2023北京东城初二（下）期末

数　　学

2023.7

一、选择题(本题共16分，每小题2分)

第1-8题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1.在下列四个式子中，最简二次根式为

A. $\sqrt{(-2)^2}$　　B. $\sqrt{12}$　　C. $\sqrt{\dfrac{3}{4}}$　　D. $\sqrt{7}$

2.在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A:\angle B:\angle C:\angle D$ 可以是

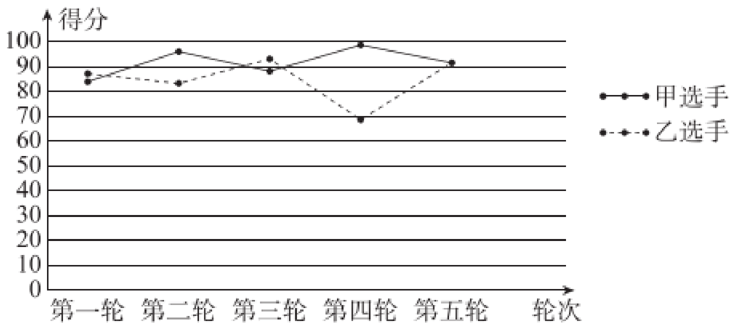
A. 1∶2∶3∶4　　B. 1∶2∶2∶1

C. 1∶2∶1∶2　　D. 1∶1∶2∶2

3. 下列各式中，计算结果正确的是

A. $\sqrt{(-1)^2}=-1$　B. $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$　C. $\sqrt{4}=\pm 2$　D. $\left(-\sqrt{2}\right)^2=-2$

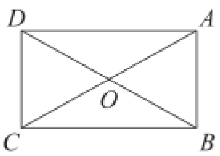
4. 奥运会的跳水项目是优美的水上运动，中国跳水队被称为“梦之队”.在一次女子单人10米台跳水比赛中，甲、乙两名选手五轮得分的折线统计图如图所示. 设甲、乙的平均分依次为$\overline{x}_{甲}$，$\overline{x}_{乙}$，方差依次为$s_{甲}^2$，$s_{乙}^2$，在以下四个推断中，正确的是



A. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}>s^2_{乙}$　　B. $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

C. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}>s^2_{乙}$　　D. $\overline{x}_{甲}<\overline{x}_{乙}$，$s^2_{甲}<s^2_{乙}$

5. 如图，矩形 $ABCD$ 的两条对角线相交于点 O.若$\angle ACB$=30°,AB=2，则边 AD 的长为



A. $2\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P（x_1，y_1），$Q(x_2,y_2)$都在函数 y=-2x+3 的图象上.若 $x_1<x_2<0$,则下列四个推断中错误的是

A．点 P 在第二象限　　B. 坐标原点不在此函数图象上

C．　$y_1>y_2$　　　　D．　$y_2<3$

7. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-2,1)$,B（1,1）.若直线 $y=mx$ 与线段 AB 有交点，则 m 的值不可能是

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -1

8. 画一个四边形，使得该四边形的面积等于已知图形面积的一半.

（1）如图 1，已知等腰△ABC，D,E 是 AB,AC 的中点，画四边形 $DBCE$;

(2) 如图 2，已知四边形 $ABCD$,$AC\perp BD$.四边的中点分别为 E,F,G,H,画四边形 $EFGH$;

(3)如图 3，已知平行四边形 $ABCD$, 点 E,G 分别在 AD,BC 上，且 $EG/\!/AB$.点 F,H 分别在 AB,CD 上，画四边形 $EFGH$.

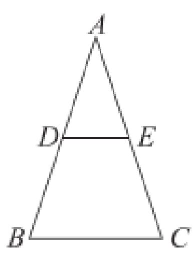


图 1

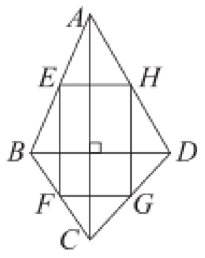


图 2

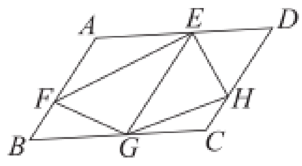


图 3

在以上三种画法中，所有正确画法的序号是

A. (1) (3)　B. (2)　　C. (2) (3)　D.(1) (2) (3)

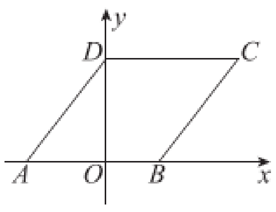
二、填空题(本题共 16 分，每小题 2 分)

9. 若二次根式 $\sqrt{x-1}$ 有意义，则 x 的取值范围是______.

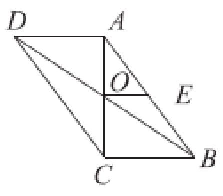
10. 北京某月连续 10 天的最低气温（单位：℃）分别是：13 14 15 15 15 16 16 18 19 21 . 这组数据的众数是____.

11. 若最简二次根式 $\sqrt{4-2m}$ 与 $\sqrt{6}$ 是同类二次根式，则 m 的值是______.

12.如图，在平面直角坐标系 xOy 中，若菱形 $ABCD$ 的顶点 A，B 的坐标分别为（-3，0)，(2，0)，点 D 在 y 轴上，则点 C 的坐标是______.



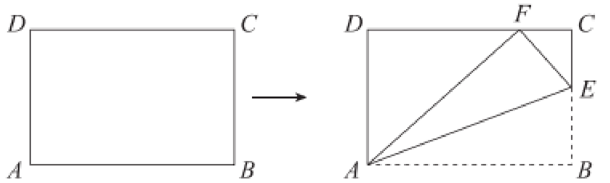
第 12 题图



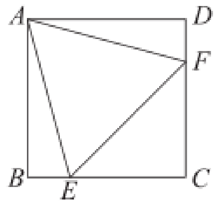
第 13 题图

13.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp BC$，对角线 AC，BD 交于点 O,点 E 为边 AB 的中点若 AB=10，AC=8，则 OE 的长为___ .

14. 如图，将矩形纸片 $ABCD$ 沿 AE 折叠，顶点 B 落在 CD 边上点 F 处.若 AB＝3，BC＝2，则 DF＝___.



15. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，边长为 2 的等边三角形 AEF 的顶点 E，F 分别在 BC，CD 上，则 $\triangle EFC$ 的面积为________.



第 15 题图

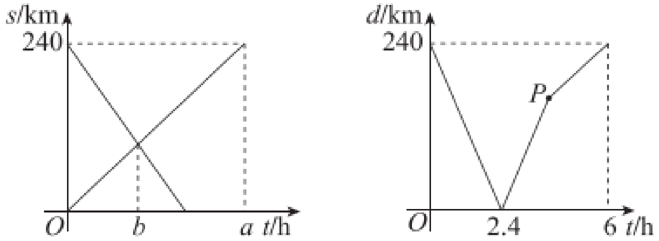


图 1　　图 2

第 16 题图

16.已知 A，B 两地相距 240 km.甲、乙两辆货车分别从 A，B 两地同时出发，匀速相向而行.图 1 表示甲、乙两辆货车距 A 地的距离 s（单位：km）与行驶时间 t（单位：h）的数量关系；图 2 表示甲、乙两辆货车间的距离 d（单位：km）与行驶时间 t（单位：h）的数量关系.

根据以上信息得到以下四个推断：

①甲货车从 A 地到 B 地耗时 6 小时，即 $a=6$；

②出发后 2.4 小时甲、乙两货车相遇，即 $b=2.4$；

③乙货车的速度是 60 km/h；

④点 P 的坐标是（4,180）.

所有正确推断的序号是______.

三、解答题(本题共 68 分，第 17 题 8 分，第 18-20 题，每小题各 5 分，第 21 题 6 分，第 22-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：

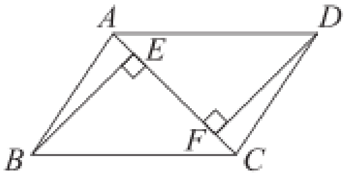
（1）$\left(\sqrt{12}-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$；

(2) $\left(2\sqrt{5}+4\right)\left(2\sqrt{5}-4\right)\div\left(\sqrt{8}\right)$

18. 已知 $x=2+\sqrt{3}$,求代数式 $\left(x-1\right)^2-2x+5$ 的值.

19.如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 是对角线，$BE\perp AC$ 于点 E，$DF\perp AC$ 于点 F.

求证：$AE=CF$.



20. 如图，$\triangle ABC$ 为等边三角形.

求作：菱形 $ABFE$,使得 $\angle BAE=150°$.

作法：如图，

① 作$\angle BAC$的平分线 AD，交 BC 于点 D；

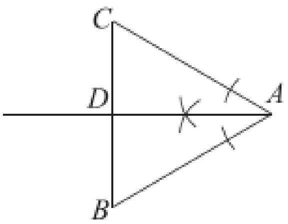
② 以点 A 为圆心，AB 长为半径画弧交 DA 的延长线于点 E；

③ 分别以点 B，E 为圆心，AB 长为半径画弧，两弧交于点 F；（不是点 A）

⑤连接 BF,EF.

则四边形 $ABFE$ 为所求作的菱形.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全尺规作图（保留作图痕迹）；



（2）完成下面的证明.

证明：∵$AB=AE=BF=EF$,

∴四边形 $ABFE$ 为菱形（__________）（填推理依据）.

∵$\triangle ABC$ 为等边三角形，

∴$\angle BAC=60°$.

∵AD 平分$\angle BAC$，

∴ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=$____°.

∵ $\angle BAE=180°-\angle BAD$,

∴$\angle BAE=$______°.

21. 某数学兴趣小组研究某地区气温与海拔的关系.下表记录的是气温随海拔变化的情况：

海拔 x/km	…	1	1.5	2	m	3.5	…
气温 y/°C	…	-1	-4	-7	-10	n	…

小组研究发现，气温 y 与海拔 x 满足一次函数关系：$y=kx+b$（$k\neq0$）.根据小组的研究发现，回答下列问题.

（1）求出 k，b 的值；

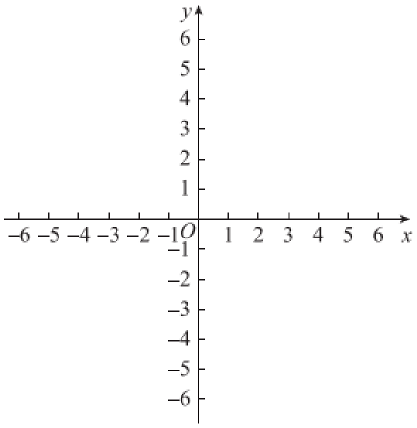
（2）求表格中 m,n 的值；

（3）当海拔 x 满足 $4\leq x\leq7$ 时，求气温 y 的变化范围.

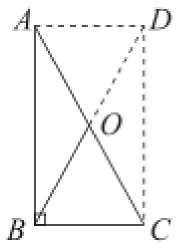
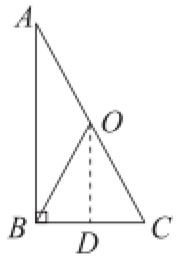
22. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 P（x，y）的坐标满足 $y=2-x$.

（1）当点 P 在第一象限时，画出点 P 组成的图形；

（2）已知点 $A(-3,0)$,当△OPA 的面积为 6 时，求点 P 的坐标.



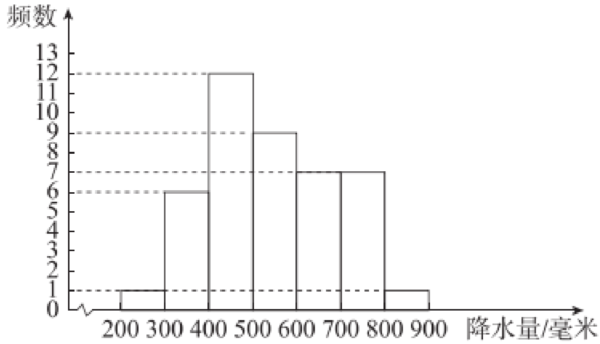
23.下面是证明直角三角形的一个性质的两种添加辅助线的方法，选择其中一种，完成证明.

<table>
<tr><td colspan="2">性质：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.
已知：如图，Rt△ABC 中，$\angle ABC=90°$，BO 是斜边 AC 的中线.
求证：$BO=\dfrac{1}{2}AC$.</td></tr>
<tr><td>方法一
证明：如图，延长 BO 至点 D，使得 $OD=OB$，连接 AD，CD.
</td><td>方法二
证明：如图，取 BC 中点 D，连接 OD.
</td></tr>
</table>

24. 为了解北京市的水资源情况，收集了 1978-2020 年北京的年降水量（单位：毫米）共 43 个数据，并对数据进行整理、描述和分析.下面给出了部分信息.

注：降水量是指一定时间段内降落在某一点或某一区域的水层深度，通常以毫米表示.

a. 43 个数据的频数分布直方图如下（数据分成 7 组：$200\le x<300$, $300\le x<400$, $400\le x<500$, $500\le x<600$, $600\le x<700$, $700\le x<800$, $800\le x\le 900$）：



b.43 个数据中，在 $500 \le x < 600$ 这一组的是：

507 523 527 542 544 547 573 576 579

c. 43 个数据的平均数、中位数如下：

平均数	中位数
547	n

根据以上信息，回答下列问题：

（1）表中 n 的值为___；

（2）1978-2020 年北京降水量高于 547 毫米的年份共___个：

（3）若 2021 年，2022 年北京的年降水量分别是 698 毫米,493 毫米,则下列推断合理的是___（填写序号）；

① 因为 698 大于 n，所以北京 2021 年降水量比 1978-2020 年中一半年份的降水量高；

② 已知 1978-2000 年北京的降水量的方差为 21 249 若 2021 年， 2001-2022 年北京的年降水量的方差为 13 486，由此推断 2001-2022 年北京的年降水量的波动较大；

③ 1 个底面边长为 10 分米的正方体集水箱 2022 年共可收集降水约 493 升.

注：1 升=1 立方分米.

25. A,B 两地分别有垃圾 20 吨，30 吨,现要把这些垃圾全部运到 C，D 两个垃圾处理厂,其中 24 吨运到 C 厂. 运费标准（单位：元/吨）如下表：

始发地 目的地	C 厂	D 厂
A 地	26	25
B 地	15	20

当从 A 地运送多少吨垃圾到 C 厂时，从 A,B 两地到 C 厂的总运费大于运到 D 厂的总运费?

(1)建立函数模型

设从 A 地运到 C 厂 x 吨垃圾.从 A,B 两地到 C 厂的总运费为 y_1 元，到 D 厂的总运费为 y_2 元. 求 y_1，y_2 关于 x 的函数关系式;

（2）根据函数的图象与性质，解决问题：

当 $y_1 > y_2$ 时，求 x 的取值范围.

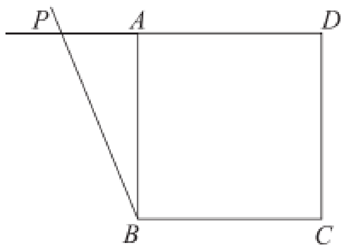
26.在平面直角坐标系 xOy 中，一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$的图象由函数 $y=2x$ 的图象平移得到，且经过点（-

1,3）.

（1）求一次函数的解析式；

（2）当 $x>1$ 时，对于 x 的每一个值，函数 $y=mx$ 的值均大于函数 $y=kx+b$（$k\neq 0$）的值，直接写出 m 的取值范围.

27.如图，正方形 $ABCD$. 过点 B 作射线 BP，交 DA 的延长线于点 P. 点 A 关于直线 BP 的对称点为 E，连接 BE，AE，CE.其中 AE，CE 分别与射线 BP 交于点 G,H.



（1）依题意补全图形；

（2）设 $\angle ABP=\alpha$，$\angle AEB=$___（用含 α 的式子表示），$\angle AEC=$___°；

（3）若 $EH=BH$,用等式表示线段 AE 与 CE 之间的数量关系，并证明.

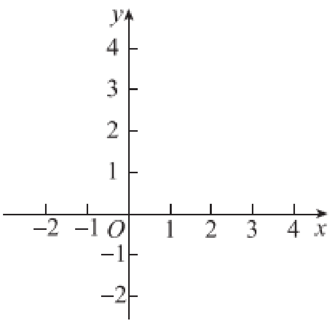
28. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于线段 MN 和点 P 作出如下定义：若点 M，N 分别是线段 PP_1，PP_2 的中点，连接 P_1P_2，我们称线段 P_1P_2 的中点 Q 是点 P 关于线段 MN 的“关联点”.

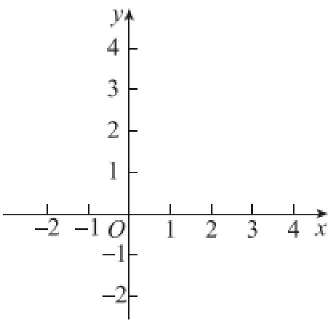
（1）已知点 M（2,2），点 P 关于线段 OM 的“关联点”是点 Q.

①若点 P 的坐标是（2,0），则点 Q 的坐标是___；

②若点 E 的坐标是（1,-1），点 F 的坐标是（3,-1）.点 P 是线段 EF 上任意一点，求线段 PQ 长的取值范围；

（2）点 A 是直线 l:$y=x+1$ 上的动点.在矩形 $ABCD$ 中，边 $AB\,/\!/\,x$ 轴，$AB=3$，$BC=2$. 点 P 是矩形 $ABCD$ 边上的动点，点 P 关于其所在边的对边的“关联点”是点 Q.过点 A 作 x 轴的垂线，垂足为点 G.设点 G 的坐标是（t，0）.当点 A 沿着直线 l 运动到点 A' 时，点 G 沿着 x 轴运动到点 G'（$t+m$，0），点 Q 覆盖的区域的面积 S 满足 $20\leq S\leq 30$，直接写出 m 的取值范围.





备用图

参考答案

一、选择题(本题共 16 分，每小题 2 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	B	A	D	B	C

二、填空题(本题共 16 分，每小题 2 分)

9. $x \geqslant 1$ 10. 15 11. -1 12.(5，4) 13.3 14. $\sqrt{5}$ 15. 1

16. ①②③

三、解答题(本题共 68 分，第 17 题 8 分，第 18-20 题，每小题各 5 分，第 21 题 6 分，第 22-26 题，每小题 5 分，第 27-28 题，每小题 7 分) 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.（1）解：$\left(\sqrt{12}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

$=2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$---2 分

$=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. --4 分

(2) $\left(2\sqrt{5}+4\right)\left(2\sqrt{5}-4\right)\div\left(\sqrt{8}\right)$

解：$\left(2\sqrt{5}+4\right)\left(2\sqrt{5}-4\right)\div\left(\sqrt{8}\right)$

$=\left[\left(2\sqrt{5}\right)^2-4^2\right]\div 2\sqrt{2}$ --2 分

$=\left(20-16\right)\div 2\sqrt{2}$

$=4\div 2\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}$.---4 分

18. 解：$\left(x-1\right)^2-2x+5$

$=x^2-2x+1-2x+5$

$=x^2-4x+6$

$=\left(x-2\right)^2+2$.---3 分

将 $x=2-\sqrt{3}$ 代入 $\left(x-2\right)^2+2$, 得 $\left(2-\sqrt{3}-2\right)^2+2$ =5.---------------------------------------5 分

注：若直接代入求值，代入后去掉 2 个括号正确 3 分，结果 2 分.

19. 证明：∵$BE \perp AC$ 于点 E，$DF \perp AC$ 于点 F，

∴$\angle AEB=\angle FCD=90°$. --1 分

∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

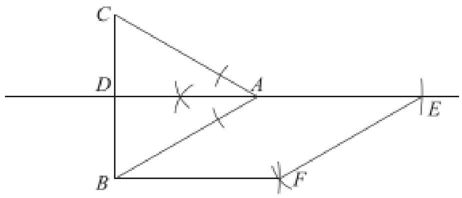
∴ $AB \parallel CD$，$AB=CD$. --2 分

∴ $\angle BAE=\angle DCF$. --3 分

∴ $\triangle ABE \cong \triangle CDF$（AAS）. --4 分

∴ $AE=CF$. --------------5 分

20. 解：（1）补全图形如图.



————————————————————————————————2 分

（2）四条边相等的四边形是菱形;30; 150-----------------------------5 分

21.解：（1）将（1，-1），（2，-7）代入 $y=kx+b$（$k\neq 0$），得

$$\begin{cases} k+b=-1, \\ 2k+b=-7. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k=-6, \\ b=5. \end{cases}$

∴$k=-6$，$b=5$. ------------------------2 分

（2）由（1）得 $y=-6x+5$.

当 $y=-10$ 时，$m=2.5$；

当 $x=3.5$ 时，$n=-16$. ------------------------4 分

（3）∵$k=-6<0$，

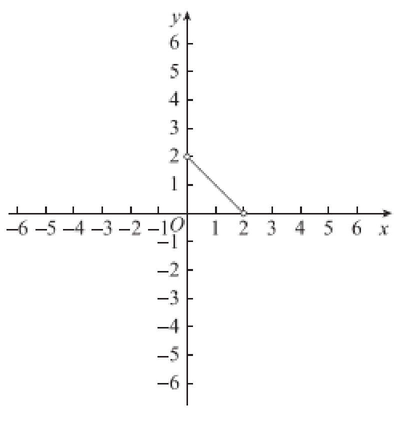
∴y 随着 x 的增大而减小.

∵当 $x=4$ 时，$y=-19$；当 $x=7$ 时，$y=-37$，

∴$-37\leq y\leq -19$.

∴气温 y 的变化范围是$-37\leq y\leq -19$. ---------------------6 分

22. 解：（1）画图如下.



---2 分

（2）∵$A(-3,0)$，

∴$OA=3$.

∵$S_{\triangle OPA}=6$，

∴$\frac{1}{2}\cdot OA\cdot|y_P|=6$. ---------3 分

∴$|y_P|=4$.

∴$y_P=\pm 4$.

将 $y_P=4$ 代入 $y=-x+2$，则 $x_P=-2$；

将 $y_P=-4$ 代入 $y=-x+2$，则 $x_P=6$.

综上所述，P_1（-2,4）, P_2（6, -4）. -----------------5 分

22.证明：方法一

∵BO 是斜边 AC 的中线，

∴$AO=CO$. ----------2 分

又∵$DO=BO$.

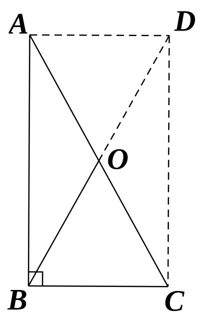
∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形. ------------3 分

∵$\angle ABC=90°$，

∴四边形 $ABCD$ 是矩形.

∴$BD=AC$. -------------------------4 分

∴$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$. ------------------5 分



方法二

∵BO 是斜边 AC 的中线，

∴$AO=CO$.------------------2 分

∴OD 是△ABC 的中位线.

∴$OD\parallel AB$.---------------3 分

∴$\angle ODC=\angle ABC$.

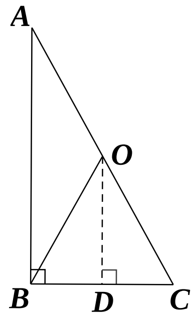
∵$\angle ABC=90°$，

∴$\angle ODC=90°$.

∴$OD\perp BC$.---------------4 分

∴$BO=CO$.

∴$BO=\frac{1}{2}AC$.-------------------5 分



24. 解：（1）527. ---------------------- 2 分

（2）18.--- 3 分

（3）①③.--- 5 分

25.解：（1）$y_1=26x+15(24-x)=11x+360$；

$y_2=25(20-x)+20(x+6)=-5x+620$.----- 3 分

（2）由题意可知，$0\le x\le 20$.

由 $y_1=y_2$. 得 $x=\frac{65}{4}$.

所以(1)中两个函数图象的交点的横坐标为$\frac{65}{4}$.

因为 y_1 随着 x 的增大而增大，y_2 随着 x 的增大而减小，

所以当 $x>\frac{65}{4}$ 时，$y_1>y_2$.

综上，x 的取值范围是 $\frac{65}{4}<x\le 20$.-------------------------5 分

26.解：（1）∵直线 $y=kx+b(k\neq 0)$由函数 $y=2x$ 的图象平移得到，

∴$k=2$.-------------1 分

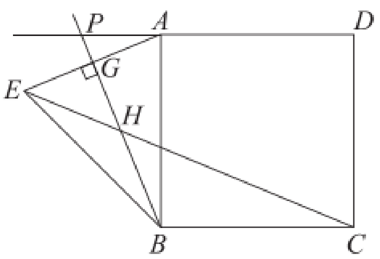
∴一次函数的解析式为 $y=2x+b$.

将（-1,3）代入 $y=2x+b$，得 $3=-2+b$, 解得 $b=5$.--------2 分

∴一次函数的解析式为 $y=2x+5$.　----------3 分

（2）$m\ge 7$.----------------5 分

27.解：（1）补全图形如下，



--2 分

（2）$\angle AEB=$ $\underline{90°-\alpha}$，$\angle AEC=$ $\underline{45}$ °.　　---------4 分

(3)结论：$CE=\left(\sqrt{2}+1\right)AE$..　--------------------5 分

证明：如图，作 $BF\perp CE$ 于点 F.

∵点 A 关于射线 BP 的对称点为点 E,

∴ $AE\perp BP, EG=\frac{1}{2}AE$.

∴$\angle BGE=90°, BE=BA$.

由（2）知$\angle AEC=45°$，

∴$\angle GHE=45°$.

∴$\triangle EGH$ 是等腰直角三角形.

由勾股定理得，$EH=\sqrt{2}EG$.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴$BA=BC$.

∴$BE=BC$.

∵$BF\perp CE$，

∴$\angle BFH=90°$, $EF=CF$.

∵$\angle EHG=\angle FHB$, $EH=BH$,

∴$\triangle EGH\cong\triangle BFH$（AAS）.

∴$EG=GH=BF=FH$.

∴$CE=2(EH+FH)=2\left(\sqrt{2}EG+EG\right)=2\left(\sqrt{2}+1\right)EG=\left(\sqrt{2}+1\right)AE$.-------------------------------7 分

28. 解：（1）①（0，2）；-------------------------1 分

②∵E（1,-1），F（3,-1），

∴点 E，点 F 关于 OM 的"关联点"点 E'(1，3)，点 F'（-1，3）.

当点 P 在线段 EF 上时，点 Q 在线段 $E'F'$ 上，且 $E'F'\parallel EF$.

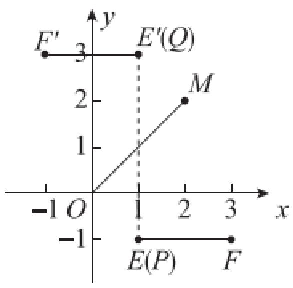


图 1

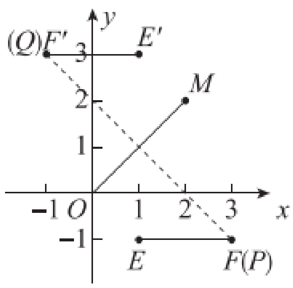


图 2

因此，如图 1，当点 P 与点 E 重合时，PQ 长取得最小值 4；

如图 2，当点 P 与点 F 重合时，PQ 长取得最大值 $4\sqrt{2}$；

综上所述，PQ 长的取值范围是：$4\le PQ\le 4\sqrt{2}$；-----5 分

（3）$-3\leqslant m\leqslant -2$ 或 $2\leqslant m\leqslant 3$.------7 分