2022 北京三帆中学初二（上）期中

数　　学

一.选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

1. 对称现象无处不在，下列汉字是轴对称图形　是（　　）

A. 吾　　B. 爱　　C. 三　　D. 帆

2. 下列运算正确的是（　　）

A. $m^2 \cdot m^3 = m^6$　　B. $\left(m^3\right)^2 = m^6$

C. $m\left(-m+2\right) = m^2 + 2m$　　D. $m^2 + m^3 = 2m^6$

3. 若一个三角形的两边长分别是3cm，7cm，则它的第三边长不可能是（　　）

A. 3cm　　B. 5cm　　C. 7cm　　D. 9cm

4. 下列说法错误的是（　　）

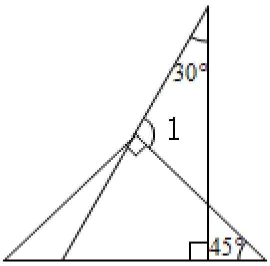
A. 直角三角形两锐角互余

B. 有三组角分别相等的两个三角形全等

C. 与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上

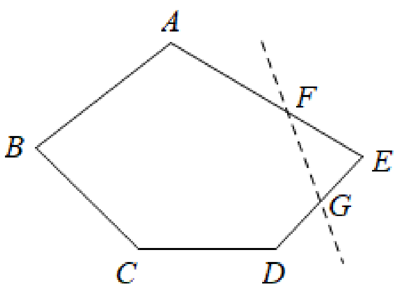
D. 角平分线上的点到角两边的距离相等

5. 一副三角板按如图方式放置，则∠1 的度数是（　　）



A. 105°　　B. 135°　　C. 150°　　D. 165°

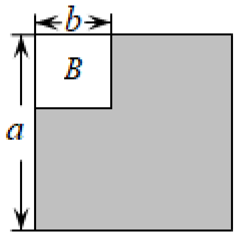
6. 如图，将一个五边形 *ABCDE* 沿虚线裁去一个角后得到的多边形 *ABCDGF* 的内角和为（　　）



A. 180°　　B. 360°　　C. 540°　　D. 720°

7. 如图，将一个边长为 b 的正方形 B 放在一个边长为 a 的大正方形 A 中，则阴影部分的面积计算可以用等

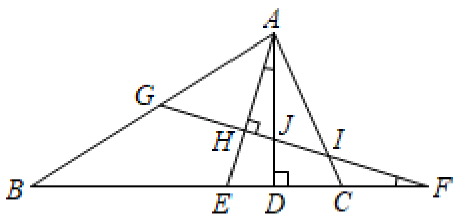
式表示为（　　）



A. $(a-b)b+a(a-b)=a^2-b^2$　　B. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

C. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$　　D. $a(a-b)=a^2-ab$

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，AD，AE 分别是 $\triangle ABC$ 的高线和角平分线，$FG\perp AE$ 于点 H，交 AD 于点 J，下列结论：① $\angle DAE=\angle F$；② $\angle FJD=\angle CAE+\angle B$；③ $\angle ACB=\angle AGH$；④ $\angle F=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle B)$ 中，正确的有（　　）



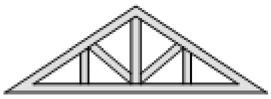
A. ①②　　B. ①②④　　C. ②③④　　D. ①④

二、填空题（本题共 16 分，每题 2 分）

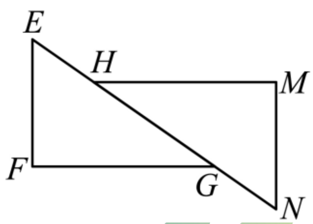
9. 若（x－2）^{0}=1，则 x 应满足条件__________.

10. 一个多边形 内角和跟它的外角和相等，则这个多边形是__________边形.

11. 工程建筑中经常采用三角形的结构，如图的屋顶钢架，其中的数学道理是__________.

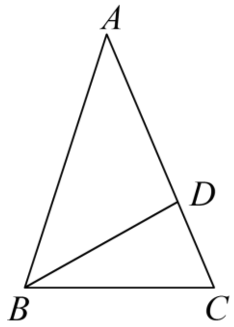


12. 如图，$\triangle EFG\cong\triangle NMH$，$EH=1.1\text{cm}$，$NH=3.3\text{cm}$，则 $HG=$_____cm.

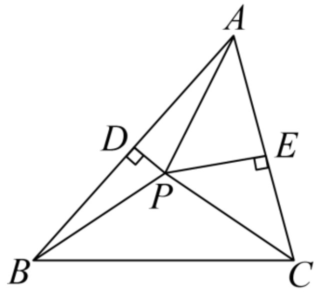


13. 若 $a+b=-1$，则 $a^2+2ab+b^2=$_____.

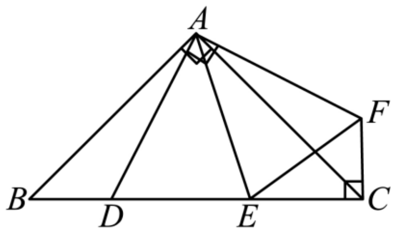
14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$\angle A=40^\circ$，$AD=BD$，则 $\angle DBC=$_____°.



15. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=56^{\circ}$，PD 垂直平分 AB，PE 垂直平分 AC，则 $\angle PBC$ 的度数为 _____°．



16. 如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$AB=AC$，D，E 是斜边 BC 上两点，且 $\angle DAE=45^{\circ}$，过点 A 作 $AF\perp AD$，垂足是 A，过点 C 作 $CF\perp BC$，垂足是 C，交 AF 于点 F，连接 EF，下列结论：①$\triangle ABD\cong\triangle ACF$；②$DE=EF$；③若 $S_{\triangle ADE}=10$，$S_{\triangle CEF}=4$，则 $S_{\triangle ABC}=24$；④$BD+CE=DE$．其中正确的是 _____.



三、计算题（本题共 16 分，每小题 8 分）

17 计算：

（1）$3x^{2}y\cdot\left(-2xy^{3}z\right)$；

（2）$\left(9x^{3}-12x^{2}+6x\right)\div 3x$．

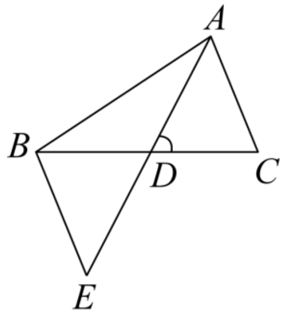
18. 计算：

（1）$(-xy)^{3}\div x^{2}y+2y(xy-1)$；

（2）$(x+3)(x-3)+(2x-1)(x+5)$．

四、解答题（本题共 52 分，第 19-23 题每题 6 分，24、25 题每题 7 分，26 题 8 分）

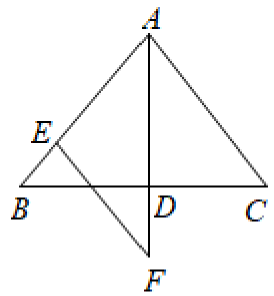
19. 如图，AD 是 $\triangle ABC$ 中线，$BE\,//\,AC$ 交 AD 的延长线于点 E，求证：$DE=AD$．



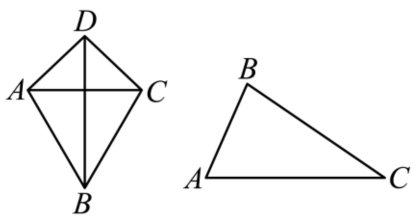
20. 先化简，再求值.

化简$\left[a^3+3a^2b-a\left(a^2+2ab+b^2\right)\right]\div ab$，并求$a=2021$，$b=2022$时该式的值.

21. 如图，在$\triangle ABC$中，AB=AC，$AD\perp BC$于点D．若点E在边AB上，EF // AC交AD的延长线于点F．求证：$AE=FE$．



22. 如图一，四边形$ABCD$中，$AD=CD$，AB=CB．我们把这种两组邻边分别相等的四边形叫做“筝形”．



图一　　　　图二

小张同学想到了一种画出筝形的方法如下，请你和他一起完成作图和说理：

（1）如图二，先任意画一个$\triangle ABC$；

（2）作$\angle ABC$的角平分线BD交AC于点D；（请利用圆规和无刻度的直尺，尺规作图，保留作图痕迹）

（3）过点D作$DE\perp AB$于点E，$DF\perp BC$于点F；

（4）根据角平分线的性质得 ______=______；

进而可以证明△______≌△______，

根据全等三角形性质可以得到则 ______=______；

四边形 ______为筝形．

23. 小李同学在计算下列式子时发现了一些规律．

（1）请观察并完成填空．

$1\times3+1=2^2$；

$2\times4+1=3^2$；

$3\times5+1=4^2$；

……

请你根据规律写出第 n 个式子：____.

（2）接着小李又发现了下面算式的结果也是平方数，请你完成计算并填空．

$1\times2\times3\times4+1=(1\times4+1)^2$；

$2\times3\times4\times5+1=(2\times5+1)^2$；

$3\times4\times5\times6+1=(3\times6+1)^2$；

对第 n 个式子进行猜想得 $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=$____.

下面开始对猜想进行证明．

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=n(n+3)[\_\_\_\_]+1$（依据：乘法交换律、乘法结合律）

$=(n^2+3n)(\_\_\_\_)+1$

下面请继续完成猜想的证明．

24．解决几何问题时，不一定能够求出每个角的度数，但依据多边形内角和可以求出它们的和，这时整体代换的思想对于解题的帮助是巨大的，下面看这样一个问题．

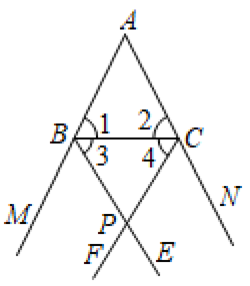


图1

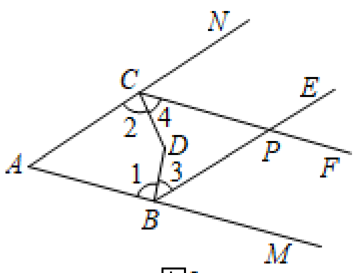


图2

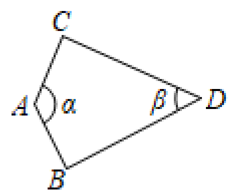


图3

（1）如图1，在 $\triangle ABC$ 中，BE，CF 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle BCA$ 的外角平分线，BE，CF 交于一点 P，已知 $\angle A=\alpha$，求 $\angle BPC$ 的度数（用含有 α 的式子表示）．

$\because \angle A=\alpha$，$\triangle ABC$；

$\therefore \angle1+\angle2=180°-\angle A=180°-\alpha$；

$\because BE$，CF 分别是 $\angle ABC$ 和 $\angle BCA$ 的外角平分线；

$\therefore \angle3=\frac{1}{2}\angle MBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle1)$，$\angle4=\frac{1}{2}\angle NCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle2)$，

$\because \triangle BCP$，

$\therefore \angle BPC =$____（三角形内角和为180°）

$=180^\circ-\left[\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle 1\right)+\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle 2\right)\right]$

$=180^\circ-\left[180^\circ-\frac{1}{2}\left(\angle 1+\angle 2\right)\right]$

$=$____（用含有α 式子表示）

（2）如图2，在四边形$ABDC$中，BE，CF分别是$\angle ABD$和$\angle ACD$的外角平分线，BE，CF交于一点P，已知$\angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$ $(\alpha<\beta)$，求$\angle BPC$的度数（用含有α和β的式子表示）.

$\because \angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$，四边形$ABDC$；

$\therefore \angle 1+\angle 2=360°-(\angle A+\angle D)=360°-(\alpha+\beta)$；

$\because BE$，CF分别是$\angle ABD$和$\angle ACD$的外角平分线；

$\therefore \angle 3=\frac{1}{2}\angle MBD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 1$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle NCD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 2$；

$\because$四边形$ACPB$，

$\therefore \angle BPC=360^\circ-\angle A-(\angle 2+\angle 4)-(\angle 1+\angle 3)$

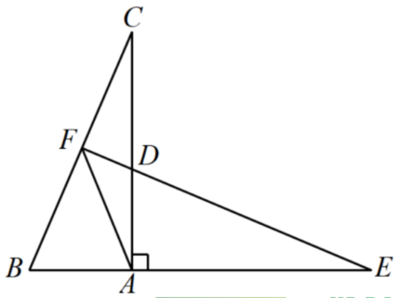
$=360°-\angle A-(\angle 1+\angle 2)-(\angle 3+\angle 4)$

$=360^\circ-\angle A-(\angle 1+\angle 2)-\left[180^\circ-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)\right]$

$=$____（用含有α和β的式子表示）

（3）若（2）中的条件变为$\beta<\alpha$，补全图形，并直接写出$\angle BPC=$____（用含有α和β的式子表示）.

25. 已知：如图，在$\triangle ABC$中，$\angle CAB=90°$，点D为AC上的一点，$AD=AB$，点E为BA延长线上一点且$AE=AC$，连接ED并延长交BC于点F，连结AF.



（1）求证：$\angle FCA=\angle AEF$；

（2）作A点关于BC的对称点M，分别连接AM，FM.

①依题意补全图形；

②用等式表示EF，CF，AM之间的数量关系并证明.

26. 给出如下定义：如图1，已知$\angle RST=90°$，$\angle PMQ=45°$，直线l垂直平分线段MS，若$\angle PMQ$关于直线l的轴对称图形G完全落在$\angle RST$内部（G的两边不与$\angle RST$的边重合），则称$\angle PMQ$是$\angle RST$的

内含对称半角.

在平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $OABC$ 四个顶点的坐标分别为 $O(0,0)$， $A(0,4)$， $B(4,4)$， $C(4,0)$， $M(m,0)$ 为 x 轴负半轴上一点，射线 MP 绕点 M 逆时针旋转 $45°$ 到达 MQ 的位置，形成 $\angle PMQ$.

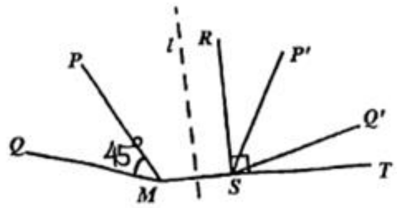


图 1

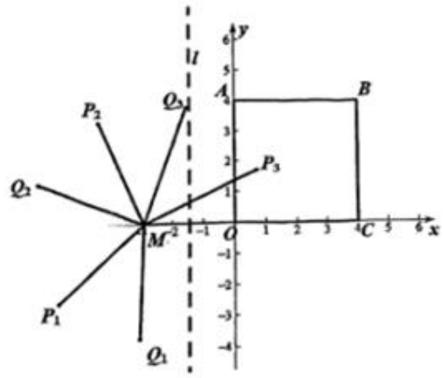


图 2

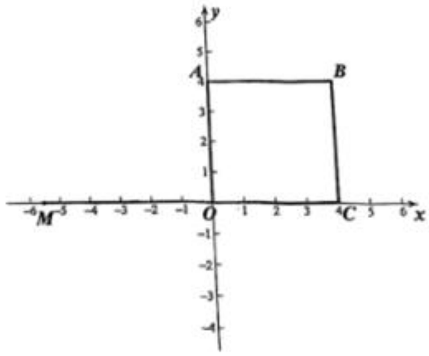


图 3

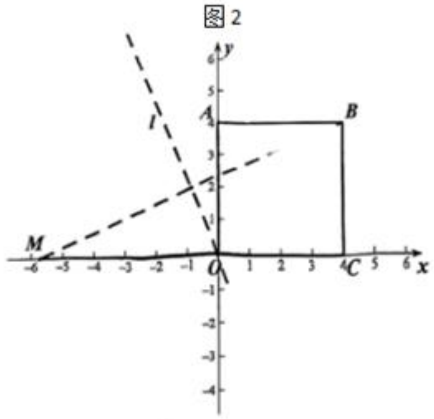
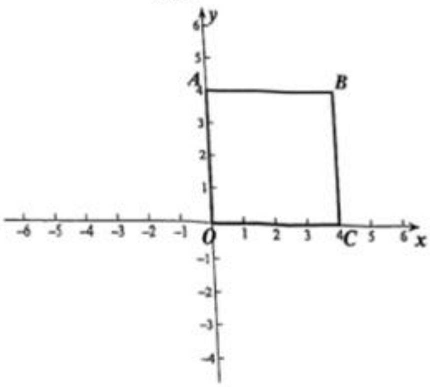


图 4



备用图

（1）如图 2，直线 l 垂直平分线段 OM ， $\angle P_1MQ_1=\angle P_2MQ_2=\angle P_3MQ_3=45°$ ，其中____________是 $\angle AOC$ 的内含对称半角.

（2）若 $\angle PMQ$ 是 $\angle OCB$ 的内含对称半角，请在图 3 中画出符合题意的一个 $\angle PMQ$.

（3）如图 4，若直线 l 经过原点，设 $\angle PMO=\alpha$ ，当 α 为何值时 $\angle PMQ$ 是 $\angle ABC$ 的内含对称半角？请直接写出 α 的范围：________；

（4）当 m 为何值时， $\angle OAB$ 的内含对称半角（ M 点除外）位于 x 轴下方？请直接写出 m 的范围：__________.

参考答案

一.选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

1. 【答案】C

【解析】

【分析】根据如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴进行分析即可．

【详解】解：A，B，D 选项中的方块字都不能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以不是轴对称图形；

C 选项中的方块字能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以是轴对称图形；

故选：C．

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．

2. 【答案】B

【解析】

【分析】直接利用单项式乘以多项式和幂的乘方运算法则、合并同类项法则分别计算得出答案．

【详解】解：A、$m^2 \cdot m^3 = m^5 \neq m^6$，故此选项不符合题意；

B、$\left(m^3\right)^2 = m^6$，正确，故此选项不符合题意；

C、$m(-m+2) = -m^2 + 2m \neq m^2 + 2m$，故此选项不符合题意；

D、$m^2 + m^3$，不是同类项无法合并，故此选项不符合题意；

故选：B．

【点睛】此题主要考查了单项式乘以多项式和幂的乘方运算、合并同类项，正确掌握相关运算法则是解题关键．

3. 【答案】A

【解析】

【分析】根据在三角形中任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边．即可求解．

【详解】解：设第三边长为 $x$cm，

根据三角形的三边关系可得：$7-3 < x < 7+3$，

解得：$4 < x < 10$，

故选项中不满足条件的只有 3cm．

故选：A．

【点睛】此题主要考查了三角形的三边关系，关键是掌握第三边的范围是：大于已知的两边的差，而小于两边的和．

4. 【答案】B

【解析】

【分析】根据角平分线的性质定理，直角三角形的性质，垂直平分线的性质，全等三角形的判定一一判断即可.

【详解】解：A、直角三角形两锐角互余，正确，该选项不符合题意；

B、有三组角分别相等的两个三角形不一定全等，原说法错误，该选项符合题意；

C、与线段两个端点距离相等的点在这条线段的垂直平分线上，正确，该选项不符合题意；

D、角平分线上的点到角两边的距离相等，正确，该选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了角平分线的性质定理，直角三角形的性质，垂直平分线的性质，全等三角形的判定．熟练掌握相关的性质是解题的关键.

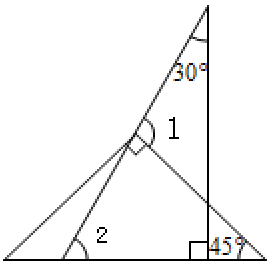
5. 【答案】A

【解析】

【分析】直接利用三角形的外角性质即可求解.

【详解】解：$\because \angle 2=90^\circ-30^\circ=60^\circ$，

$\therefore \angle 1=60^\circ+45^\circ=105^\circ$，



故选：A.

【点睛】本题考查了三角形的外角性质，掌握“三角形的任意一个外角等于和它不相邻的两个内角之和”是解题的关键.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】根据 n 边形的内角和公式 $(n-2)\cdot 180^\circ$ 求解即可.

【详解】解：将一个五边形 $ABCDE$ 沿虚线裁去一个角后得到的多边形 $ABCDGF$ 的边数是 6，

则 $(6-2)\cdot 180^\circ=720^\circ$，

故选：D.

【点睛】本题考查了多边形外角与内角．此题比较简单，熟记多边形的内角和公式是解题的关键.

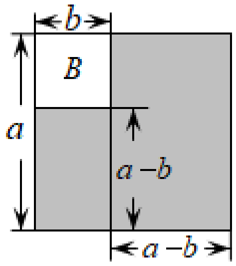
7.【答案】A

【解析】

【分析】阴影部分面积等于大正方形的面积减去小正方形的面积，也可以分解成两个长方形的面积和，建立等式即可.

【详解】解：阴影部分面积可以表示为：a^2-b^2，

也可表示为：$(a-b)b+a(a-b)$，



所以，得到等式：$(a-b)b+a(a-b)=a^2-b^2$，

故选：A．

【点睛】本题考查了平方差公式的几何背景，注意几次分割后边的变化情况是关键，属于基础题．

8. 【答案】B

【解析】

【分析】由等角的余角相等可判断①正确；由三角形的外角性质以及角平分线的定义得到 $\angle AEF=\angle B+\angle BAE=\angle B+\angle CAE$，再由等角的余角相等得到 $\angle AEF=\angle FJD$，可判断②正确；证明 $\triangle GAH\cong\triangle IAH(\text{ASA})$，推出 $\angle AGH=\angle AIH=\angle FIC$，得到 $\angle ACB=\angle F+\angle FIC>\angle AGH$ $\angle AEF=\angle FJD$，可判断③不正确；由三角形的外角性质得到 $\angle AGH=\angle B+\angle F$，$\angle ACB=\angle FIC+\angle F=\angle AGH+\angle F$，据此即可判断④正确．

【详解】解：由题意得 $\angle AHJ=\angle ADC=90^\circ$，$\angle AJH=\angle FJD$，

$\therefore \angle DAE=\angle F$，故①正确；

$\because AE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle BAE=\angle CAE$，

$\therefore \angle AEF=\angle B+\angle BAE=\angle B+\angle CAE$，

又$\because \angle AEF+\angle F=90^\circ=\angle F+\angle FJD$，

$\therefore \angle AEF=\angle FJD$，

$\therefore \angle FJD=\angle CAE+\angle B$，故②正确；

$\because AE$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，$FG\perp AE$，

$\therefore \angle GAH=\angle IAH$，$AH=AH$，$\angle GHA=\angle IHA=90^\circ$，

$\therefore \triangle GAH\cong\triangle IAH(\text{ASA})$，

$\therefore \angle AGH=\angle AIH$，则 $\angle AGH=\angle AIH=\angle FIC$，

$\because \angle ACB=\angle F+\angle FIC>\angle AGH$，故③不正确；

$\because \angle AGH=\angle AIH=\angle FIC$，

$\therefore \angle AGH=\angle B+\angle F$，$\angle ACB=\angle FIC+\angle F=\angle AGH+\angle F$，

$\therefore \angle ACB=\angle B+2\angle F$

$\therefore \angle F=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle B)$，故④正确；

综上，①②④正确；

故选：B．

【点睛】本题考查了三角形的外角性质，垂直的定义，角平分线定义，全等三角形的判定和性质等知识，正确识别图形，理清角之间的和差关系是解决问题的关键．

二、填空题（本题共 16 分，每题 2 分）

9. 【答案】$x\neq2$

【解析】

【分析】根据任何非 0 数的 0 次幂等于 1 进行解答即可．

【详解】若（x－2）^{0}=1，则 x 应满足 x－2≠0，

即 $x\neq2$，

故本题答案为：$x\neq2$．

【点睛】考核知识点：零指数幂定义．

10. 【答案】四

【解析】

【分析】根据多边形的内角和等于（n－2）•180°、外角和等于 360°，据此列方程求解即可．

【详解】解：设多边形的边数是 n，根据题意得，

（n－2）•180°＝360°，

解得 n＝4，

∴这个多边形为四边形．

故答案为：四．

【点睛】本题主要考查了多边形的内角和公式与外角和定理，掌握多边形内角和公式以及多边形外角和为 360° 是解答本题的关键．

11. 【答案】三角形具有稳定性

【解析】

【分析】根据三角形具有稳定性，即可求解．

【详解】解：工程建筑中经常采用三角形的结构，如屋顶钢架，其中的数学道理是三角形具有稳定性，

故答案为：三角形具有稳定性．

【点睛】本题主要考查了三角形，熟练掌握三角形具有稳定性是解题的关键．

12. 【答案】2.2

【解析】

【分析】由$\triangle EFG\cong\triangle NMH$，根据全等三角形的性质得到$EG=NH$，根据线段的和差计算即可得到结果．

【详解】解：$\because \triangle EFG\cong\triangle NMH$，

$\therefore EG=NH$，

$\therefore EH+HG=HG+NG$，

$\therefore EH=NG$，

$\because EH=1.1\text{cm}$，

$\therefore NG=1.1\text{cm}$，

$\because NH=3.3\text{cm}$，

$\therefore HG=NH-NG=3.3-1.1=2.2(\text{cm})$．

故答案为：2.2．

【点睛】本题主要考查了全等三角形全等的性质，熟练找出两个全等三角形的对应边是解此题的关键．

13. 【答案】1

【解析】

【分析】先将$a^2+2ab+b^2$变形为$(a+b)^2$，再整体代入计算即可求解．

【详解】解：$\because a+b=-1$，

$\therefore a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=(-1)^2=1$．

故答案为：1．

【点睛】本题考查了因式分解的应用，能正确根据完全平方公式进行变形是解此题的关键．

14. 【答案】30

【解析】

【分析】根据等腰三角形的等边对等角求角的度数即可．

【详解】解：$\because \mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，$\angle A=40^\circ$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=70^\circ$，

$\because AD=BD$，

$\therefore \angle ABD=\angle A=40^\circ$，

$\therefore \angle DBC=\angle ABC-\angle ABD=30^\circ$，

故答案为：30．

【点睛】本题考查等腰三角形的性质及三角形的内角和定理，熟练掌握等腰三角形的等边对等角求角的度数是解答的关键．

15. 【答案】34

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的性质和等腰三角形的性质可得到$\angle PBA=\angle PAB$，$\angle PAC=\angle PCA$，$\angle PBC=\angle PCB$，再根据三角形的内角和定理进行计算求解即可．

【详解】解：$\because PD$垂直平分AB，PE垂直平分AC，

$\therefore AP=BP$，$AP=PC$，

$\therefore AP=BP=PC$，

$\therefore \angle PBA=\angle PAB$， $\angle PAC=\angle PCA$， $\angle PBC=\angle PCB$，

$\because \angle BAC+\angle ABC+ACB=180^{\circ}$

$\therefore 2\angle PAB+2\angle PAC+2\angle PBC=180^{\circ}$，即 $2\left(\angle PAB+\angle PAC\right)+2\angle PBC=180^{\circ}$，

$\because \angle PAB+\angle PAC=\angle BAC=56^{\circ}$，

$\therefore 2\angle PBC=180^{\circ}-2\times 56^{\circ}=68^{\circ}$，

$\therefore \angle PBC=\frac{1}{2}\times 68^{\circ}=34^{\circ}$

故答案为：34．

【点睛】本题考查线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质、三角形的内角和定理，熟练掌握线段垂直平分线的性质和等腰三角形的性质是解答的关键．

16. 【答案】①②③

【解析】

【分析】先根据垂直定义和等角的余角相等证得 $\angle BAD=\angle CAF$， $\angle B=\angle ACF$，再利用 ASA 可判断①正确；再证明 $\triangle ADE\cong\triangle AFE$ 可判断②正确；利用全等三角形的面积相等可判断③正确；根据全等三角形的性质和三角形的三边关系可判断④错误．

【详解】解：$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^{\circ}$， $AB=AC$，

$\therefore \angle B=\angle ACB=45^{\circ}$， $\angle BAD+\angle DAC=90^{\circ}$，

$\because AF\perp AD$，

$\therefore \angle CAF+\angle DAC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BAD=\angle CAF$，

$\because CF\perp BC$，

$\therefore \angle ACF=90^{\circ}-\angle ACB=45^{\circ}$，则 $\angle B=\angle ACF$，

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 中，

$$\begin{cases}\angle BAD=\angle CAF\\ AB=AC\\ \angle B=\angle ACF\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACF\left(ASA\right)$，故①正确；

$\therefore AD=AF$，

$\because \angle DAE=45^{\circ}$， $AF\perp AD$，

$\therefore \angle FAE=90^{\circ}-\angle DAE=45^{\circ}=\angle DAE$，

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AFE$ 中，

$$\begin{cases}AD=AF\\ \angle DAE=\angle FAE\\ AE=AE\end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFE(SAS)$，

$\therefore DE=EF$，故②正确；

$\because \triangle ADE \cong \triangle AFE$，$\triangle ABD \cong \triangle ACF$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACF}$，$S_{\triangle ADE}=S_{\triangle AFE}$，$BD=CF$，$DE=EF$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AEC}$

$=S_{\triangle ACF}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AEC}$

$=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle AFE}+S_{\triangle CEF}$

$=2S_{\triangle ADE}+S_{\triangle CEF}$

$=2\times 10+4$

$=24$，故③正确；

$\because \triangle CEF$ 中，$CF+CE>EF$

$\therefore BD+CE>DE$，

故④错误，

综上，正确的是①②③，

故答案为：①②③.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质、全等三角形的判定与性质、三角形的三边关系、等角的余角相等等知识，熟练掌握全等三角形的判定与性质，证明$\triangle ADE \cong \triangle AFE$是解答的关键.

三、计算题（本题共 16 分，每小题 8 分）

17. 【答案】（1）$-6x^3y^4z$

（2）$3x^2-4x+2$

【解析】

【分析】（1）根据单项式乘以单项式的运算法则求解即可；

（2）根据多项式除以单项式的运算法则求解即可.

【小问 1 详解】

解：$3x^2y\cdot(-2xy^3z)$

$=-6x^3y^4z$；

【小问 2 详解】

解：$(9x^3-12x^2+6x)\div 3x$

$=9x^3\div 3x-12x^2\div 3x+6x\div 3x$

$=3x^2-4x+2$.

【点睛】本题考查单项式乘以单项式、多项式除以单项式，熟练掌握运算法则是解答的关键.

18. 【答案】（1）xy^2-2y

（2）$3x^2+9x-14$

【解析】

【分析】（1）利用积的乘方、单项式除以单项式和单项式乘以多项式法则去掉括号，再合并同类项即可得解；

（2）利用平方差公式和多项式乘以多项式法则去掉括号，再合并同类项即可得解．

【小问 1 详解】

解：$(-xy)^3\div x^2y+2y(xy-1)$

$=-x^3y^3\div x^2y+2xy^2-2y$

$=-xy^2+2xy^2-2y$

$=xy^2-2y$；

【小问 2 详解】

解：$(x+3)(x-3)+(2x-1)(x+5)$

$=x^2-9+2x^2+10x-x-5$

$=3x^2+9x-14$．

【点睛】本题考查整式的混合运算，熟练掌握运算法则是解题的关键．

四、解答题（本题共 52 分，第 19-23 题每题 6 分，24、25 题每题 7 分，26 题 8 分）

19. 【答案】见解析

【解析】

【分析】证明$\triangle ACD\cong\triangle EBD(\text{AAS})$即可得出结论．

【详解】证明：$\because BE\parallel AC$，

$\therefore \angle ACD=\angle DBE$，$\angle CAD=\angle BED$．

$\because AD$是$\triangle ABC$的中线，

$\therefore CD=BD$，

$\therefore \triangle ACD\cong\triangle EBD(\text{AAS})$，

$\therefore DE=AD$．

【点睛】本题考查了全等三角形的判定与性质，证明三角形全等是解题的关键．

20. 【答案】$a-b$，-1

【解析】

【分析】先根据整式的混合运算法则和运算顺序化简原式，再代值求解即可．

【详解】解：$\left[a^3+3a^2b-a\left(a^2+2ab+b^2\right)\right]\div ab$

$=\left(a^3+3a^2b-a^3-2a^2b-ab^2\right)\div ab$

$=\left(a^2b-ab^2\right)\div ab$

$=a-b$，

当 $a=2021$， $b=2022$，

原式 $=2021-2022=-1$．

【点睛】本题考查整式的四则混合运算、代数式求值，熟练掌握运算法则和运算顺序是解答的关键．

21. 【答案】见解析

【解析】

【分析】由等腰三角形的性质得出 $\angle BAF=\angle CAF$， 由平行线的性质得出 $\angle F=\angle CAF$， 则可得出结论．

【详解】证明：$\because$ $AB=AC$，$AD\perp BC$，

$\therefore \angle BAF=\angle CAF$，

$\because EF\parallel AC$，

$\therefore \angle F=\angle CAF$，

$\therefore \angle F=\angle BAF$，

$\therefore AE=FE$．

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定和性质，平行线的性质，正确的识别图形是解题的关键．

22. 【答案】（1）图见解析

（2）图见解析　　（3）图见解析

（4） DE， DF， $\triangle BDE$， $\triangle BDF$， BE， BF， $BEDF$

【解析】

【分析】（1）根据要求画三角形即可；

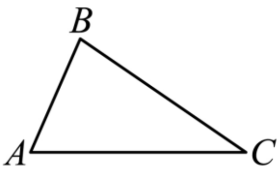
（2）根据尺规作图-作角平分线的方法步骤画图即可；

（3）按要求画出对应的垂线即可；

（4）根据角平分线的性质证得 $DE=DF$， 再利用 HL 证明 $\triangle BDE\cong\triangle BDF$， 进而证得 $BE=BF$， 再根据“筝形”的定义可得结论．

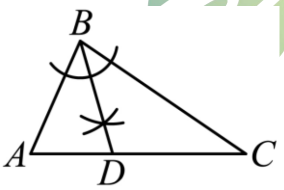
【小问 1 详解】

解：如图， $\triangle ABC$ 即为所求作；



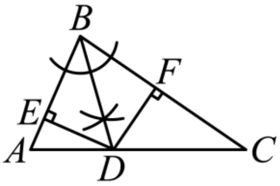
【小问 2 详解】

解：如图，射线 BD 即为所求作；



【小问 3 详解】

解：线段 DE 、 DF 即为所求作；



【小问 4 详解】

解：根据角平分线 性质得 $DE = DF$；

进而可以证明 $\triangle BDE \cong \triangle BDF$，

根据全等三角形性质可以得到则 $BE = BF$；

四边形 $BEDF$ 为筝形.

故答案为：DE，DF，$\triangle BDE$，$\triangle BDF$，BE，BF，$BEDF$.

【点睛】本题考查基本作图、全等三角形的判定与性质、角平分线的性质，会根据几何描述画出图形，并熟练掌握角平分线的性质和全等三角形的判定与性质是解答的关键.

23. 【答案】(1) $n(n+2)+1=(n+1)^2$

(2) $\left[n(n+3)+1\right]^2$；$(n+1)(n+2)$；(n^2+3n+2)；证明见解析

【解析】

【分析】(1) 观察已知等式，得出式子的规律，即可写出第 n 个式子；

(2) 观察已知等式，根据式子的规律，即可写出第 n 个式子；利用乘法交换律、乘法结合律，再把 (n^2+3n) 看作一个整体，利用完全平方公式即可证明.

【小问 1 详解】

解：$\because 1\times3+1=2^2$；

$2\times4+1=3^2$；

$3\times5+1=4^2$；

……

$\therefore$ 第 n 个式子：$n(n+2)+1=(n+1)^2$；

故答案为：$n(n+2)+1=(n+1)^2$；

【小问 2 详解】

解：$\because 1\times2\times3\times4+1=(1\times4+1)^2$；

$2\times3\times4\times5+1=(2\times5+1)^2$；

$3\times4\times5\times6+1=(3\times6+1)^2$；

…；

$\therefore n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$，

证明：$n(n+1)(n+2)(n+3)+1$

$=n(n+3)(n+1)(n+2)+1$

$=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$

$=(n^2+3n)^2+2(n^2+3n)+1$

$=(n^2+3n+1)^2$.

故答案为：$[n(n+3)+1]^2$；$(n+1)(n+2)$；(n^2+3n+2).

【点睛】本题考查了规律型-数字的变化类，完全平方公式的应用，解决本题的关键是观察数字的变化寻找规律.

24. 【答案】（1）$180^\circ-(\angle 3+\angle 4)$，$90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$

（2）$\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha$

（3）$\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$

【解析】

【分析】（1）根据角平分线　定义和三角形的内角和定理进行角的运算即可求解；

（2）根据角平分线的定义和四角形的内角和为360°进行角的运算即可求解；

（3）根据角平分线的定义和四角形的内角和为360°进行角的运算即可求解.

【小问 1 详解】

解：$\because \angle A=\alpha$，$\triangle ABC$；

$\therefore \angle 1+\angle 2=180°-\angle A=180°-\alpha$；

$\because BE$，CF 分别是$\angle ABC$和$\angle BCA$的外角平分线；

$\therefore \angle 3=\frac{1}{2}\angle MBC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 1)$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle NCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 2)$，

$\because \triangle BCP$，

$\therefore \angle BPC=180^\circ-(\angle 3+\angle 4)$（三角形内角和为$180^\circ$）

$=180^\circ-\left[\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 1)+\frac{1}{2}(180^\circ-\angle 2)\right]$

$=180^\circ-\left[180^\circ-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)\right]$

$=90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$，（用含有$\alpha$的式子表示），

故答案为：$180^\circ-(\angle 3+\angle 4)$，$90^\circ-\frac{1}{2}\alpha$；

【小问 2 详解】

解：$\because \angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$，四边形 $ABDC$；

$\therefore \angle 1+\angle 2=360^\circ-(\angle A+\angle D)=360^\circ-(\alpha+\beta)$；

$\because BE$，CF 分别是 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 的外角平分线；

$\therefore \angle 3=\frac{1}{2}\angle MBD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 1$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle NCD=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 2$；

$\because$ 四边形 $ACPB$，

$\therefore \angle BPC=360^\circ-\angle A-(\angle 2+\angle 4)-(\angle 1+\angle 3)$

$=360^\circ-\angle A-(\angle 1+\angle 2)-(\angle 3+\angle 4)$

$=360^\circ-\angle A-(\angle 1+\angle 2)-\left[180^\circ-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)\right]$

$=\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha$（用含有 α 和 β 的式子表示），

故答案为：$\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\alpha$；

【小问 3 详解】

解：如图 3，

$\because \angle A=\alpha$，$\angle D=\beta$，四边形 $ABDC$；

$\therefore \angle 1+\angle 2=360^\circ-(\angle A+\angle D)=360^\circ-(\alpha+\beta)$；

$\because BE$，CF 分别是 $\angle ABD$ 和 $\angle ACD$ 的外角平分线；

$\therefore \angle 3=\frac{1}{2}\angle MBA=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 1$，$\angle 4=\frac{1}{2}\angle NCA=90^\circ-\frac{1}{2}\angle 2$；

$\because$ 四边形 $DCPB$，

$\therefore \angle BPC=360^\circ-\angle D-(\angle 2+\angle 4)-(\angle 1+\angle 3)$

$=360^\circ-\angle D-(\angle 1+\angle 2)-(\angle 3+\angle 4)$

$=360^\circ-\angle D-(\angle 1+\angle 2)-\left[180^\circ-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)\right]$

$=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$，

故答案为：$\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$．

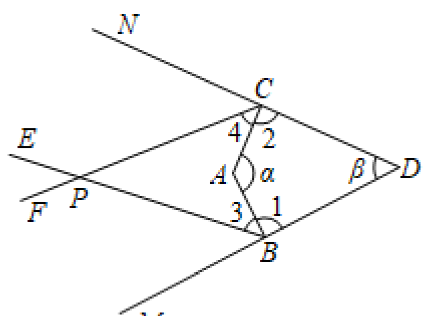


图3

【点睛】本题考查了角平分线的定义、三角形的内角和定理、四边形的内角和，理解题意，能从图形中找到角之间的运算关系是解答的关系．

25. 【答案】（1）见解析　　（2）①见解析；② $EF=CF+AM$，理由见解析

【解析】

【分析】（1）证明 $\triangle CAB\cong\triangle EAD(\mathrm{SAS})$，即可证明 $\angle FCA=\angle AEF$；

（2）①依题意补全图形即可；

②证明 $AM\parallel EF$，在 EF 上截取点 N，使 $NE=CF$，证明 $\triangle CAF\cong\triangle EAN(\mathrm{SAS})$，得出 $\triangle FAN$ 和 $\triangle AFM$ 是腰长相等的两个等腰直角三角形，推出 $AM=FN$，据此即可求解．

【小问 1 详解】

证明：$\because\angle CAB=90^\circ$，

$\therefore\angle CAB=\angle EAD=90^\circ$，

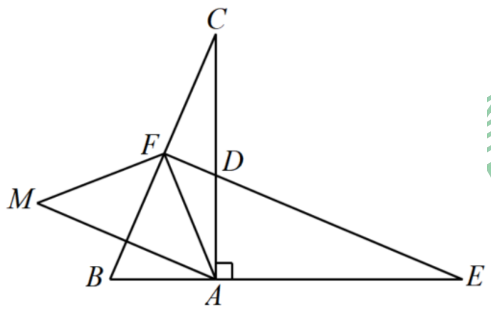
$\because AD=AB$，$AE=AC$，

$\therefore\triangle CAB\cong\triangle EAD(\mathrm{SAS})$，

$\therefore\angle BCA=\angle AED$，即 $\angle FCA=\angle AEF$；

【小问 2 详解】

解：①依题意补全图形即可；



② $EF=CF+AM$，理由如下：

$\because\angle BCA=\angle AED$，又 $\angle CDE=\angle EDA$，

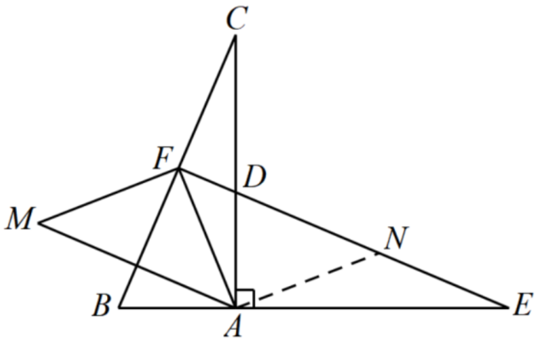
$\therefore\angle CED=\angle ADE=90^\circ$，即 $EF\perp BC$，

$\because$点 A、点 M 关于 BC 对称，

$\therefore AM\perp BC$，$\angle AFB=\angle MFB$，$AF=MF$，

$\therefore AM \parallel EF$，

在 EF 上截取点 N，使 $NE = CF$，



$\because \angle C = \angle E$， $AE = AC$，

$\therefore \triangle CAF \cong \triangle EAN(\text{SAS})$，

$\therefore AF = AN$， $\angle AFC = \angle ANE$， $\angle CAF = \angle EAN$，

$\therefore \angle AFN = \angle ANF = \angle AFB$，$\angle FAN = \angle DAE = 90°$， $AF = AN = FM$，

$\therefore \angle AFN = \angle ANF = \angle AFB = \angle MFB$，

$\therefore \angle MFA = \angle BFE = 90°$，

$\therefore \triangle FAN$ 和 $\triangle AFM$ 是腰长相等的两个等腰直角三角形，

$\therefore AM = FN$，

$\therefore EF = EN + FN = CF + AM$，

【点睛】本题考查了全等三角形的判定和性质，轴对称的性质，等腰直角三角形的判定和性质，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件．

26. 【答案】（1） $\angle P_2MQ_2$

（2）见解析　　（3） $0° < \alpha < 45°$

（4） $m \le -4$

【解析】

【分析】（1）根据轴对称的特征以及角的两边所在的象限判定即可；

（2）作线段 MC 的中垂线，即为直线 l，然后任意作一个关于 l 对称后在 $\angle OCB$ 内部的 $\angle PMQ$ 即可；

（3）作正方形 $OABC$ 关于直线 l 的对称正方形 $OA'MC'$，由 $\angle PMQ = \frac{1}{2}\angle ABC = 45° = \angle A'MO = \angle C'MO$，得出 MO 在 $\angle PMQ$ 的内部，即可得出结果；

（4）作正方形 $OABC$ 关于直线 l 的对称正方形 $O_1MB_1C_1$；由内含对称半角的定义可知 $\angle PMQ$ 在正方形 $O_1MB_1C_1$ 内部，故使正方形 $O_1MB_1C_1$ 在 x 轴下方即可满足题意，然后通过临界值求解即可；

【小问 1 详解】

解：$\angle P_3MQ_3$ 的边 MP_3 关于直线 l 的对称的射线不在第一象限内，不符合题意；

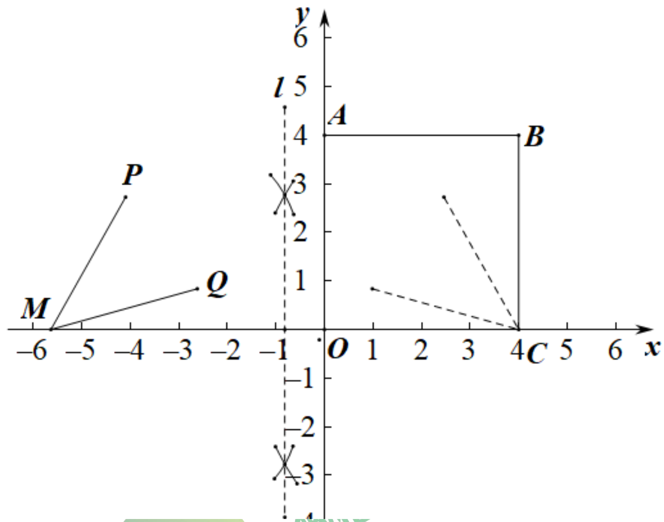
$\angle P_1MQ_1$ 关于直线 l 的对称的图形在 x 轴下方，不符合题意；

$\angle P_2MQ_2$ 关于直线 l 对称的图形在 $\angle AOC$ 的内部；符合题意；

故答案为：$\angle P_2MQ_2$；

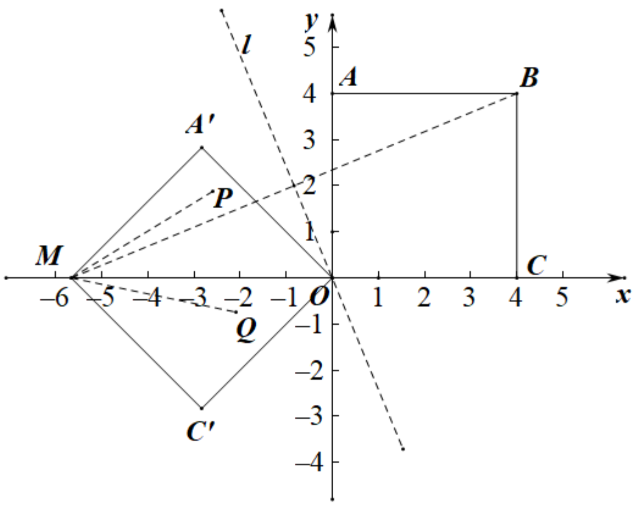
【小问 2 详解】

解：作图如下，$\angle PMQ$ 即为所求；



【小问 3 详解】

解：如图，作正方形 $OABC$ 关于直线 l 的对称正方形 $QA'MC'$；



由题意可得：$\angle PMQ$ 在 $\angle A'MC'$ 内部，$\angle PMQ = \frac{1}{2}\angle ABC = 45°$，

$\because$ MO 为正方形 $OA'MC'$ 的对角线，

$\therefore$ $\angle A'MO = \angle C'MO = 45° = \angle PMQ$，

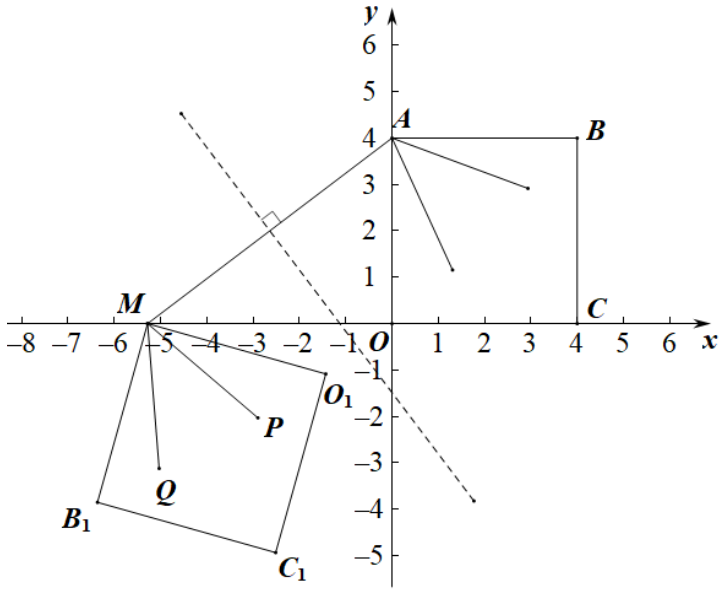
$\therefore$ MO 在 $\angle PMQ$ 的内部，

$\therefore$ $0° < \angle PMO < 45°$，

故答案为：$0° < \alpha < 45°$；

【小问 4 详解】

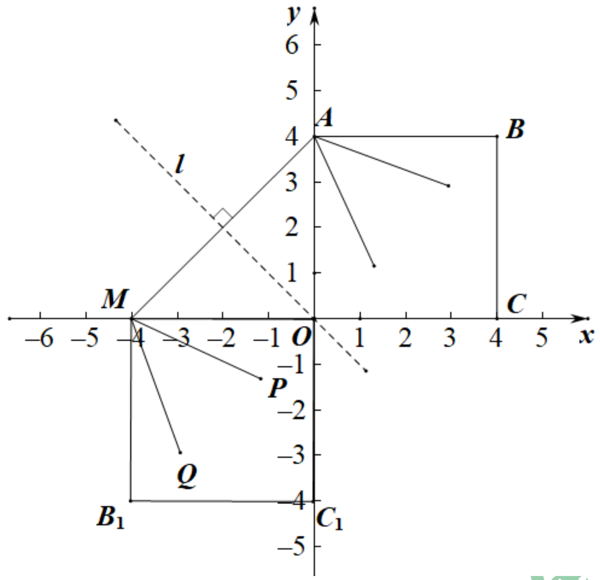
解：如图，作正方形 $OABC$ 关于直线 l 的对称正方形 $O_1MB_1C_1$；



由内含对称半角的定义可知$\angle PMQ$在正方形OMB_1C_1内部；

故当正方形$O_1MB_1C_1$在x轴下方时，则可使$\angle OAB$的内含对称半角位于x轴下方；

其临界情况如下图：



此时，O与O_1重合；

由对称的性质可知：$OM=OA=4$，

$\therefore$此时$m=4$；

当点M向左移动时，若连接BB_1，由轴对称的性质易得$BB_1 \parallel AM$，且直线BB_1在直线AM下方，故点B_1在x轴下方；此时正方形$O_1MB_1C_1$在x轴下方，满足题意；

故答案为：$m\le 4$.

【点睛】本题考查了作轴对称图形、轴对称图形的性质、正方形的性质等知识点；熟练掌握轴对称图形的性质是解题的关键.