以 $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC}$， 且 $m\in\left[0,1\right]$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\left(\left(1-m\right)\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\left(m-1\right)\overrightarrow{AB}^2+\left(\frac{1-m}{m+1}-m\right)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+1}\overrightarrow{AC}^2=3m+\frac{1}{m+1}-4$，

$=3\left(m+1\right)+\frac{1}{m+1}-7$， $m+1\in\left[1,2\right]$，

令 $f\left(x\right)=3x+\frac{1}{x},x\in\left[1,2\right]$， 设 $1\le x_1<x_2\le 2$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=3x_1+\frac{1}{x_1}-\left(3x_2+\frac{1}{x_2}\right)=(x_1-x_2)\frac{3x_1x_2-1}{x_1x_2}$，

因为 $1\le x_1<x_2\le 2$，所以 $x_1-x_2<0, 3x_1x_2-1>0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$， $f(x)=3x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in[1,2]$ 上单调递增，

所以 $3(m+1)+\frac{1}{m+1}-7\le 3\times 2+\frac{1}{2}-7=-\frac{1}{2}$，

当 $m+1=2$ 即 $m=1$ 时 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 有最大值为 $-\frac{1}{2}$；

【小问 4 详解】

以 CB 的中点 F 为原点，CB 所在的直线为 x 轴，BC 的垂直平分线为 y 轴建立如图所示平面直角坐标系，则 $B(-1,0), C(1,0), A(0,\sqrt{3})$，

设 $D(x,y)$，$E(m,n)$，因为 $\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{1}{2}, \frac{|\overrightarrow{CE}|}{|\overrightarrow{EA}|}=1$，

所以 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=1$， $\sqrt{m^2+(n-\sqrt{3})^2}=\sqrt{n^2+(m-1)^2}$，

化简得 $(x+1)^2+y^2=1$， $m-\sqrt{3}n+1=0$，

所以点 D 在以 B 为圆心，半径为 1 的三角形 ABC 内部的圆弧上，包括与三角形 ABC 的边上的两个交点 F、H，并且 F、H 都为所在边的中点，点 E 在三角形 ABC 内部线段 AC 的垂直平分线上，包括点 B 和 AC 的中点 N，

当点 D 为 AB 中点 H， E 与 B 点重合时， $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$， $\overrightarrow{BE}=\vec{0}$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=0$，

而当 $m=\frac{1}{2}, n=1$ 时，由（1） $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=-\frac{3}{2}$，

故 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}$ 不是定值.

$|\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{BD}|=1, |\overrightarrow{BE}|\in[0,\sqrt{3}]$， $\angle ABE=30^\circ$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BE}$ 的夹角为 150°，

设 $\angle DBE=\theta$，则 $\theta\in[0^\circ,30^\circ]$， $\cos\theta\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BE}$

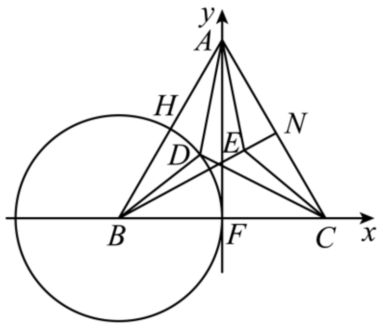
$=-\frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BE}|+|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{BE}|\cos\theta$

$=-\sqrt{3}\left|\overrightarrow{BE}\right|+\left|\overrightarrow{BE}\right|\cos\theta=\left|\overrightarrow{BE}\right|\left(-\sqrt{3}+\cos\theta\right)$，

所以$\left(-\sqrt{3}+\cos\theta\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1-\sqrt{3}\right]$，而$\left|\overrightarrow{BE}\right|\in\left[0,\sqrt{3}\right]$，

可得$\left|\overrightarrow{BE}\right|\left(-\sqrt{3}+\cos\theta\right)\in\left[-\frac{3}{2},0\right]$，

所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}\in\left[-\frac{3}{2},0\right]$.



21.【答案】(1)②；①；③

(2)$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

(3)1

【分析】(1)结合函数的单调性、充分、必要条件的知识确定正确答案.

(2)根据性质B，利用分离常数法，结合不等式的性质求得a的取值范围.

(3)将问题转化为$-1<\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$恒成立，对$m,n$的范围进行分类讨论，由此求得$m$的最小值.

【小问1详解】

由于$x_1<x_2$，所以$\Delta x=x_2-x_1>0$.

对于性质A，当$\Delta y+\Delta x>0$时，无法判断Δy的符号，故无法判断单调性；

当$f\left(x\right)$在I上单调递增时，$\Delta y>0\Rightarrow\Delta y+\Delta x>0$，

所以$f\left(x\right)$在I上具有性质A是$f\left(x\right)$在I上单调递增的必要而不充分条件.

对于性质B，当$\Delta y-\Delta x>0$时，$\Delta y>\Delta x>0$，所以$f\left(x\right)$在I上单调递增；

当$f\left(x\right)$在I上单调递增时，$\Delta y>0$，$\Delta y-\Delta x$的符号无法判断，

所以$f\left(x\right)$在I上具有性质B是$f\left(x\right)$在I上单调递增的充分而不必要条件.

对于性质C，若$\Delta y\cdot\Delta x>0$，则$\Delta y>0$，所以$f\left(x\right)$在I上单调递增；

当$f\left(x\right)$在I上单调递增时，$\Delta y>0$，$\Delta y\cdot\Delta x>0$，

所以$f\left(x\right)$在I上具有性质C是$f\left(x\right)$在I上单调递增的充要条件.

【小问 2 详解】

对于任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

有 $\Delta x=x_2-x_1>0,\Delta y=f(x_2)-f(x_1)=ax_2^2-ax_1^2$，

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 满足性质 B，即 $\Delta y-\Delta x>0$，

所以 $(ax_2^2-ax_1^2)-(x_2-x_1)>0$，所以 $(ax_1+ax_2-1)(x_2-x_1)>0$，

因为 $x_2-x_1>0$，所以 $a(x_1+x_2)>1$，所以 $a>\dfrac{1}{x_1+x_2}$，

由于任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2>2$，

所以 $\dfrac{1}{x_1+x_2}<\dfrac{1}{2}$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

【小问 3 详解】

实数 m 的最小值为 1.

理由如下：

因为 $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$ 在 $[m,n]$ 上恰满足性质 A 、性质 B、性质 C 、性质 D 中的一个，

所以对任意 $x_1,x_2\in[m,n]$ 且 $x_1<x_2$，若满足性质 A，$\Delta y>-\Delta x$，

若满足性质 B，则 $\Delta y>\Delta x>0$，若满足性质 C、D，则 $\Delta y>0$，

性质 B、C、D 同时满足，所以仅满足性质 A，此时 $0>\Delta y>-\Delta x$，

有 $-1<\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ 恒成立.

因为 $g(x)=\dfrac{1}{|x|}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以 $0\notin[m,n]$.

当 $m<n<0$ 时，$y=\dfrac{1}{-x}$，

所以 $\Delta y=-\dfrac{1}{x_2}-\left(-\dfrac{1}{x_1}\right)=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}=\dfrac{\Delta x}{x_1x_2}$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x_1x_2}>0$，不合题意；

当 $0<m<n$ 时，$y=\dfrac{1}{x}$，

所以 $\Delta y=\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{x_1-x_2}{x_1x_2}=\dfrac{-\Delta x}{x_1x_2}$，从而 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x_1x_2}<0$，

要使$-1<\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$恒成立，只需使$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x_1x_2}>-1$，即$x_1x_2>1$恒成立，

若$m<1$，则$\exists x_1=m,x_2<1$，使$x_1x_2<1$，这与$x_1x_2>1$矛盾，

当$m=1$时，$1\le x_1<x_2$，$x_1x_2>1$恒成立，

所以m的最小值为1.

【点睛】对于新定义问题的求解，关键点在于“转化”，将新定义的问题，不熟悉的问题，转化为学过的知识、熟悉的问题来进行求解. 求解函数问题，首先要研究函数的定义域，这个步骤必不可少.