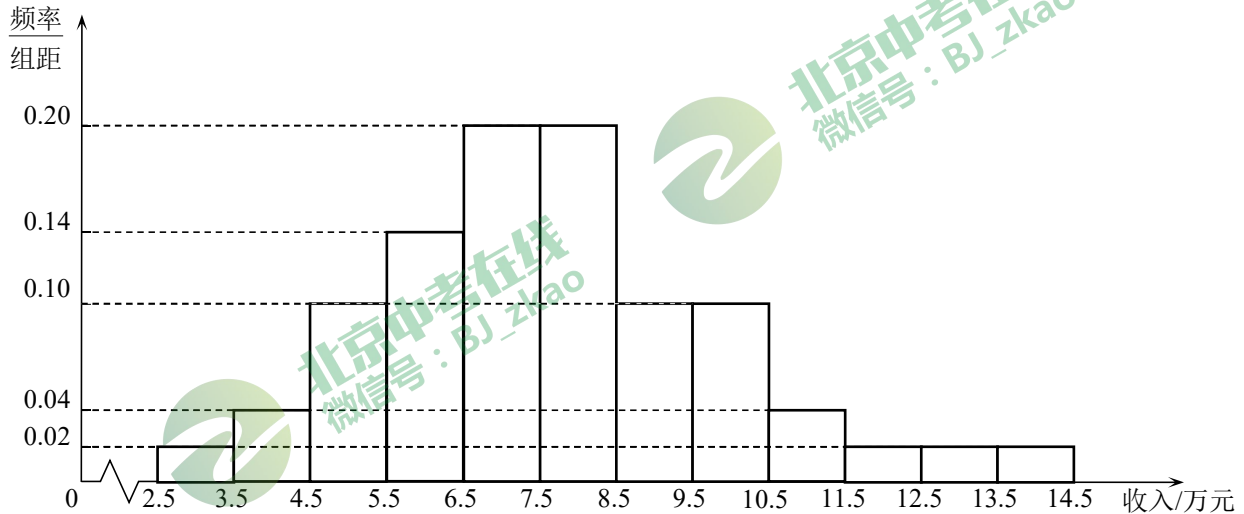


# 2021 年普通高等学校招生全国统一考试数学试题(甲卷·理科)



1. 设集合  $M = \{x | 0 < x < 4\}$ ,  $N = \{x | \frac{1}{3} \leq x \leq 5\}$ , 则  $M \cap N = ( \quad )$
- A.  $\{x | 0 < x \leq \frac{1}{3}\}$       B.  $\{x | \frac{1}{3} \leq x < 4\}$       C.  $\{x | 4 \leq x < 5\}$       D.  $\{x | 0 < x \leq 5\}$

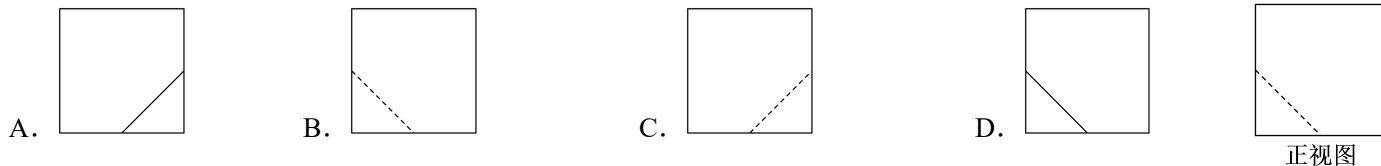
2. 为了解某地农村经济情况, 对该地农户家庭年收入进行抽样调查, 将农户家庭年收入的调查数据整理得到如下频率分布直方图:



根据此频率分布直方图, 下面结论中不正确的是( )

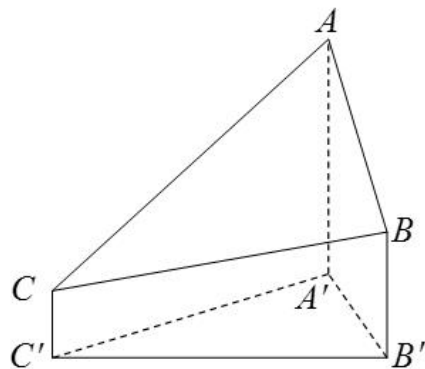
- A. 该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 6%
- B. 该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 10%
- C. 估计该地农户家庭年收入的平均值不超过 6.5 万元
- D. 估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间
3. 已知  $(1 - i)^2 z = 3 + 2i$ , 则  $z = ( \quad )$
- A.  $-1 - \frac{3}{2}i$       B.  $-1 + \frac{3}{2}i$       C.  $-\frac{3}{2} + i$       D.  $-\frac{3}{2} - i$
4. 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据  $L$  和小数记录法的数据  $V$  满足  $L = 5 + \lg V$ . 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为  $(\sqrt[10]{10} \approx 1.259)$  ( )
- A. 1.5      B. 1.2      C. 0.8      D. 0.6
5. 已知  $F_1, F_2$  是双曲线  $C$  的两个焦点,  $P$  为  $C$  上一点, 且  $\angle F_1 P F_2 = 60^\circ$ ,  $|P F_1| = 3|P F_2|$ , 则  $C$  的离心率为( )
- A.  $\frac{\sqrt{7}}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{13}}{2}$       C.  $\sqrt{7}$       D.  $\sqrt{13}$

6. 在一个正方体中, 过顶点  $A$  的三条棱的中点分别为  $E, F, G$ . 该正方体截去三棱锥  $A-EFG$  后, 所得多面体的三视图中, 正视图如右图所示, 则相应的侧视图是( )



7. 等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 前  $n$  项和为  $S_n$ . 设甲:  $q > 0$ , 乙:  $\{S_n\}$  是递增数列, 则( )
- A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件  
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件  
C. 甲是乙的充要条件  
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 2020 年 12 月 8 日, 中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为 8848.86(单位:  $m$ ), 三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一. 右图是三角高程测量法的一个示意图, 现有  $A, B, C$  三点, 且  $A, B, C$  在同一水平面上的投影  $A', B', C'$  满足  $\angle A'C'B' = 45^\circ$ ,  $\angle A'B'C' = 60^\circ$ . 由  $C$  点测得  $B$  点的仰角为  $15^\circ$ ,  $BB'$  与  $CC'$  的差为 100; 由  $B$  点测得  $A$  点的仰角为  $45^\circ$ , 则  $A, C$  两点到水平面  $A'B'C'$  的高度差  $AA' - CC'$  约为  $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ ( )



- A. 346  
B. 373  
C. 446  
D. 473

9. 若  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\tan 2\alpha = \frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$ , 则  $\tan \alpha =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{15}}{15}$   
B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$   
D.  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

10. 将 4 个 1 和 2 个 0 随机排成一行, 则 2 个 0 不相邻的概率为( )

- A.  $\frac{1}{3}$   
B.  $\frac{2}{5}$   
C.  $\frac{2}{3}$   
D.  $\frac{4}{5}$

11. 已知  $A, B, C$  是半径为 1 的球  $O$  的球面上的三个点, 且  $AC \perp BC$ ,  $AC = BC = 1$ , 则三棱锥  $O-ABC$  的体积为( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{12}$   
B.  $\frac{\sqrt{3}}{12}$   
C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$   
D.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

12. 设函数  $f(x)$  的定义域为  $R$ ,  $f(x+1)$  为奇函数,  $f(x+2)$  为偶函数, 当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x) = ax^2 + b$ . 若  $f(0) + f(3) = 6$ , 则  $f(\frac{9}{2}) =$  ( )

- A.  $-\frac{9}{4}$   
B.  $-\frac{3}{2}$   
C.  $\frac{7}{4}$   
D.  $\frac{5}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

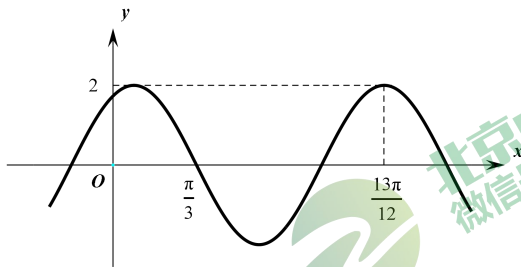
13. 曲线  $y = \frac{2x-1}{x+2}$  在点  $(-1, -3)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

14. 已知向量  $\vec{a} = (3, 1)$ ,  $\vec{b} = (1, 0)$ ,  $\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$ . 若  $\vec{a} \perp \vec{c}$ , 则  $k =$ \_\_\_\_\_.



15. 已知 $F_1, F_2$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 两个焦点,  $P, Q$ 为 $C$ 上关于坐标原点对称的两点, 且 $|PQ| = |F_1F_2|$ , 则四边形 $PF_1QF_2$ 的面积为\_\_\_\_\_.

16. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则满足条件 $(f(x) - f(-\frac{7\pi}{4}))(f(x) - f(\frac{4\pi}{3})) > 0$ 的最小正整数 $x$ 为\_\_\_\_\_.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。

第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一)必考题: 共 60 分。

17. 甲、乙两台机床生产同种产品, 产品按质量分为一级品和二级品, 为了比较两台机床产品的质量, 分别用两台机床各生产了 200 件产品, 产品的质量情况统计如下表:

	一级品	二级品	合计
甲机床	150	50	200
乙机床	120	80	200
合计	270	130	400

(1)甲机床、乙机床生产的产品中一级品的频率分别是多少?

(2)能否有 99%的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异?

附:  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,

$P(K^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 记 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 从下面①②③中选取两个作为条件, 证明另外一个成立. ①

数列 $\{a_n\}$ 是等差数列; ②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列; ③ $a_2 = 3a_1$ .

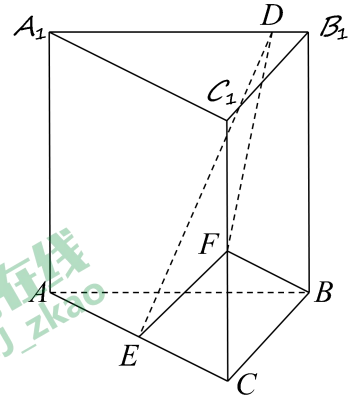
注: 若选择不同的组合分别解答, 则按第一个解答计分.



19. 已知直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中, 侧面  $AA_1B_1B$  为正方形.  $AB = BC = 2$ ,  $E, F$  分别为  $AC$  和  $CC_1$  的中点,  $D$  为棱  $A_1B_1$  上的点,  $BF \perp A_1B_1$ .

(1) 证明:  $BF \perp DE$ ;

(2) 当  $B_1D$  为何值时, 面  $BB_1C_1C$  与面  $DFE$  所成的二面角的正弦值最小?



20. 抛物线  $C$  的顶点为坐标原点  $O$ , 焦点在  $x$  轴上, 直线  $l: x=1$  交  $C$  于  $P, Q$  两点, 且  $OP \perp OQ$ . 已知点  $M(2, 0)$ , 且  $\odot M$  与  $l$  相切.

(1) 求  $C, \odot M$  的方程;

(2) 设  $A_1, A_2, A_3$  是  $C$  上的三个点, 直线  $A_1A_2, A_1A_3$  均与  $\odot M$  相切. 判断直线  $A_2A_3$  与  $\odot M$  的位置关系, 并说明理由.

21. 已知  $a > 0$  且  $a \neq 1$ , 函数  $f(x) = \frac{x^a}{a^x} (x > 0)$ .

(1) 当  $a=2$  时, 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若曲线  $y=f(x)$  与直线  $y=1$  有且仅有两个交点, 求  $a$  的取值范围.



(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. [选修 4-4：坐标系与参数方程]

在直角坐标系  $xOy$  中，以坐标原点为极点， $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$ .

(1)将  $C$  的极坐标方程化为直角坐标方程；

(2)设点  $A$  的直角坐标为  $(1, 0)$ ， $M$  为  $C$  上的动点，点  $P$  满足  $\overrightarrow{AP} = \sqrt{2}\overrightarrow{AM}$ ，写出  $P$  的轨迹  $C_1$  的参数方程，并判断  $C$  与  $C_1$  是否有公共点.



23. [选修 4-5：不等式选讲]

已知函数  $f(x) = |x - 2|$ ， $g(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$ .

(1)画出  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图象；

(2)若  $f(x+a) \geq g(x)$ ，求  $a$  的取值范围.

