2023 北京陈经纶中学高一 10 月月考

数　　学

本试卷共 8 页，150 分。考试时长 90 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

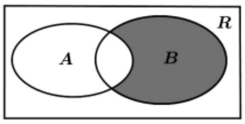
1．已知集合 $A=\{-1,1,2,4\}$，$B=\{x|-1<x<3\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-1,2\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{1,4\}$　　D．$\{-1,4\}$

2．若函数 $f(x+1)=x$，且 $f(a)=8$，则 $a=$（　）

A．7　　B．8　　C．9　　D．10

3．设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\big|x\le 1\}$，$B=\{x|x^2-x-2<0\}$，则图中阴影部分对应的集合为（　）



A．$\{x|x\ge 1\}$　　B．$\{x|1\le x<2\}$

C．$\{x|x>1\}$　　D．$\{x|1<x<2\}$

4．若 $0<b<a$，下列不等式中不一定成立的是（　）

A．$\dfrac{1}{a-b}>\dfrac{1}{b}$　　B．$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$　　C．$\sqrt{a}>\sqrt{b}$　　D．$-a<-b<0$

5．已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,0)$，则 $f(2x)$ 的定义域是（　）

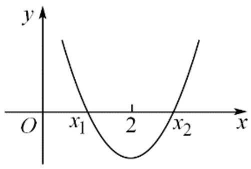
A．$\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$　　B．$\left[0,\dfrac{1}{2}\right)$　　C．$[-2,0)$　　D．$[0,2)$

6．已知实数 a、b、c 满足 $c<b<a$，那么“$ac<0$”是“$ab>ac$”成立的（　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．二次函数 $y=x^2+(m-3)x+2m$ 的图象与 x 轴的两个交点的横坐标分别为 x_1，x_2，且 $0<x_1<2<x_2$，如图所示，则 m 的取值范围是（　）



A．$m>0$　　B．$m>\dfrac{1}{2}$

C．$0<m<\dfrac{1}{2}$ 或 $m>5$　　D．$0<m<\dfrac{1}{2}$

8．已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1, x\ge 1\\ x-2, x<1\end{cases}$，若 $f(f(a))=3$，则 $a=$（　）

A．$\sqrt{3}$　　B．0　　C．$\sqrt{3}$ 或 0　　D．$\pm\sqrt{3}$

9．若存在 $x\in[0,1]$，有 $x^2+(1-a)x+3-a>0$ 成立，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$(-\infty,\dfrac{5}{2})$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$(\dfrac{5}{2},3)$　　D．$(-\infty,\dfrac{5}{2})\cup(3,+\infty)$

10．对集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的每一个非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”，概念如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的开始，交替减加后面的数所得的结果．例如：集合 $\{1,2,4,6\}$ 的“交替和”为 $6-4+2-1=3$，集合 $\{3,8\}$ 的“交替和”为 $8-3=5$，集合 $\{6\}$ 的“交替和”为 6，则集合 A 所有非空子集的“交替和”的和为（　　）

A．n^2　　B．n^2+n-1 C．$n\cdot 2^{n-1}$　　D．$n\cdot 2^n$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11．函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ 的定义域为________.

12．已知 $x>0$，$y>0$，且 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=1$，则 $x+2y$ 的取值范围是________．$[9,+\infty)$

13．已知不等式 $ax^2+bx+c\le 0$ 的解集为 $\{x|x\le -3$ 或 $x\ge 4\}$，则不等式 $bx^2+2ax-c-3b\le 0$ 的解集是________.

14．已知函数 $f(x)=-x^2+4x$，$x\in[m,4]$ 的值域是 $[0,4]$，则实数 m 的取值范围是________.

15．若 $\{x|0\le x\le 1\}\cap\{x|x^2-2x+m>0\}=\varnothing$，则实数 m 的一个取值为_____.

16．高斯函数是数学中的一个重要函数，在自然科学、社会科学以及工程学等领域都能看到它的身影．设 $x\in\mathbf{R}$，用符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[1.6]=1,\ [-1.6]=-2$ 称函数 $f(x)=[x]$ 叫做高斯函数．给出下列关于高斯函数的说法：

① $f(-3)=-3$

②若 $f(a)=f(b)$，则 $|a-b|<1$

③函数 $y=f(x)-x$ 的值域是 $[-1,0)$

④函数 $y=x\cdot f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增

其中所有正确说法的序号是________.

三、解答题共 5 小题，共 70 分。**解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

17．设全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3>0\}$，$B=\{x\,|\,a-1<x<2a+3\}$.

（Ⅰ）若 $a=-1$，求 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B$；

（Ⅱ）当 $a=0$ 时，是否满足 $A\cup B=\mathbf{R}$？说明理由；

（Ⅲ）在① $A\cup B=A$，② $A\cap B=B$，③ $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$，这三个条件中任选一个作为已知条件，求实数 a 的取值范围．

（注：如果选择多个条件分别解答，则按第一个解答计分）

18．设 $f(x)=mx^2+(1-m)x+m-2$．

（Ⅰ）若不等式 $f(x)+2\geq 0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

（Ⅱ）已知 $m<0$，解关于 x 的不等式 $f(x)<m-1$．

19．某游戏厂商对新出品的一款游戏设定了“防沉迷系统”规则如下：

①3 小时内（含 3 小时）为健康时间，玩家在这段时间内获得的累积经验值 E（单位：EXP）与游玩时间 t（单位：小时）满足关系式：$E=t^2+20t+16a$；

②3 到 5 小时（含 5 小时）为疲劳时间，玩家在这段时间内获得的经验值为 0（即累积经验值不变）；

③超过 5 小时为不健康时间，累积经验值开始损失，损失的经验值与不健康时间成正比例关系，正比例系数为 50．

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，写出累积经验值 E 与游玩时间 t 的函数关系式 $E=f(t)$，求出游玩 6 小时的累积经验值；

（Ⅱ）该游戏厂商把累积经验值 E 与游玩时间 t 的比值称为“玩家愉悦指数”，记为 $H(t)$，若 $a>0$，且该游戏厂商希望在健康时间内，这款游戏的“玩家愉悦指数”不低于 24，求实数 a 的取值范围．

20．已知函数 $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}-1$．

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的零点；

（Ⅱ）证明：函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

（Ⅲ）若 $x>0$ 时，$f(ax^2+2a)>0$ 恒成立，求正数 a 的取值范围．

21．设集合 A 为非空数集，定义 $A^+=\{x\,|\,x=a+b,\ a,b\in A\}$，$A^-=\{x\,|\,x=|a-b|,\ a,b\in A\}$．

（Ⅰ）若集合 $A=\{-1,1\}$，直接写出集合 A^+ 及 A^-；

（Ⅱ）若集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且 $A^-=A$，求证 $x_1+x_4=x_2+x_3$；

（Ⅲ）若集合 $A\subseteq\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant 2023,\ x\in\mathbf{N}\}$，且 $A^+\cap A^-=\varnothing$，求 A 中元素个数的最大值．

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1.【答案】B

2.【答案】C

3.【答案】D

4.【答案】A

5.【答案】B

6.【答案】A

7.【答案】D

8.【答案】A

9.【答案】B

10.【答案】C

【分析】将此集合分成两类，并在两类集合之间建立一一映射关系后根据“交替和”的定义即可求出答案.

【详解】解：由题意得：

集合 $A=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的非空子集中，除去集合 $\{n\}$，还有 2^n-2 个非空集合，将这 2^n-2 个子集分成两类：

第一类: 包含 n 的子集；第二类：不包含 n 的子集；

在第二类和第一类子集之间建立如下的对应关系：$f:A_i\to A_i\cup\{n\}$，其中 A_i 是第二类子集，显然这种对应是一一映射

设 A_i 的“交替和”为 k，则 $A_i\cup\{n\}$ 的“交替和”为 $n-k$，这一对集合的“交替和”的和等于 n，所以集合 A 的所有非空集合的“交替和”总和为 $\frac{1}{2}(2^n-2)\times n+n=n\cdot 2^{n-1}$

故选：B

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11.【答案】$[-1,0)\cup(0,+\infty)$

12.【答案】$[9,+\infty)$

13.【答案】$\{x|-3\le x\le 5\}$

14.【答案】$[0,2]$

15.【答案】$m=0$（答案不唯一）

16.【答案】①②④，对 1 个给 3 分，对 2 个给 4 分，全对给 5 分，有错不得分

三、解答题共 5 小题，共 70 分。**解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。**

17．解：（Ⅰ）全集为 $\mathbf{R}$，集合 $A=\{x\,|\,x^2-2x-3>0\}=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>3\}$（1 分），

所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant 3\}$（2 分）；

又 $a=-1$ 时，集合 $B=\{x\mid a-1<x<2a+3\}=\{x\mid -2<x<1\}$（3 分），

所以 $(\complement_R A)\cap B=\{x\mid -1\leqslant x<1\}$；（5 分，若结果开闭区间错扣 1 分）

（Ⅱ）当 $a=0$ 时，不满足 $A\cup B=\mathbf{R}$，（6 分）

理由如下：$B=\{x\mid -1<x<3\}$，$A\cup B=\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq -1且x\neq 3\}$，故 $A\cup B\neq\mathbf{R}$（8 分）．

（Ⅲ）选择① $A\cup B=A$ 作为已知条件．（选择②③的解法同①）

因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$（9 分），又由 $A=\{x\mid x<-1或x>3\}$ 得，

当 $B=\varnothing$ 时，$a-1\geqslant 2a+3$（10 分），解得 $a\leqslant -4$；（11 分）

当 $B\neq\varnothing$ 时，$\begin{cases}a-1<2a+3\\2a+3\leqslant -1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1<2a+3\\a-1\geqslant 3\end{cases}$，（12 分）

所以 $\begin{cases}a>-4\\a\leqslant -2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a>-4\\a\geqslant 4\end{cases}$，所以 $-4<a\leqslant -2$ 或 $a\geqslant 4$．（13 分）

综上，可得 a 的取值范围为 $(-\infty，-2]\cup[4，+\infty)$．（14 分）

18．（Ⅰ）解：由 $y=mx^2+(1-m)x+m-2\geq -2$ 对一切实数 x 恒成立，

即 $mx^2+(1-m)x+m\geq 0$ 对一切实数 x 恒成立，（1 分）

当 $m=0$ 时，$x\geq 0$，不满足题意；（2 分）

当 $m\neq 0$ 时，则满足 $\begin{cases}m>0\\\Delta=(1-m)^2-4m^2\leq 0\end{cases}$（4 分），解得 $m\geq\frac{1}{3}$（5 分），

综上所述，实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$（6 分）．

（2）解：由不等式 $mx^2+(1-m)x+m-2<m-1$，即 $(mx+1)(x-1)<0$，（8 分）

方程 $(mx+1)(x-1)=0$ 的两个根为 $x_1=-\frac{1}{m},x_2=1$，（9 分，此步骤不写不扣分）

①当 $m=-1$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$；（10 分）

②当 $m<-1$ 时，不等式的解集为 $\left(-\infty,-\frac{1}{m}\right)\cup(1,+\infty)$；（12 分）

③当 $-1<m<0$ 时，不等式的解集为 $(-\infty,1)\cup\left(-\frac{1}{m},+\infty\right)$．（14 分）

若①②合并讨论，结果正确也给分

19.【详解】（1）当 $0<t\leq 3$ 时，$a=1$，$E=t^2+20t+16$，（1 分）

当 $t=3$ 时，$E=85$（2 分），故当 $3<t\leq 5$ 时，$E=85$，（3 分）

当 $t>5$ 时，$E=85-50(t-5)=335-50t$，（5 分，列式 1 分，化简 1 分）

所以 $E(t)=\begin{cases}t^2+20t+16,0<t\leq 3\\85,3<t\leq 5\\335-50t,t>5\end{cases}$，（6 分）当 $t=6$ 时，$E(t)=35$．（7 分）

（2）当$0<t\le 3$时，$H\left(t\right)=\dfrac{t^2+20t+16a}{t}\ge 24$，（9 分）

整理得：$t^2-4t+16a\ge 0$恒成立，（10 分）

令$f\left(t\right)=t^2-4t+16a$函数的对称轴是$t=2\in\left(0,3\right]$，

当$t=2$时，$f\left(t\right)$取得最小值$16a-4$（12 分），即$16a-4\ge 0$，$a\ge\dfrac{1}{4}$.

所以实数a的取值范围是$[\dfrac{1}{4},+\infty)$.（14 分）

用其他方法酌情给分.

20．（1）解：因为$f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}-1$，所以$x\ne -1$，（1 分，若结果正确，此步不写不扣分）

令$f(x)=\dfrac{2x^2}{x+1}-1=0$，则有$2x^2=x+1$，

即$2x^2-x-1=0$，解得$x=1$或$x=-\dfrac{1}{2}$；（3 分）

（2）证明：任取$x_1,x_2\in(0,+\infty),x_1<x_2$，（4 分）

则$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{2x_1^2}{x_1+1}-\dfrac{2x_2^2}{x_2+1}=\dfrac{2x_1^2(x_2+1)-2x_2^2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\dfrac{2(x_1-x_2)(x_1x_2+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$，（6 分）

因为$0<x_1<x_2$，所以$\dfrac{2(x_1-x_2)(x_1x_2+x_1+x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}<0$，（7 分）

即$f(x_1)-f(x_2)<0\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$，（8 分）

所以函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；（9 分）

（3）解：若$x>0$时，$f(ax^2+2a)>0$恒成立，即$f(ax^2+2a)>f(1)$恒成立（10 分）

因为$a>0$，所以$ax^2+2a>0$，

又函数$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增，

所以“$f(ax^2+2a)>f(1)$恒成立”等价于“$ax^2+2a>1$恒成立”（12 分）

即$a>\dfrac{1}{x^2+2}$在$x\in(0,+\infty)$上恒成立，

故a的取值范围为$[\dfrac{1}{2},+\infty)$.（14 分，开闭区间错扣 1 分）

21．解：（Ⅰ）$A^+=\{-2，0，2\}$，$A^-=\{0，2\}$；（4 分，每个 2 分）

（Ⅱ）由于集合$A=\{x_1，x_2，x_3，x_4\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4$，且$A^-=A$，

所以A^-中也只包含四个元素，即$A^-=\{0，x_2-x_1，x_3-x_1，x_4-x_1\}$，（6 分）

剩下的$x_3-x_2=x_4-x_3=x_2-x_1$，所以$x_1+x_4=x_2+x_3$；（8 分）

（Ⅲ）设$A=\{a_1，a_2，\ldots a_k\}$满足题意，其中$a_1<a_2<\ldots<a_k$，

则$2a_1<a_1+a_2<a_1+a_3<\ldots<a_1+a_k<a_2+a_k<a_3+a_k<\ldots<a_{k-1}+a_k<2a_k$，

所以$|A^+|\geqslant 2k-1$，$a_1-a_1<a_2-a_1<a_3-a_1<\dots<a_k-a_1$，所以$|A^-|\geqslant k$，

因为$A^+\cap A^-=\varnothing$，由容斥原理$|A^+\cup A^-|=|A^+|+|A^-|\geqslant 3k-1$，

$A^+\cup A^-$中最小的元素为0，最大的元素为$2a_k$，

所以$|A^+\cup A^-|\leqslant 2a_k+1$，所以$3k-1\leqslant 2a_k+1\leqslant 4047(k\in\mathbf{N}^*)$，所以$k\leqslant 1349$，

实际上当$A=\{675$，676，677，…，$2023\}$时满足题意，证明如下：

设$A=\{m$，$m+1$，$m+2$，…，$2023\}$，$m\in\mathbf{N}$，

则$A^+=\{2m$，$2m+1$，$2m+2$，…，$4046\}$，$A^-=\{0$，1，2，…，$2023-m\}$，

依题意有$2023-m<2m$，即$m>674\frac{1}{3}$，

故m的最小值为675，于是当$m=675$时，A中元素最多，

即$A=\{675$，676，677，…，$2023\}$时满足题意，

综上所述，集合A中元素的个数的最大值是1349．（14分）