

北京市日坛中学 2023-2024 学年度第一学期 12 月月考

高一年级 学科： 数学

命题人：张杉杉 赵青 时长：120 分钟 复核人：贾卓琴 侯立俊

一、单项选择题：共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分。

1. 命题“ $\forall x \in A, 2x \in B$ ”的否定为 ()

- (A) $\exists x \in A, 2x \notin B$ (B) $\exists x \notin A, 2x \in B$
 (C) $\forall x \in A, 2x \notin B$ (D) $\forall x \notin A, 2x \in B$

2. 下列函数为偶函数的是 ()

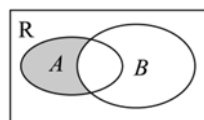
- (A) $y = |x|$ (B) $y = \ln x$ (C) $y = e^x$ (D) $y = x^3$

3. 已知函数 $y = \sin x$ 在区间 M 上单调递增，那么区间 M 可以是 ()

- (A) $(0, 2\pi)$ (B) $(0, \pi)$ (C) $(0, \frac{3\pi}{2})$ (D) $(0, \frac{\pi}{2})$

4. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, $B = \{x | y = \sqrt{2^x - 4}\}$, 则图中阴影部分所表示的集合为 ()

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(0, 2)$ D. $[0, 2]$



5. 若 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()

- (A) $a^2 > b^2$ (B) $2^a > 2^b$ (C) $a^{\frac{1}{2}} > b^{\frac{1}{2}}$ (D) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

6. 设 x_0 是函数 $f(x) = (\frac{1}{3})^x - \log_2 x$ 的零点. 若 $0 < a < x_0$, 则 $f(a)$ 的值满足 ()

- (A) $f(a) = 0$ (B) $f(a) < 0$ (C) $f(a) > 0$ (D) $f(a)$ 的符号不确定

7. “ $x > 0, y > 0$ ”是“ $\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2$ ”的 ()

- (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分也不必要条件

8. 已知函数 $f(x) = ax^2 - x$, 若对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$, 且 $x_1 \neq x_2$, 不等式 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ 恒成立,

则实数 a 的取值范围是 ()

- (A) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (B) $[\frac{1}{2}, +\infty)$ (C) $(\frac{1}{4}, +\infty)$ (D) $[\frac{1}{4}, +\infty)$

9. 大西洋鲑鱼每年都要逆流而上 3000 英里游回它们出生的地方产卵繁殖. 研究鲑鱼的科学家发现鲑鱼的游

速 v (单位: m/s) 可以表示为 $v = \frac{1}{2} \log_3 \frac{O}{100}$, 其中 O 表示鲑鱼的耗氧量的单位数. 则该鲑鱼游速为

2m/s 时的耗氧量与静止时耗氧量的比值为 ()

(A) 8100

(B) 900

(C) 81

(D) 9

10. 已知函数 $f(x) = 4^{|x|} + x^2 + a$, 下列命题正确个数有 ()

① 对于任意实数 a , $f(x)$ 为偶函数

② 对于任意实数 a , $f(x) > 0$

③ 存在实数 a , $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减

④ 存在实数 a , 使得关于 x 的不等式 $f(x) \geq 5$ 的解集为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

二、填空题: 共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分。

11. 函数 $f(x) = \ln(1-x^2)$ 的定义域是_____.

12. $\sin \frac{11\pi}{6}$ 的值为_____.

13. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, +\infty)$, 且在定义域内单调递减, 则符合要求的函数 $f(x)$ 可以为_____. (写出符合条件的一个函数即可)

14. 学校举办运动会, 高一(1)班共有 28 名同学参加比赛, 有 15 人参加游泳比赛, 8 人参加田径比赛, 有 14 人参加球类比赛, 同时参加游泳比赛和田径比赛的有 3 人, 同时参加游泳比赛和球类比赛的有 3 人, 没有人同时参加三项比赛, 则只参加游泳比赛的人数是_____, 只参加田径一项比赛的人数是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1, \\ 2^x, & x < 1. \end{cases}$ 则 $f(-2) =$ _____ ; 若 $f(t) = 1$, 则实数 $t =$ _____.

16. 某池塘中原有一块浮草, 浮草蔓延后的面积 y (平方米) 与时间 t (月) 之间的函数关系式是

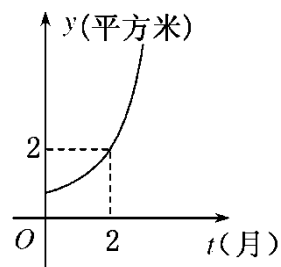
$y = a^{t-1} (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$, 它的图象如下图所示, 给出以下命题:

① 池塘中原有浮草的面积是 0.5 平方米;

② 第 8 个月浮草的面积超过 60 平方米;

③ 浮草每月增加的面积都相等;

④ 若浮草面积达到 10 平方米, 20 平方米, 30 平方米所经过的时间



分别为 t_1, t_2, t_3 , 则 $2t_2 > t_1 + t_3$.

其中正确命题的序号有_____. (注: 请写出所有正确结论的序号)

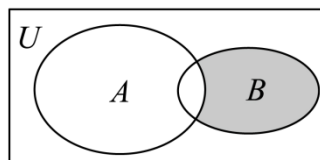
三、解答题：共 5 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

17. (本小题 13 分)

已知全集 U 为实数集，集合 $A = \{x | -1 < x < 6\}$ ， $B = \{x | a+1 \leq x \leq 3a-1\}$ 。

(1) 若 $a = 4$ ，求图中阴影部分的集合 M ；

(2) 若 $B \subseteq A$ ，求实数 a 的取值范围。



18. (本小题 14 分)

在平面直角坐标系 xOy 中，角 α, β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$) 的顶点与坐标原点 O 重合，始边为 x 轴的非

负半轴，终边分别与单位圆交于 A, B 两点， A, B 两点的纵坐标分别为 $\frac{4}{5}, \frac{5}{13}$ 。

(1) 求 $\tan \beta$ 的值；

(2) 求 $\frac{\sin(\alpha + \pi) + \cos(\pi - \beta)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\frac{\pi}{2} + \beta)}$ 的值。

19. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(2\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($0 < \omega < 2$)。在下面两个条件中选择其中一个，完成下面两个问题：

条件①：在 $f(x)$ 图象上相邻的两个对称中心的距离为 $\frac{\pi}{4}$ ；条件②： $f(x)$ 的一条对称轴为 $x = \frac{\pi}{6}$ 。

(1) 求 ω 和对称中心；

(2) 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位 (纵坐标不变)，得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的值域。

20. (本小题 15 分)

$$\text{已知函数 } f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2}.$$

- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明;
- (2) 判断 $f(x)$ 的单调性并说明理由;
- (3) 若 $f(ax-1) + f(2-x) > 0$ 对任意 $a \in (-\infty, 2]$ 恒成立, 求 x 的取值范围.

21. (本小题 15 分)

$$\text{对于集合 } A, \text{ 定义函数 } f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \notin A, \\ -1, & x \in A. \end{cases}$$

对于两个集合 A, B , 定义运算 $A * B = \{x \mid f_A(x) \cdot f_B(x) = -1\}$.

- (1) 若 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, 写出 $f_A(1)$ 与 $f_B(1)$ 的值, 并求出 $A * B$;
- (2) 证明: $f_{A*B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$;
- (3) 证明: $*$ 运算具有交换律和结合律, 即 $A * B = B * A$, $(A * B) * C = A * (B * C)$.