

2019 年北京市朝阳区初三数学试卷



一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1—8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 下列事件中，随机事件是

- A. 通常温度降到 0°C 以下，纯净的水结冰
- B. 随意翻到一本书的某页，这页的页码是偶数
- C. 明天太阳从东方升起
- D. 三角形的内角和是 360°

2. 抛物线 $y = (x - 2)^2 + 1$ 的顶点坐标是

- A. (2,1) B. (-2,1) C. (-2,-1) D. (1,2)

3. 只有 1 和它本身两个因数且大于 1 的自然数叫做素数，我国数学家陈景润在有关素数的“哥德巴赫猜想”的研究中取得了世界领先的成果.从 5, 7, 11 这 3 个素数中随机抽取一个，则抽到的数是 7 的概率是

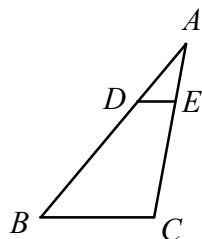
- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

4. 把 $\text{Rt}\triangle ABC$ 三边的长度都扩大为原来的 3 倍，则锐角 A 的余弦值

- A. 不变 B. 缩小为原来的 $\frac{1}{3}$
- C. 扩大为原来的 3 倍 D. 扩大为原来的 9 倍

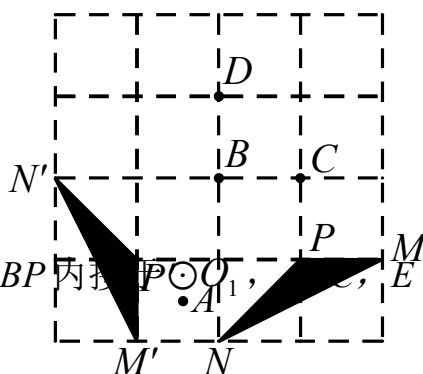
5. 如图, $\triangle ABC$ 中, 点 D, E 分别在 AB, AC 上, $DE \parallel BC$. 若 $AD=1, BD=2$, 则 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ABC$ 的面积之比为

- A. 1:2 B. 1:3
C. 1:4 D. 1:9



6. 如图, 在正方形网格中, $\triangle MPN$ 绕某一点旋转某一角度得到 $\triangle M'P'N'$, 则旋转中心可能是

- A. 点 A
B. 点 B
C. 点 C
D. 点 D

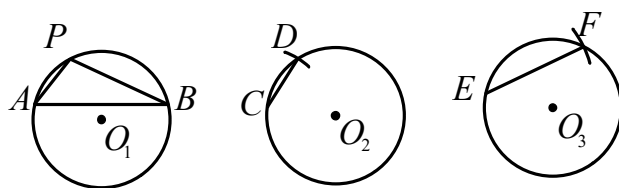


7. 已知 $\odot O_1, \odot O_2, \odot O_3$ 是等圆, $\triangle ABP$ 内接于 $\odot O_1$, 点 C, E 分别在 $\odot O_2, \odot O_3$ 上, 如图,

- ①以 C 为圆心, AP 长为半径作弧交 $\odot O_2$ 于点 D , 连接 CD ;
- ②以 E 为圆心, BP 长为半径作弧交 $\odot O_3$ 于点 F , 连接 EF .

下面有四个结论:

- ① $CD + EF = AB$
- ② $\widehat{CD} + \widehat{EF} = \widehat{AB}$
- ③ $\angle CO_2D + \angle EO_3F = \angle AO_1B$
- ④ $\angle CDO_2 + \angle EFO_3 = \angle P$



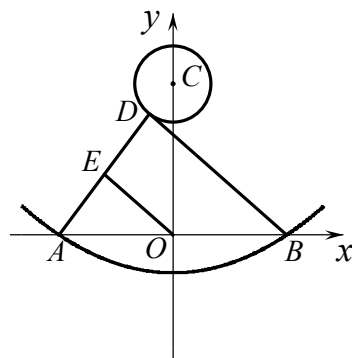
所有正确结论的序号是

- A. ①②③④ B. ①②③ C. ②④ D. ②③④



8. 如图，抛物线 $y = \frac{1}{9}x^2 - 1$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点， D 是以点 $C(0, 4)$ 为圆心，1 为半径的圆上的动点， E 是线段 AD 的中点，连接 OE ， BD ，则线段 OE 的最小值是

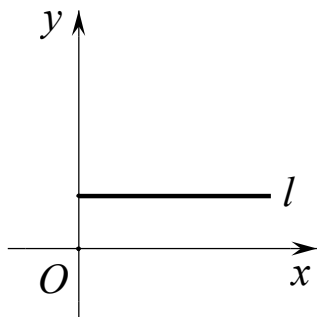
- A. 2 B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
 C. $\frac{5}{2}$ D. 3



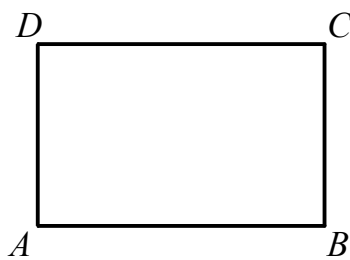
二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. 点 $(-1, -3)$ 关于原点的对称点的坐标为_____.

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，射线 l 的端点为 $(0, 1)$ ， $l \parallel x$ 轴，请写出一个图象与射线 l 有公共点的反比例函数的表达式：_____.



第 10 题图

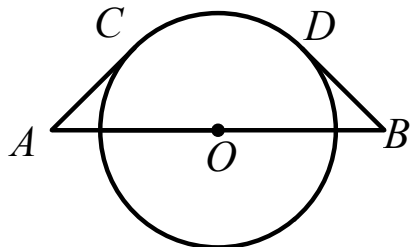


第 11 题图

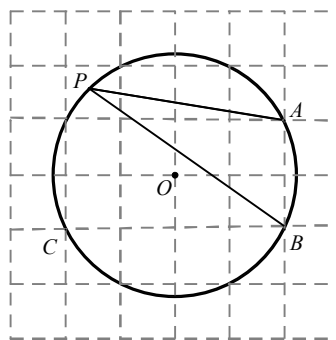
11. 如果一个矩形的宽与长的比等于黄金数 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ （约为 0.618），就称这个矩形为黄金矩形. 如图，矩形 $ABCD$ 为黄金矩形，宽 $AD = \sqrt{5} - 1$ ，则长 AB 为_____.



12. 如图，线段 AB 经过 $\odot O$ 的圆心， AC ， BD 分别与 $\odot O$ 相切于点 C ， D 。若 $AC=BD=1$ ， $\angle A=45^\circ$ ，则 CD 的长度为_____。



第 12 题图



第 13 题图

13. 如图，在正方形网格中，点 A ， B ， C 在 $\odot O$ 上，并且都是小正方形的顶点， P 是 ACB 上任意一点，则 $\angle P$ 的正切值为_____。

14. 若抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3$ 与 x 轴交于两点，分别是 $(m, 0)$ ， $(n, 0)$ ，则 $m+n$ 的值为_____。

15. 为了打赢脱贫攻坚战，某村计划将该村的特产柑橘运到 A 地进行销售. 由于受道路条件的限制，需要先将柑橘由公路运到火车站，再由铁路运到 A 地. 村里负责销售的人员从该村运到火车站的所有柑橘中随机抽取若干柑橘，进行了“柑橘完好率”统计，获得的数据记录如下表：

柑橘总质量 n/kg	100	150	200	250	300	350	400	450	500
完好柑橘质量 m/kg	92.40	138.45	183.80	229.50	276.30	322.70	367.20	414.45	459.50
柑橘完好的频	0.924	0.923	0.919	0.918	0.921	0.922	0.918	0.921	0.919



率 $\frac{m}{n}$									
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--

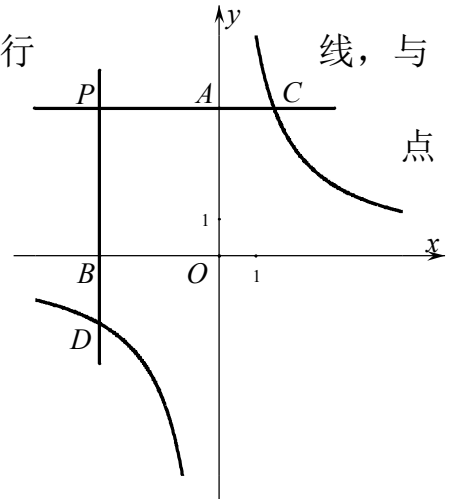
①估计从该村运到火车站柑橘完好的概率为_____（结果保留小数点后三位）；

②若从该村运到 A 地柑橘完好的概率为 0.880，估计从火车站运到 A 地柑橘完好的概率为_____.

16. 如图，分别过第二象限内的点 P 作 x ， y 轴的平行

线，与 y ， x 轴分别交于点 A ， B ，与双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 分别交于

C ， D .



下面三个结论，

①存在无数个点 P 使 $S_{\triangle AOC} = S_{\triangle BOD}$ ；

②存在无数个点 P 使 $S_{\triangle POA} = S_{\triangle POB}$ ；

③存在无数个点 P 使 $S_{\text{四边形} OAPB} = S_{\triangle ACD}$.

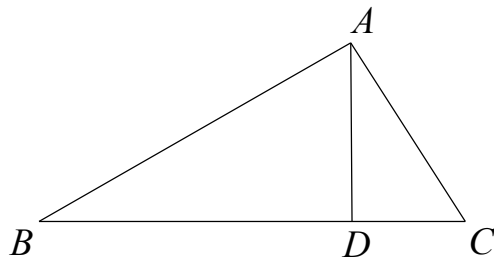
所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27，28 题，每小题 7 分）

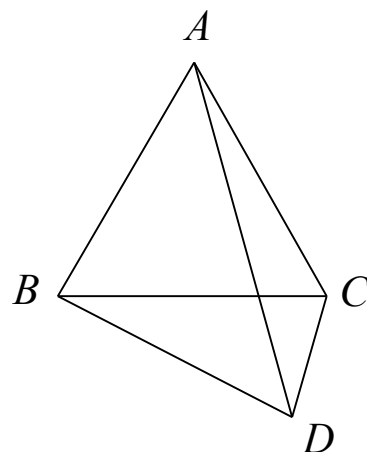
17. 计算： $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$.



18. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=30^\circ$ ， $\tan C=\frac{4}{3}$ ， $AD \perp BC$ 于点 D 。若 $AB=8$ ，求 BC 的长。



19. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，将 BC 边绕点 B 顺时针旋转 30° ，得到线段 BD ，连接 AD ， CD ，求 $\angle ADC$ 的度数。



20. 已知一次函数 $y_1 = kx + m (k \neq 0)$ 和二次函数 $y_2 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 部分自变量和对应的函数值如下表:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y_1	...	0	1	2	3	4	...
y_2	...	0	-1	0	3	8	...

(1) 求 y_2 的表达式;

(2) 关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > kx + m$ 的解集是__.

21. 筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具, 彰显了我国古代劳动人民的智慧, 如图 1, 点 P 表示筒车的一个盛水桶. 如图 2, 当筒车工作时, 盛水桶的运行路径是以轴心 O 为圆心, 5m 为半径的圆, 且圆心在水面上方. 若圆被水面截得的弦 AB 长为 8m , 求筒车工作时, 盛水桶在水面以下的最大深度.



图 1

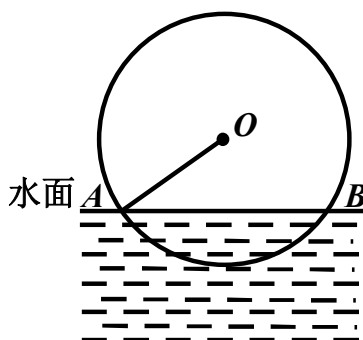


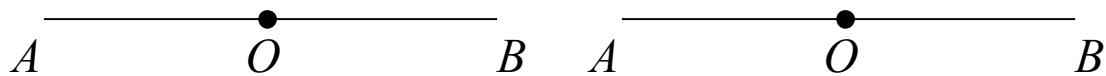
图 2



22. 在平面内, O 为线段 AB 的中点, 所有到点 O 的距离等于 OA 的点组成图形 W . 取 OA 的中点 C , 过点 C 作 $CD \perp AB$ 交图形 W 于点 D , D 在直线 AB 上方, 连接 AD , BD .

(1) 求 $\angle ABD$ 的度数;

(2) 若点 E 在线段 CA 的延长线上, 且 $\angle ADE = \angle ABD$, 求直线 DE 与图形 W 的公共点个数.



备用图



23 阅读下列材料：

小军遇到这样一个问题：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ 。若 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $AP=1$ ，求 BP 的长。

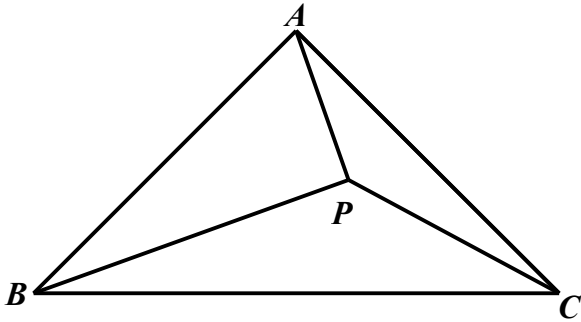


图1

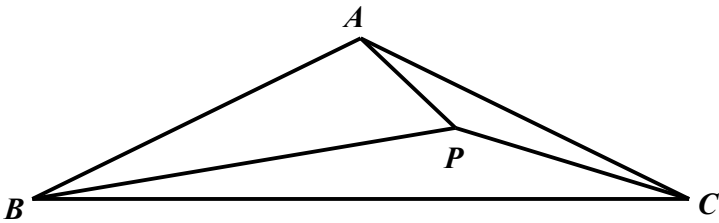


图2

小军的思路是：根据已知条件可以证明 $\triangle ACP \sim \triangle CBP$ ，进一步推理可得 BP 的长。

请回答： $\because AB=AC$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB$$

$$\because \angle PCB = \angle PBA$$

$$\therefore \angle PCA = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\because \angle PAC = \angle PCB$$

$$\therefore \triangle ACP \sim \triangle CBP$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{CB}$$

$$\because \angle ACB = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ$$



$$\therefore \frac{AC}{CB} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\therefore AP = 1$$

$$\therefore PC = \sqrt{2}$$

$$\therefore PB = \underline{\hspace{2cm}}.$$

参考小军的思路，解决问题：

如图 2，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， P 是 $\triangle ABC$ 内一点， $\angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$ ，

若 $\angle ACB = 30^\circ$ ，求 $\frac{AP}{BP}$ 的值.

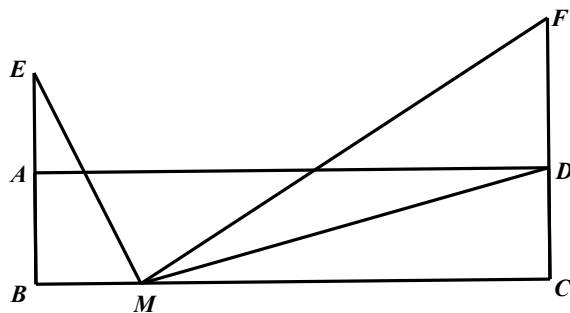
24. 点 A 是反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 的图象 l_1 上一点，直线 $AB \parallel x$ 轴，交反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ ($x > 0$) 的图象 l_2 于点 B ，直线 $AC \parallel y$ 轴，交 l_2 于点 C ，直线 $CD \parallel x$ 轴，交 l_1 于点 D .

(1) 若点 $A(1, 1)$ ，求线段 AB 和 CD 的长度；

(2) 对于任意的点 $A(a, b)$ ，判断线段 AB 和 CD 的大小关系，并证明.



25. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 是 BA 延长线上的定点， M 为 BC 边上的一个动点，连接 ME ，将射线 ME 绕点 M 顺时针旋转 76° ，交射线 CD 于点 F ，连接 MD 。



小东根据学习函数的经验，对线段 BM 、 DF 、 DM 的长度之间的关系进行了探究。

下面是小东探究的过程，请补充完整：

(1) 对于点 M 在 BC 上的不同位置，画图，测量，得到了线段 BM 、 DF 、 DM 的长度的几组值，如下表：

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8	位置 9
BM/cm	0.00	0.53	1.00	1.69	2.17	2.96	3.46	3.79	4.00
DF/cm	0.00	1.00	1.74	2.49	2.69	2.21	1.14	0.00	1.00
DM/cm	4.12	3.61	3.16	2.52	2.09	1.44	1.14	1.02	1.00

在 BM 、 DF 、 DM 的长度这三个量中，确定___的长度是自变量，___的长度和___的长度都是这个自变量的函数。

(2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中，画出 (1) 中所确定的函数的图象；

(3) 结合画出的函数图象，解决问题，当 $DF=2cm$ 时， DM 的长度约为___ cm 。



26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx$ 经过点 $(3, 3)$ 。

(1) 用含 a 的式子表示 b ；

(2) 直线 $y = x + 4a + 4$ 与直线 $y = 4$ 交于点 B ，求点 B 的坐标（用含 a 的式子表示）。

(3) 在 (2) 的条件下，已知点 $A(1, 4)$ ，若抛物线与线段 AB 恰有一个公共点，直接写出 a ($a < 0$) 的取值范围。



27. 已知 $\angle MON = 120^\circ$ ，点 A, B 分别在 ON, OM 边上，且 $OA = OB$ ，点 C 在线段 OB 上（不与点 O, B 重合），连接 CA 。将射线 CA 绕点 C 逆时针旋转 120° 得到射线 CA' ，将射线 BO 绕点 B 逆时针旋转 150° 与射线 CA' 交于点 D 。

(1) 根据题意补全图 1；

(2) 求证：① $\angle OAC = \angle DCB$ ；

② $CD = CA$ (提示：可以在 OA 上截取 $OE = OC$ ，连接 CE)；

(3) 点 H 在线段 AO 的延长线上，当线段 OH, OC, OA 满足什么等量关系时，对于任意的点 C 都有 $\angle DCH = 2\angle DAH$ ，写出你的猜想并证明。

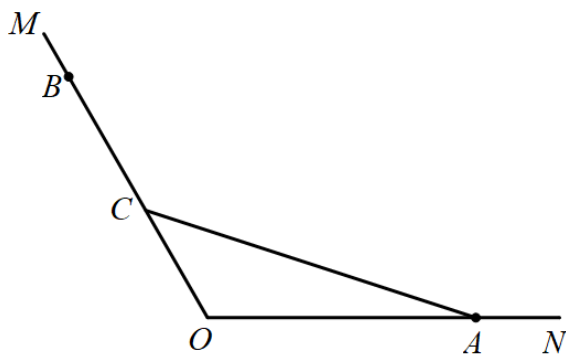
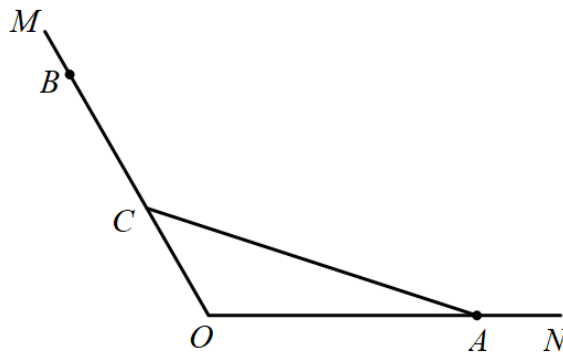


图 1



备用图



28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(0, 2)$, 点 B 在 x 轴上, 以 AB 为直径作 $\odot C$, 点 P 在 y 轴上, 且在点 A 上方, 过点 P 作 $\odot C$ 的切线 PQ , Q 为切点, 如果点 Q 在第一象限, 则称 Q 为点 P 的离点, 例如, 图 1 中的 Q 为点 P 的一个离点.

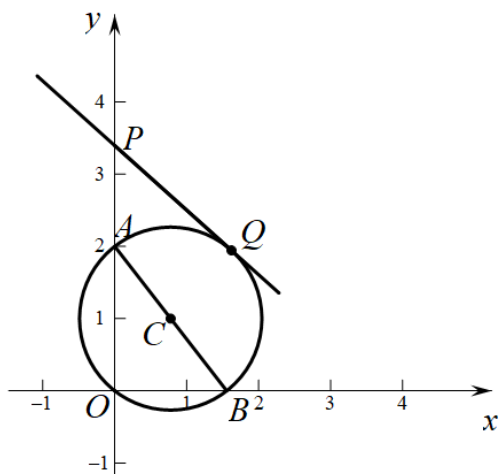


图 1

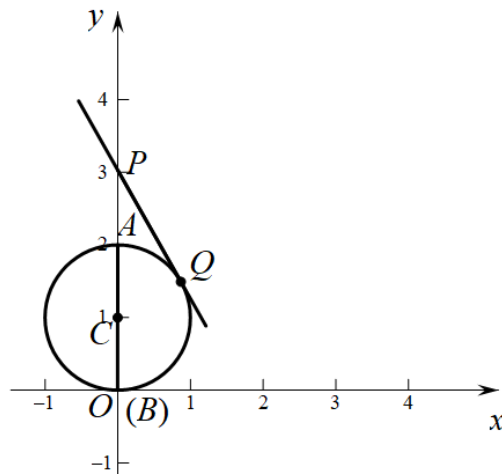


图 2

(1) 已知点 $P(0, 3)$, Q 为 P 的离点.

①如图 2, 若 $B(0, 0)$, 则圆心 C 的坐标为_____, 线段 PQ 的长为_____;

②若 $B(2, 0)$, 求线段 PQ 的长;

(2) 已知 $1 \leq PA \leq 2$, 直线 $l: y = kx + k + 3$ ($k \neq 0$).

①当 $k = 1$ 时, 若直线 l 上存在 P 的离点 Q , 则点 Q 纵坐标 t 的最大值为_____;

②记直线 $l: y = kx + k + 3$ ($k \neq 0$) 在 $-1 \leq x \leq 1$ 的部分为图形 G , 如果图形 G 上存在 P 的离点, 直接写出 k 的取值范围.

