

2023 北京高中合格考数学

(第二次)



第一部分 (选择题 共 60 分)

一、选择题：共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{0, 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()

- A. $\{0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{0, 2\}$ D. $\{1, 2\}$

2. 函数 $y = \log_2 x$ 的图象经过点 ()

- A. $(1, 0)$ B. $(1, 1)$ C. $(-1, 1)$ D. $(2, 2)$

3. 要得到函数 $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，只要将函数 $y = \cos x$ 的图象 ()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度
C. 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

4. 已知向量 $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-1, x)$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 x 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -1 C. 2 D. -2

5. 已知平面内的两个非零向量 \vec{a} , \vec{b} 满足 $\vec{a} = -3\vec{b}$, 则 \vec{a} 与 \vec{b} ()

- A. 相等 B. 方向相同 C. 垂直 D. 方向相反

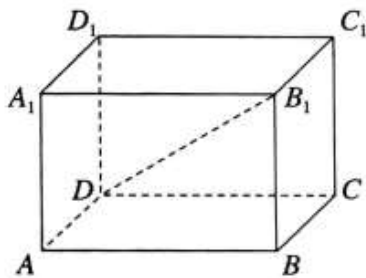
6. $\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \log_3 9 =$ ()

- A. -5 B. -1 C. 0 D. 1

7. 在复平面内，复数 $z = -2 + i$ 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

8. 如图，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AD = AA_1 = 2$, $AB = 2\sqrt{2}$, 则 $B_1D =$ ()



A.3 B. 4 C. 5 D. 6

9. 函数 $f(x) = 2^x - 2$ 的零点个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 不等式 $(x+3)(x-1) < 0$ 的解集是 ()

A. $\{x | -3 < x < 1\}$ B. $\{x | -1 < x < 3\}$
C. $\{x | x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$ D. $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$

11. 复数 $(2+i)^2 =$ ()

A. $4-3i$ B. $3-4i$ C. $4+3i$ D. $3+4i$

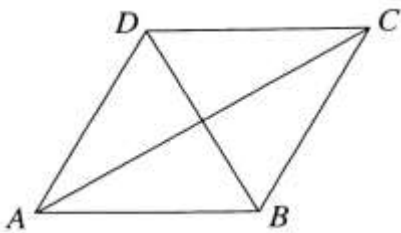
12. 已知 $x > 0$, 则 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

13. 甲、乙两人在罚球线进行投篮比赛, 甲的命中率为 0.7, 乙的命中率为 0.8, 甲、乙命中与否互不影响. 甲、乙两人各投篮 1 次, 那么“甲、乙两人都命中”的概率为 ()

A. 0.08 B. 0.14 C. 0.24 D. 0.56

14. 如图, 四边形 $ABCD$ 是菱形, 下列结论正确的是 ()



A. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$

15. 已知直线 l, m 和平面 α , 满足 $l // m, m \perp \alpha$, 则下列结论正确的是 ()

A. $l // \alpha$ B. $l \subset \alpha$ C. $l \perp \alpha$ D. l 是平面 α 的斜线

16. 已知 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\sin(-\alpha) =$ ()

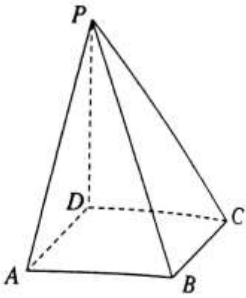
A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

17. 在核酸检测中, “10 合 1” 混采检测是指将 10 个人的样本混合在一个采集管中进行检测. 采集时, 将采集管发放给 10 人中的第一个人. 某同学参加 “10 合 1” 混采, 他拿到采集管的概率为 ()

A. $\frac{9}{10}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{10}$

18. “ $a > b > 0$ ” 是 “ $a^2 > b^2$ ” 的 ()

A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件



- (1) 求证: $AB \parallel$ 平面 PCD ;
 (2) 求证: $AB \perp$ 平面 PAD .

26. 阅读下面题目及其解答过程.

已知函数 $f(x) = |x-1| + |x+1|$.

- (1) 求证: 函数 $f(x)$ 是偶函数;
 (2) 求函数 $f(x)$ 的单调递增区间.

解: (1) 因为函数 $f(x)$ 的定义域是 ①,

所以 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $-x \in \mathbf{R}$.

又因为 $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1|$,

所以 $f(-x) =$ ②.

所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) - (x+1) = -2x$,

此时函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -1]$ 上单调递减.

当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) =$ ③.

当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x+1| =$ ④,

此时函数 $f(x)$ 在区间 ⑤ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $[1, +\infty)$.

以上题目的解答过程中, 设置了①~⑤五个空格, 如下的表格中为每个空格给出了两个选项, 其中只有一个正确, 请选出正确的选项, 并填写在相应的横线上 (只需填写“A”或“B”).

空格序号	选项	
①	(A) $[-1, +\infty)$	(B) \mathbf{R}
②	(A) $f(x)$	(B) $-f(x)$

③	(A) 2	(B)
④	(A) $2x$	(B) $-2x$
⑤	(A) $(-\infty, 1]$	(B) $[1, +\infty)$

27. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值及相应的 x 的值.

28. 已知数集 A 含有 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 个元素, 定义集合 $A^* = \{x + y \mid x, y \in A\}$.

(1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, 写出 A^* ;

(2) 写出一个集合 A , 使得 $A = A^*$;

(3) 当 $n = 4$ 时, 是否存在集合 A , 使得 $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$? 若存在, 写出一个符合条件的集合 A ; 若不存在, 说明理由.

参考答案

第一部分（选择题 共 60 分）

一、选择题：共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 【答案】B

【分析】由并集定义可求.

【详解】由题意， $A = \{x | x < 1\}$ ， $B = \{x | x > 2\}$ ，

所以 $A \cup B = \{x | x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$.

故选：B

2. 【答案】A

【分析】根据对数的运算求解即可.

【详解】根据对数的运算可知， $\log_2 1 = 0$ ， $\log_2 1 \neq 1$ ， $\log_2(-1)$ 无意义， $\log_2 2 = 1$ ，

所以函数 $y = \log_2(x-1)$ 的图象经过点 $(1, 0)$.

故选：A

3. 【答案】D

【分析】根据三角函数图象的相位变换可得.

【详解】由三角函数图象的相位变换可知，将函数 $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 的图象向右平移一个单位长度所得图象的解

析式为 $y = \sin(x - \frac{3\pi}{2}) = \cos x$.

故选：D

4. 【答案】C

【分析】利用平面向量垂直的坐标表示可求得实数 x 的值.

【详解】因为向量 $\vec{a} = (2, -1)$ ， $\vec{b} = (x, 2)$ ， $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + x = 0$ ，解得 $x = 2$.

故选：C

5. 【答案】D

【分析】根据向量的共线及模的关系确定选项即可.

【详解】因为两个非零向量 \vec{a} ， \vec{b} 满足 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ ，

所以 \vec{a}, \vec{b} 为共线反向向量，且模不相等，

所以 ABC 错误，D 正确.

故选：D

6. 【答案】B

【分析】根据指数幂的性质及对数的运算求解.

【详解】 $\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \log_3 9 = 1 - \log_3 3^2 = 1 - 2 = -1.$

故选：B

7. 【答案】B

【分析】由复数的几何意义得出答案.

【详解】复数 $-2 + i$ 对应的点坐标为 $(-2, 1)$ ，位于第二象限

故选：B

8. 【答案】B

【分析】根据长方体的性质求解.

【详解】在长方体中， $B_1D = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = \sqrt{AD^2 + AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4,$

故选：B

9. 【答案】A

【分析】由函数的单调性结合 $f(1) = 0$ 即可判断零点个数.

【详解】函数 $f(x) = 2^x - 2$ 是 \mathbb{R} 上的单调递增函数，且 $f(1) = 2 - 2 = 0,$

所以函数 $f(x) = 2^x - 2$ 只有一个零点，

故选：A.

10. 【答案】A

【分析】先解相应方程，然后根据二次函数开口方向判断解集即可.

【详解】解方程 $(x+3)(x-1) = 0$ 得 $x = -3$ 或 $x = 1,$

因为函数 $f(x) = (x+3)(x-1)$ 开口向上，

所以不等式 $(x+3)(x-1) < 0$ 的解集为 $\{x | -3 < x < 1\}.$

故选：A

11. 【答案】D

【分析】

根据复数的乘法运算可得答案.

【详解】 $(2+i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i.$

故选：D.

12. 【答案】D

【分析】直接由基本不等式运算即可.

【详解】因为 $x > 0$ ，所以 $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$ ，即 $x + \frac{4}{x}$ 的最小值为 4，

当且仅当 $x = 2 > 0$ 时，等号成立.

故选：D.

13. 【答案】D

【分析】根据题意，由相互独立事件的概率公式求解.

【详解】根据独立事件同时发生的概率公式可知，

“甲、乙两人都命中”的概率为 $P = 0.7 \times 0.8 = 0.56$ ，

故选：D

14. 【答案】C

【分析】根据向量相等的概念及向量的加法法则判断选项即可.

【详解】因为四边形 $ABCD$ 是菱形，

所以根据向量加法的平行四边形法则知， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ，

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ ，故 C 对 D 错；

因为向量方向不同，所以 $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{AD}$ ， $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{BD}$ ，故 AB 错误.

故选：C

15. 【答案】C

【分析】根据线面垂直的性质得解.

【详解】因为 $l // m$ ， $m \perp \alpha$ ，

所以 $l \perp \alpha$ ，

故选：C

16. 【答案】B

【分析】根据诱导公式求解.

【详解】因为 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ，所以 $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ，

故选：B

17. 【答案】D

【分析】根据古典概型求解.

【详解】因为某同学参加“10 合 1”混采，他在 10 人组中的位置是等可能的，

有 10 个位置可排，成为第一个人的可能性为 $\frac{1}{10}$ ，

所以他拿到采集管的概率为 $\frac{1}{10}$.

故选：D

18. 【答案】A

【分析】根据充分不必要条件的概念判断即可.

【详解】当 $a > b > 0$ 时， $a^2 > b^2$ ；当 $a^2 > b^2$ 时， $|a| > |b|$ ，不一定 $a > b > 0$ ，所以“ $a > b > 0$ ”

是“ $a^2 > b^2$ ”的充分不必要条件.

故选: A.

19. 【答案】 B

【分析】 由 $2 \in P, 3 \notin P$, 结合分段函数的解析式可得答案.

【详解】 由题意可知 $2 \in P, 3 \notin P$,

所以 $f(2) + f(3) = 1 + (-1) = 0$,

故选: B.

20. 【答案】 B

【分析】 根据题意算出各时间段的充电费用即可判断选项.

【详解】 由题知, 小王在 15: 00—18: 00 时段充电 0.5 小时, 费用为 $6.5 \times 0.5 \times 1.4 = 4.55$ 元;

在 18: 00—21: 00 时段充电 3 小时, 费用为 $6.5 \times 3 \times 1.6 = 31.2$ 元;

记在 21: 00—23: 00 时段充电时间为 x 小时, 费用为 $6.5x \times 1.4 = 9.1x$ 元.

综上, 小王应缴纳的充电费 $y = 4.55 + 31.2 + 9.1x = 9.1x + 35.75$,

因为 $0 < x \leq 0.5$, 所以 $35.75 < y \leq 40.3$.

故选: B

第二部分 (非选择题 共 40 分)

二、填空题: 共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分.

21. 【答案】 $\{x | x \neq -1\}$

【分析】 根据函数解析式有意义求解即可.

【详解】 由 $x+1 \neq 0$ 可得 $x \neq -1$,

所以函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 的定义域是 $\{x | x \neq -1\}$,

故答案为: $\{x | x \neq -1\}$

22. 【答案】 $(-5, 4)$

【分析】 根据向量加法的坐标运算求解.

【详解】 因为 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (-3, 1)$,

所以 $\vec{a} + 2\vec{b} = (1, 2) + (-6, 2) = (-5, 4)$,

故答案为: $(-5, 4)$

23. 【答案】 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【分析】 由二倍角的正弦公式求解.

【详解】 $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{2}}{2}$

24. 【答案】①②③

【分析】根据雷达图, 明显可得出甲、乙每月投资额的大小及波动幅度, 即可得出结论.

【详解】由雷达图可知, 12月份甲产品的月投资额低于乙产品的月投资额, 故①正确;

由雷达图可知, 该公司去年甲产品的月投资额的平均数在 25 万元附近, 比较稳定, 变化幅度小, 乙产品的月投资额的平均数明显小于 25 万元较多, 并且不稳定, 变化幅度大, 故②③正确.

故答案为: ①②③

三、解答题: 共 4 小题, 共 28 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

25. 【答案】(1) 证明见详解

(2) 证明见详解

【分析】(1) 因为 $AB \parallel CD$, 由线面平行判定定理得证;

(2) 由题意得 $AB \perp AD$, $AB \perp PD$, 根据线面垂直的判定定理得证.

【小问 1 详解】

由题意, 底面 $ABCD$ 是矩形, 即 $AB \parallel CD$,

$CD \subset$ 平面 PCD , $AB \not\subset$ 平面 PCD , 所以 $AB \parallel$ 平面 PCD ;

【小问 2 详解】

由题意, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AB \perp PD$,

又底面 $ABCD$ 是矩形, 即 $AB \perp AD$,

$AD \cap PD = D, AD \subset$ 平面 PAD , $PD \subset$ 平面 PAD ,

所以 $AB \perp$ 平面 PAD .

26. 【答案】①B②A③A④A⑤B

【分析】①由具体函数的定义域求解; ②由 $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = f(x)$ 求解; ③由 $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$ 求解; ④ $f(x) = |x-1| + |x+1| = x-1 + x+1 = 2x$ 求解; ⑤由一次函数的单调性判断.

【详解】解: ①因为 $f(x) = |x-1| + |x+1|$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ; 故答案为: B.

②因为 $f(-x) = |-x-1| + |-x+1| = |x+1| + |x-1| = f(x)$, 故答案为: A.

③因为 $f(x) = |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$, 故答案为: A.

④因为 $f(x) = |x-1| + |x+1| = x-1 + x+1 = 2x$, 故答案为: A;

⑤因为当 $x \geq 1$ 时, $f(x) = 2x$, 所以函数是 $[1, +\infty)$ 上的增函数, 故答案为: B.

27. 【答案】(1) π

(2) $2, x = \frac{\pi}{6}$

【分析】(1) 根据正弦型函数的周期公式得解；

(2) 根据自变量的取值范围求出 $2x + \frac{\pi}{6}$ 的范围，再由正弦函数求解即可.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

所以周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$,

即函数最小正周期为 π .

【小问 2 详解】

因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$, 所以 $-\frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$,

所以 $-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, $-2 \leq f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值为 2,

此时 $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即 $x = \frac{\pi}{6}$.

28. 【答案】(1) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) $\{0\}$

(3) 不存在，理由见解析.

【分析】(1) 根据集合的新定义，写出 A^* 中元素即可得解；

(2) 根据条件分析集合中元素即可得解；

(3) 根据题意可得不存在，利用反证法证明即可.

【小问 1 详解】

因为 $A = \{1, 2, 3\}$, $A^* = \{x + y | x, y \in A\}$,

所以 $1+1=2, 1+2=3, 1+3=4, 2+2=4, 2+3=5, 3+3=6$ 为 A^* 中元素，

故 $A^* = \{x + y | x, y \in A\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

【小问 2 详解】

取 $A = \{0\}$, 此时 $A^* = \{x + y | x, y \in A\} = \{0\}$,

满足 $A = A^*$.

【小问 3 详解】

当 $n = 4$ 时, 不存在集合 A , 使得 $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$.

(反证法)

假设 $n = 4$ 时, 存在集合 A , 使得 $A^* = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10\}$,

不妨设 $A = \{a, b, c, d\}$, 且 $a < b < c < d$,

则 $2a < a + b < a + c < b + c < b + d < c + d < 2d$,

所以 $2a, a + b, a + c, b + c, b + d, c + d, 2d$ 为 A^* 中 7 个不同的元素,

所以 $2a = 2, a + b = 3, a + c = 4, b + c = 6, b + d = 7, c + d = 8, 2d = 10$,

由 $2a = 2, a + b = 3, a + c = 4$ 解得 $a = 1, b = 2, c = 3$.

此时, $b + c = 5 \in A^*$ 与 $5 \notin A^*$ 矛盾,

所以假设不成立,

故不存在这样的集合 A .