2022 北京五十七中初二（下）期中

数　　学

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）.

1.（3 分）下列二次根式中，不能与 $\sqrt{2}$ 合并的是(　　)

A．$\sqrt{\frac{1}{2}}$　　B．$\sqrt{8}$　　C．$\sqrt{12}$　　D．$\sqrt{18}$

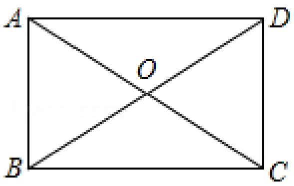
2.（3 分）下列二次根式中，是最简二次根式的是(　　)

A．$\sqrt{15}$　　B．$\sqrt{12}$　　C．$\sqrt{\frac{1}{3}}$　　D．$\sqrt{9}$

3.（3 分）下列各组数中，以它们为边长的线段不能构成直角三角形的是(　　)

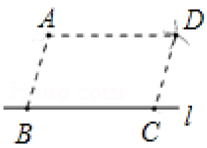
A．1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$　　B．3，4，5　　C．5，12，13　　D．2，2，3

4.（3 分）如图，矩形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 交于 O 点．若 $\angle AOB=60^{\circ}$，$AC=8$，则 AB 的长为(　　)



A．4　　B．$4\sqrt{3}$　　C．3　　D．5

5.（3 分）如图，点 A 是直线 l 外一点，在 l 上取两点 B，C，分别以 A，C 为圆心，BC，AB 长为半径画弧，两弧交于点 D，分别连接 AB、AD、CD，则四边形 $ABCD$ 一定是(　　)

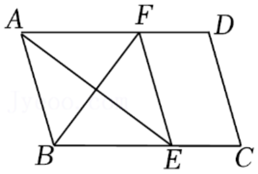


A．平行四边形　　B．矩形　　C．菱形　　D．正方形

6.（3 分）若一直角三角形的两边为 5 和 12，则它第三边的长为(　　)

A．13　　B．$\sqrt{119}$　　C．13 或 $\sqrt{129}$　　D．13 或 $\sqrt{119}$

7.（3 分）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，$\angle ABC$ 的平分线交 AD 于点 F，若 $BF=6$，$AB=5$，则 AE 的长为(　　)



A．6.5　　B．7　　C．7.5　　D．8

8.（3 分）下列命题中，正确的是(　　)

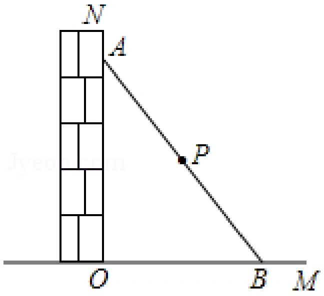
A．有一组邻边相等的四边形是菱形

B．对角线互相平分且垂直的四边形是矩形

C．两组邻角相等的四边形是平行四边形

D．对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形

9．（3 分）如图，一根木棍斜靠在与地面 (OM) 垂直的墙 (ON) 上，设木棍中点为 P，若木棍 A 端沿墙下滑，且 B 沿地面向右滑行．在此滑动过程中，点 P 到点 O 的距离（　　）

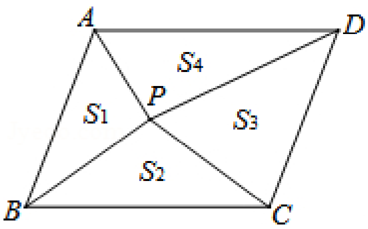


A．不变　　　　B．变小　　　　C．变大　　　　D．无法判断

10．（3 分）如图，点 P 是▱$ABCD$ 内的任意一点，连接 PA、PB、PC、PD，得到 ΔPAB、ΔPBC、ΔPCD、ΔPDA，设它们的面积分别是 S_1、S_2、S_3、S_4，给出如下结论：

①$S_1+S_3=S_2+S_4$；②如果 $S_4>S_2$，则 $S_3>S_1$；③若 $S_3=2S_1$，则 $S_4=2S_2$；④若 $S_1-S_2=S_3-S_4$，则 P 点一定在对角线 BD 上．

其中正确的有（　　）



A．①③　　　　B．②④　　　　C．②③　　　　D．①④

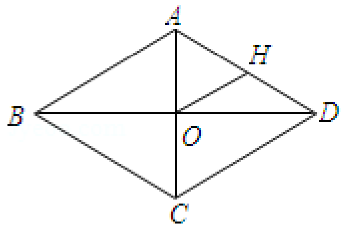
二、填空：（每小题 3 分，共 8 个小题，共 24 分）

11．（3 分）如果两个最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 能合并，那么 $a=$_____．

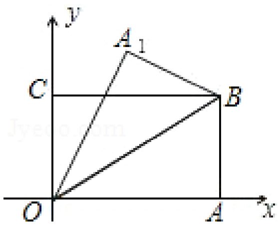
12．（3 分）若式子 $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是____．

13．（3 分）$\sqrt{(3-b)^2}=3-b$，则 b 的取值为 ____．

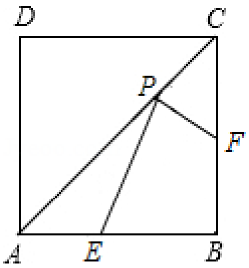
14．（3 分）如图所示，菱形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，H 为 AD 边中点，菱形 $ABCD$ 的周长为 24，则 OH 的长等于____．



15．（3 分）如图，在平面直角坐标系中，将矩形 $OABC$ 沿 OB 对折，使点 A 落在点 A_1 处，已知 $OA=\sqrt{3}$，$AB=1$，则点 A_1 的坐标是____．

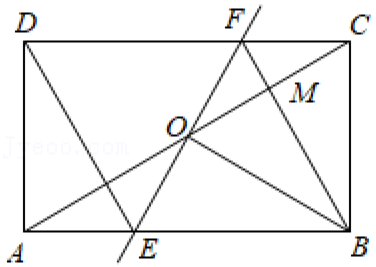


16.（3 分）如图，正方形 $ABCD$ 的面积是 2， E ， F ， P 分别是 AB ， BC ， AC 上的动点， $PE+PF$ 的最小值等于____.



17.（3 分）在 RtΔABC 中， $\angle ACB=90^{\circ}$ ， $AC=BC=1$ ，点 Q 在直线 BC 上，且 $AQ=2$ ，则线段 BQ 的长为____.

18.（3 分）如图，矩形 $ABCD$ 中， O 为 AC 的中点，过点 O 的直线 EF 分别与 AB ， CD 交于点 E ， F ，连接 BF 交 AC 于点 M ，连接 DE ， BO ，若 $\angle CAB=30^{\circ}$ ， $FO=FC$ ，则下列结论：① FB 垂直平分 OC ；② $\Delta EOB\cong\Delta CMB$ ；③ $DE=EF$ ；④ $S_{\Delta AOE}:S_{\Delta BCM}=2:3$. 其中正确的个数是 ____.



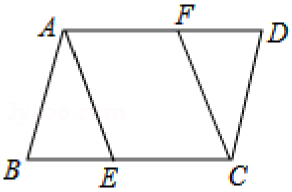
三、解答题：（19 题 8 分，20，21，22，23 题每小题 8 分，24，25，26 每题 6 分共计 46 分），

19.（8 分）计算：

（1） $\sqrt{12}+\sqrt{20}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ ；

（2） $(\sqrt{12}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}-2\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

20.（6 分）如图，在▱$ABCD$ 中，点 E ， F 分别在 BC ， AD 上， $AE//CF$ ，请说明 $\angle AFC$ 与 $\angle AEC$ 的大小关系，并说明理由.



21.（6 分）已知：在 ΔABC 中， $\angle ABC=90^{\circ}$.

求作：矩形 $ABCD$.

作法：如下，

①分别以点 A ， C 为圆心，大于 $\dfrac{1}{2}AC$ 的同样长为半径作弧，两弧分别交于点 M ， N ；

②作直线 MN，交边 AC 于点 O；

③作射线 BO，以点 O 为圆心，以 BO 长为半径作弧，与射线 BO 的另一个交点为 D，连接 CD，AD，

所以四边形 $ABCD$ 就是所求作的矩形.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明.

证明：$\because$ 直线 MN 是 AC 的垂直平分线，

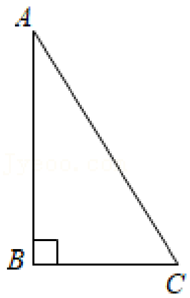
$\therefore AO=OC$.

$\because BO=DO$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形(____)（填推理的依据）.

$\because \angle ABC=90^{\circ}$，

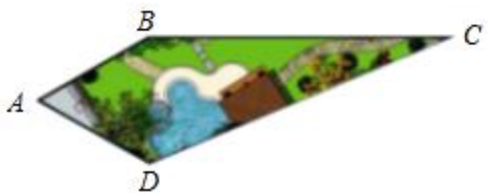
$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形(____)（填推理的依据）.



22.（6 分）小东和小明要测量校园里的一块四边形场地 $ABCD$（如图所示）的周长，其中边 CD 上有水池及建筑遮挡，没有办法直接测量其长度

小东经测量得知 $AB=AD=5m$，$\angle A=60^{\circ}$，$BC=12m$，$\angle ABC=150^{\circ}$

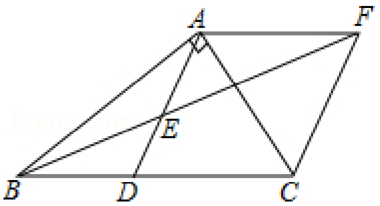
小明说根据小东所得的数据可以求出 CD 的长度．你同意小明的说法吗？若同意，请求出 CD 的长度；若不同意，请说明理由.



23.（8 分）在 RtΔABC 中，$\angle BAC=90^{\circ}$，D 是 BC 的中点，E 是 AD 的中点，过点 A 作 $AF//BC$ 交 BE 的延长线于点 F.

（1）证明四边形 $ADCF$ 是菱形；

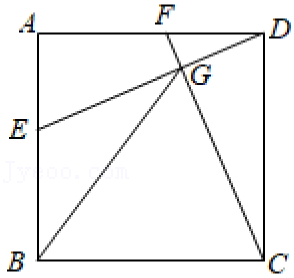
（2）若 $AC=4$，$AB=5$，求菱形 $ADCF$ 的面积.

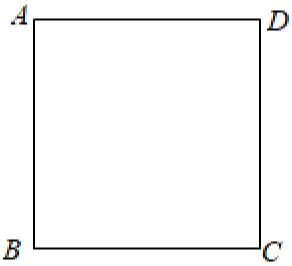


24.（8 分）如图，在正方形 $ABCD$ 中，E 为 AB 边上一点（不与点 A，B 重合），$CF\perp DE$ 于点 G，交 AD 于点 F，连接 BG.

（1）求证：$AE=DF$；

（2）是否存在点 E 的位置，使得 ΔBCG 为等腰三角形？若存在，写出一个满足条件的点 E 的位置并证明；若不存在，说明理由．





备用图

25．（12 分）请阅读下列材料：问题：如图 1，点 A、B 在直线 l 的同侧，在直线 l 上找一点 P，使得 $AP+BP$ 的值最小．小明的思路是：如图 2，作点 A 关于直线 l 的对称点 A'，连接 $A'B$，则 $A'B$ 与直线 l 的交点 P 即为所求．

请你参考小明同学的思路，探究并解决下列问题：

（1）如图 3，在图 2 的基础上，设 AA' 与直线 l 的交点为 C，过点 B 作 $BD\perp l$，垂足为 D，若 $CP=1$，$PD=2$，$AC=1$，写出 $AP+BP$ 的值；

（2）将（1）中的条件"$AC=1$"去掉，换成"$BD=4-AC$"，其它条件不变，写出此时 $AP+BP$ 的值；

（3）请结合图形，求出 $\sqrt{(2m-2)^2+1}+\sqrt{(8-2m)^2+4}$ 的最小值．

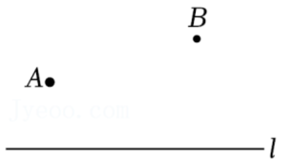


图1

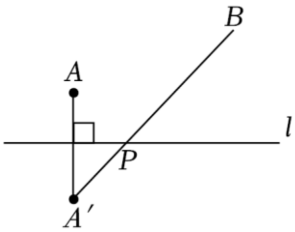


图2

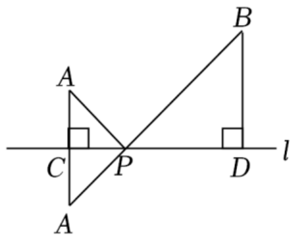


图3

26．（12 分）阅读下列材料：

问题：如图 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是 AD 上一点，$AE=AB$，$\angle EAB=60^\circ$，过点 E 作直线 EF，在 EF 上取一点 G，使得 $\angle EGB=\angle EAB$，连接 AG．

（1）求证：$EG=AG+BG$．

（2）如果将原问题中的"$\angle EAB=60^\circ$"改为"$\angle EAB=90^\circ$"，原问题中的其它条件不变（如图 2），请探究线段 EG、AG、BG 之间的数量关系，并证明你的结论．

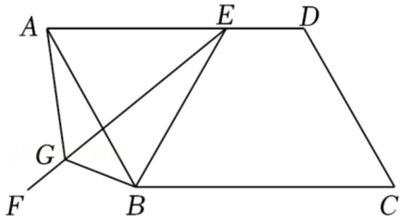


图1

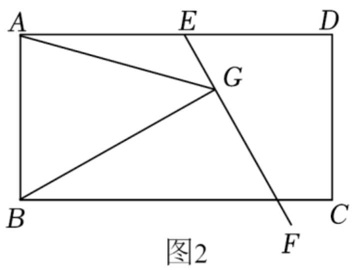


图2

参考答案

一、选择题：（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分.在每小题的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的）.

1.【分析】根据二次根式的乘除法，可化简二次根式，根据最简二次根式的被开方数相同，可得答案.

【解答】解：A、$\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 A 能与 $\sqrt{2}$ 合并；

B、$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故 B 能与 $\sqrt{2}$ 合并；

C、$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，故 C 不能与 $\sqrt{2}$ 合并；

D、$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$，故 D 能与 $\sqrt{2}$ 合并；

故选：C.

【点评】本题考查了同类二次根式，被开方数相同的最简二次根式是同类二次根式.

2.【分析】利用最简二次根式的定义判断即可.

【解答】解：A、$\sqrt{15}$ 为最简二次根式，符合题意；

B、$\sqrt{12}=2\sqrt{3}$，不合题意；

C、$\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，不合题意；

D、$\sqrt{9}=3$，不合题意，

故选：A.

【点评】此题考查了最简二次根式，熟练掌握最简二次根式的定义是解本题的关键.

3.【分析】欲求证是否为直角三角形，利用勾股定理的逆定理即可．这里给出三边的长，只要验证两小边的平方和等于最长边的平方即可.

【解答】解：A、$1^2+(\sqrt{2})^2=3=(\sqrt{3})^2$，故是直角三角形，故错误；

B、$4^2+3^2=25=5^2$，故是直角三角形，故错误；

C、$5^2+12^2=169=13^2$，故是直角三角形，故错误；

D、$2^2+2^2=8\neq 3^2$，故不是直角三角形，故正确.

故选：D.

【点评】本题考查勾股定理的逆定理的应用．判断三角形是否为直角三角形，已知三角形三边的长，只要利用勾股定理的逆定理加以判断即可.

4.【分析】先由矩形的性质得出 $OA=OB$，再证明 ΔAOB 是等边三角形，得出 $AB=OB=4$ 即可.

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore OA=\frac{1}{2}AC$，$OB=\frac{1}{2}BD=4$，$AC=BD$，

$\therefore OA=OB$，

$\because \angle AOB=60^\circ$，

$\therefore \Delta AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB=OB=4$；

故选：A.

【点评】本题考查了矩形的性质、等边三角形的判定与性质；熟练掌握矩形的性质，证明三角形是等边三角形是解决问题的关键.

5.【分析】利用平行四边形的判定方法可以判定四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

【解答】解：$\because$ 分别以 A 、 C 为圆心， BC 、 AB 长为半径画弧，两弧交于点 D，

$\therefore AD = BC \quad AB = CD$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（两组对边分别相等的四边形是平行四边形）.

故选：A.

【点评】本题考查了平行四边形的判定，解题的关键是熟记平行四边形的判定方法.

6.【分析】此题要考虑两种情况：当所求的边是斜边时；当所求的边是直角边时.

【解答】解：由题意得：

当所求的边是斜边时，则有 $\sqrt{5^2+12^2}=13$；

当所求的边是直角边时，则有 $\sqrt{12^2-5^2}=\sqrt{119}$.

故选：D.

【点评】本题考查了勾股定理的运用，难度不大，但要注意此类题的两种情况，很多学生只选 13.

7.【分析】先证明四边形 $ABEF$ 是菱形，得出 $AE \perp BF$， $OA = OE$， $OB = OF = \dfrac{1}{2}BF = 3$，由勾股定理求出 OA，即可得出 AE 的长.

【解答】解：$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD//BC$，

$\therefore \angle DAE = \angle AEB$，

$\because \angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，

$\therefore \angle DAE = \angle BEA$，

$\therefore \angle BAE = \angle BEA$，

$\therefore AB = BE$，

同理可得 $AB = AF$，

$\therefore AF = BE$，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形，

$\because AB = AF$，

$\therefore$ 四边形 $ABEF$ 是菱形，

$\therefore AE \perp BF$， $OA = OE$， $OB = OF = \dfrac{1}{2}BF = 3$，

$\therefore OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$，

$\therefore AE = 2OA = 8$；

故选：D.

【点评】本题考查平行四边形的性质与判定、等腰三角形的判定、菱形的判定和性质、勾股定理等知识；熟练掌握平行四边形的性质，证明四边形 $ABEF$ 是菱形是解决问题的关键.

8．【分析】分别根据菱形、矩形、正方形及平行四边形的判定定理对各选项进行逐一分析即可．

【解答】解：A、有一组邻边相等的平行四边形是菱形，故本选项错误；

B、对角线互相平分且垂直的四边形是菱形，故本选项错误；

C、两组对角相等的四边形是平行四边形，故本选项错误；

D、对角线互相垂直且相等的平行四边形是正方形，故本选项正确．

故选：D．

【点评】本题考查的是命题与定理，熟知菱形、矩形、正方形及平行四边形的判定定理是解答此题的关键．

9．【分析】连接OP，易知OP就是斜边AB上的中线，由于直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，那么$OP=\frac{1}{2}AB$，由于AB不变，那么OP也就不变．

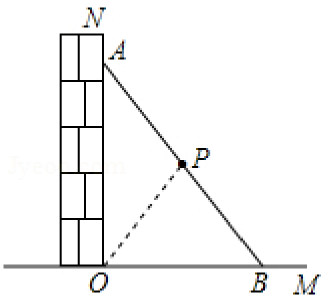
【解答】解：不变．连接OP，

在RtΔAOB中，OP是斜边AB上的中线，

那么$OP=\frac{1}{2}AB$，

由于木棍的长度不变，所以不管木棍如何滑动，OP都是一个定值．

故选：A．



【点评】本题考查了直角三角形斜边上的中线，解题的关键是知道木棍AB的长度不变，也就是斜边不变．

10．【分析】根据平行四边形的对边相等可得$AB=CD$，$AD=BC$，设点P到AB、BC、CD、DA的距离分别为h_1、h_2、h_3、h_4，然后利用三角形的面积公式列式整理即可判断出①正确；根据三角形的面积公式即可判断②③错误；根据已知进行变形，求出$S_1+S_4=S_2+S_3=S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BDC}=\frac{1}{2}S_{平行四边形ABCD}$，即可判断④．

【解答】解：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AB=CD$，$AD=BC$，

设点P到AB、BC、CD、DA的距离分别为h_1、h_2、h_3、h_4，

则$S_1=\frac{1}{2}ABh_1$，$S_2=\frac{1}{2}BCh_2$，$S_3=\frac{1}{2}CDh_3$，$S_4=\frac{1}{2}ADh_4$，

$\because \frac{1}{2}ABh_1+\frac{1}{2}CDh_3=\frac{1}{2}AB\bullet h_{AB}$，

$\frac{1}{2}BCh_2+\frac{1}{2}ADh_4=\frac{1}{2}BC\bullet h_{BC}$，

又$\because S_{平行四边形ABCD}=AB\cdot h_{AB}=BC\cdot h_{BC}$

$\therefore S_2+S_4=S_1+S_3$，故①正确；

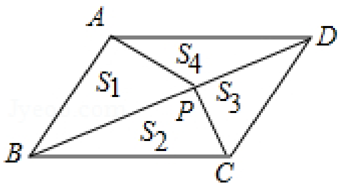
根据 $S_4>S_2$ 只能判断 $h_4>h_2$，不能判断 $h_3>h_1$，即不能得出 $S_3>S_1$，$\therefore$②错误；

根据 $S_3=2S_1$，能得出 $h_3=2h_1$，不能推出 $h_4=2h_2$，即不能推出 $S_4=2S_2$，$\therefore$③错误；

$\because S_1-S_2=S_3-S_4$，

$\therefore S_1+S_4=2_2+S_3=\dfrac{1}{2}S_{平行四边形ABCD}$，

如图所示：



此时 $S_1+S_4=S_2+S_3=S_{\Delta ABD}=S_{\Delta BDC}=\dfrac{1}{2}S_{平行四边形ABCD}$，

即 P 点一定在对角线 BD 上，$\therefore$④正确；

故选：D．

【点评】本题考查了平行四边形的性质，三角形的面积，以及平行四边形对角线上点的判定的应用，用平行四边形的面积表示出相对的两个三角形的面积的和是解题的关键，也是本题的难点．

二、填空：（每小题 3 分，共 8 个小题，共 24 分）

11．【分析】由两个最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 能合并，可得两个最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 是同类二次根式，然后根据同类二次根式的定义，可得方程 $3a-1=2a+3$，解此方程即可求得答案．

【解答】解：$\because$ 两个最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 能合并，

$\therefore$ 两个最简二次根式 $\sqrt{3a-1}$ 与 $\sqrt{2a+3}$ 是同类二次根式，

$\therefore 3a-1=2a+3$，

解得：$a=4$．

故答案为：4．

【点评】本题考查同类二次根式的概念．注意同类二次根式是化为最简二次根式后，被开方数相同的二次根式称为同类二次根式．

12．【分析】直接利用二次根式的定义分析得出答案．

【解答】解：$\because$ 式子 $\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$ 在实数范围内有意义，

$\therefore x$ 的取值范围是：$x>3$．

故答案为：$x>3$．

【点评】此题主要考查了二次根式有意义的条件，正确把握定义是解题关键．

13．【分析】根据二次根式的化简的法则可得 $3-b\geqslant 0$，从而可求解．

【解答】解：$\because \sqrt{(3-b)^2}=3-b$，

$\therefore 3-b\geqslant 0$，

解得：$b\leqslant 3$．

故答案为：$b\leqslant 3$．

【点评】本题主要考查二次根式的化简，解答的关键是由所给的式子得出$b\leqslant 3$．

14．【分析】根据已知可求得菱形的边长，再根据对角线互相垂直平分，H为AD的中点，从而求得OH的长．

【解答】解：$\because$菱形$ABCD$的周长等于24，

$\therefore AD=\dfrac{24}{4}=6$，

在RtΔAOD中，OH为斜边上的中线，

$\therefore OH=\dfrac{1}{2}AD=3$．

故答案为：3．

【点评】此题主要考查直角三角形中，斜边上的中线等于斜边的一半，还综合利用了菱形的性质．

15．【分析】本题应先根据题意得出$\angle A_1OB$和$\angle AOB$的角度．再根据三角形全等得出$\angle A_1OC$的度数，最后通过作出辅助线$A_1D\perp y$轴于点D，写出计算式，化简即可得出A_1点的坐标．

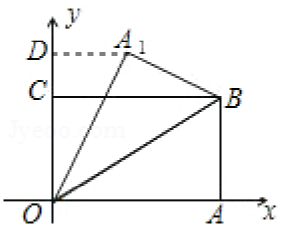
【解答】解：由$OA=\sqrt{3}$，$AB=1$可得$\tan\angle AOB=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

那么$\angle AOB=30^{\circ}$，所以$\angle A_1OB=\angle AOB=30^{\circ}$，$OA_1=OA=\sqrt{3}$，

则$\angle A_1OC=30^{\circ}$，

作$A_1D\perp y$轴于点D，利用三角函数可得$A_1D=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$DO=1.5$，

故A_1的坐标为：$(\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\dfrac{3}{2})$．



【点评】解决本题的关键是利用三角函数得到相应的角的度数，进而根据翻折求得所求点的横纵坐标．

16．【分析】过点P作$MN//AD$交AB于点M，交CD于点N，根据正方形的性质可得出$MN\perp AB$，且$PM\leqslant PE$、$PN\leqslant PF$，由此即可得出$AD\leqslant PE+PF$，再由正方形的面积为2即可得出结论．

【解答】解：过点P作$MN//AD$交AB于点M，交CD于点N，如图所示．

$\because$四边形$ABCD$为正方形，

$\therefore MN\perp AB$，

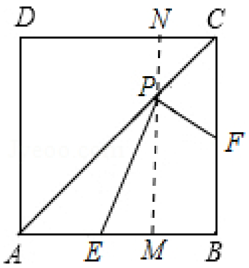
$\therefore PM\leqslant PE$（当$PE\perp AB$时取等号），$PN\leqslant PF$（当$PF\perp BC$时取等号），

$\therefore MN=AD=PM+PN\leqslant PE+PF$，

$\because$正方形$ABCD$的面积是2，

$\therefore AD=\sqrt{2}$．

故答案为：$\sqrt{2}$．

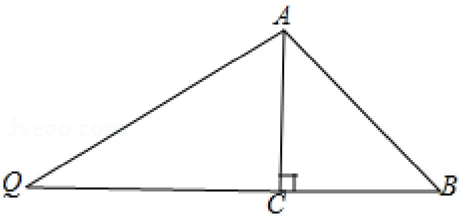


【点评】本题考查了正方形的性质，解题的关键是找出 $AD \leqslant PE+PF$ ．本题属于中档题，难度不大，解决该题型题目时，根据正方形的性质找出 $PE+PF$ 最小时，三点的位置关系是关键．

17．【分析】分两种情况：（1）点 Q 在线段 BC 的延长线上；（2）点 Q 在线段 CB 的延长线上，分别用勾股定理求得 QC 的长，情况（1）中 $BQ=QC+BC$，情况（2）中 $BQ=QC-BC$ ．

【解答】解：分两种情况：

（1）点 Q 在线段 BC 的延长线上，如图：



$\because \angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore \angle ACQ=180^{\circ}-90^{\circ}=90^{\circ}$，

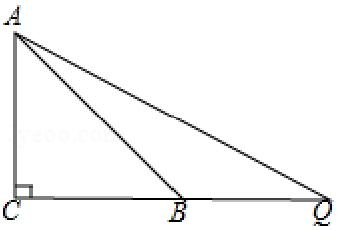
$\because AC=1$， $AQ=2$，

$\therefore QC=\sqrt{2^{2}-1^{2}}=\sqrt{3}$，

$\because BC=1$，

$\therefore BQ=QC+BC=\sqrt{3}+1$；

（2）点 Q 在线段 CB 的延长线上，如图：



$\because \angle ACB=90^{\circ}$， $AC=1$， $AQ=2$，

$\therefore QC=\sqrt{2^{2}-1^{2}}=\sqrt{3}$，

$\because BC=1$，

$\therefore BQ=QC-BC=\sqrt{3}-1$ ．

综上，线段 BQ 的长为 $\sqrt{3}+1$ 或 $\sqrt{3}-1$ ．

故答案为： $\sqrt{3}+1$ 或 $\sqrt{3}-1$ ．

【点评】本题考查了勾股定理在等腰直角三角形及一般的直角三角形的边长计算中的应用，数形结合并分类讨论是解题的关键．

18．【分析】由矩形的性质和直角三角形的性质可得$AO=CO=OB$，可得$OB=BC$，且$FO=FC$，可证BF垂直平分OC，故①正确；由“ASA”可证$\Delta EOB\cong\Delta FCB$，故②错误；由“$ASA$”可证$\Delta AOE\cong\Delta COF$，可得$OE=OF$，由线段垂直平分线的性质可得$DE=DF=EF$，故③正确；由直角三角形的性质可得$BM=3FM$，由三角形的面积公式可求$S_{\Delta AOE}:S_{\Delta BCM}=2:3$，故④正确，即可求解．

【解答】解：$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore AB//CD$，$AB=CD$，$\angle ABC=90^{\circ}$，

又$\because\angle CAB=30^{\circ}$，

$\therefore\angle ACB=60^{\circ}$，$AC=2BC$，

$\because O$为AC的中点，$\angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore AO=CO=OB$，

$\therefore BC=OC=OB$，

又$\because OF=FC$，

$\therefore BF$垂直平分OC，故①正确；

$\because BC=OC=OB$，

$\therefore\Delta BOC$是等边三角形，

$\therefore\angle CBO=\angle COB=60^{\circ}$，

$\therefore\angle EOB=30^{\circ}$，

$\because BO=CO$，BF垂直平分OC，$OF=FC$，

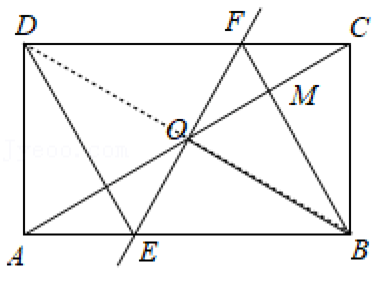
$\therefore\angle CBF=\angle OBF=30^{\circ}$，$\angle BFO=\angle BFC=60^{\circ}$，$OM=MC$，

$\therefore\angle CBF=\angle EBO=30^{\circ}$，$\angle BOF=90^{\circ}$，

$\therefore\angle BCF=\angle BOE=90^{\circ}$，

$\therefore\Delta EOB\cong\Delta FCB(ASA)$，故②错误；

如图，连接BD，



$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore BD$与AC互相平分，

$\therefore BD$过点O，与BO共线，

$\because AB//CD$，

$\therefore\angle BAC=\angle DCA=30^{\circ}$，

又$\because AO=CO$，$\angle AOE=\angle COF$，

$\therefore\Delta AOE\cong\Delta COF(ASA)$，

$\therefore OE=OF$，

又$\because \angle FOB = 90^\circ$，

$\therefore DE = DF$，

$\because \angle BFO = \angle BFC = 60^\circ$，

$\therefore \angle DFE = 60^\circ$，

$\therefore \Delta DEF$是等边三角形，

$\therefore DF = DE = EF$，故③正确；

$\because \Delta AOE \cong \Delta COF$，

$\therefore S_{\Delta AOE} = S_{\Delta COF}$，

$\because \angle CBF = 30^\circ$，$\angle BCD = 90^\circ$，

$\therefore BF = 2CF$，

$\because \angle DCA = 30^\circ$，$\angle CMF = 90^\circ$，

$\therefore CF = 2FM$，

$\therefore BF = 4FM$，

$\therefore BM = 3FM$，

$\therefore \frac{1}{3}S_{\Delta BCO} = S_{\Delta FOC} = S_{\Delta AOE}$，

$\because OM = MC$，

$\therefore S_{\Delta BCM} = \frac{1}{2}S_{\Delta BOC}$，

$\therefore S_{\Delta AOE} : S_{\Delta BCM} = 2:3$，故④正确，

故正确的个数为3个，

故答案为3个.

【点评】本题是四边形综合题，考查了矩形的性质，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，直角三角形的性质等知识，证明ΔBOC是等边三角形是解题的关键.

三、解答题：（19题8分，20，21，22，23题每小题8分，24，25，26每题6分共计46分），

19.【分析】(1）先化简，去括号，再算加减即可；

（2）先算乘法，化简，再算加减即可.

【解答】解：(1）$\sqrt{12} + \sqrt{20} - (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + \sqrt{5}$；

（2）$(\sqrt{12} + \sqrt{3}) \times \sqrt{6} - 2\sqrt{\frac{1}{2}}$

$= 6\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= 8\sqrt{2}$.

【点评】本题主要考查二次根式的混合运算，解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

20.【分析】平行四边形$ABCD$中，$BC // AD$，可知$\angle DAE = \angle AEB$，又$AE // CF$，可知$\angle DFC = \angle DAE$，继而得出$\angle DFC = \angle AEB$，从而得出结论.

【解答】解：$\angle AFC=\angle AEC$，

理由如下：$\because$ 平行四边形 $ABCD$ 中，$BC//AD$，

又 $AE//CF$，

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 为平行四边形，

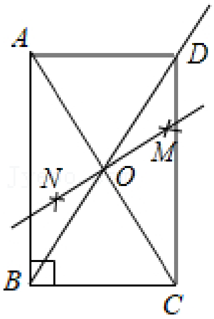
$\therefore \angle AEC=\angle AFC$．

【点评】本题考查了平行四边形的性质，属于基础题，比较容易解答，注意熟练掌握平行四边形的性质是关键．

21．【分析】（1）根据要求作出图形即可．

（2）根据有一个角是直角的平行四边形是矩形证明即可．

【解答】（1）解：如图，四边形 $ABCD$ 即为所求．



（2）证明：$\because$ 直线 MN 是 AC 的垂直平分线，

$\therefore AO=OC$．

$\because BO=DO$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形（对角线互相平分的四边形是平行四边形），

$\because \angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形（有一个角是直角的平行四边形是矩形）．

故答案为：对角线互相平分的四边形是平行四边形，有一个角是直角的平行四边形是矩形．

【点评】本题考查作图－复杂作图，平行四边形的判定和性质，矩形的判定等知识，解题的关键是正确作出点 D，属于中考常考题型．

22．【分析】直接利用等边三角形的判定方法得出 ΔABD 是等边三角形，再利用勾股定理得出答案．

【解答】解：同意小明的说法．

理由：连接 BD，

$\because AB=AD=5m$，$\angle A=60^{\circ}$，

$\therefore \Delta ABD$ 是等边三角形，

$\therefore BD=5m$，$\angle ABD=60^{\circ}$，

$\because \angle ABC=150^{\circ}$，

$\therefore \angle DBC=90^{\circ}$，

$\because BC=12m$，$BD=5m$，

$\therefore DC=\sqrt{12^{2}+5^{2}}=13(m)$，

答：CD 的长度为 $13m$．

【点评】此题主要考查了勾股定理的应用以及等边三角形的判定，正确得出ΔABD是等边三角形是解题关键.

23.【分析】(1）首先根据题意画出图形，由E是AD的中点，$AF//BC$，易证得$\Delta AFE\cong\Delta DBE$，即可得$AF=BD$，又由在$Rt\Delta ABC$中，$\angle BAC=90^{\circ}$，$D$是$BC$的中点，可得$AD=BD=CD=AF$，证得四边形$ADCF$是平行四边形，继而判定四边形$ADCF$是菱形；

（2）首先连接DF，易得四边形$ABDF$是平行四边形，即可求得DF的长，然后由菱形的面积等于其对角线积的一半，求得答案.

【解答】(1）证明：如图，$\because AF//BC$，

$\therefore\angle AFE=\angle DBE$，

$\because E$是AD的中点，AD是BC边上的中线，

$\therefore AE=DE$，$BD=CD$，

在ΔAFE和ΔDBE中，

$$\begin{cases}\angle AFE=\angle DBE\\ \angle FEA=\angle BED\\ AE=DE\end{cases}，$$

$\therefore\Delta AFE\cong\Delta DBE(AAS)$；

$\therefore AF=DB$.

$\because DB=DC$，

$\therefore AF=CD$，

$\therefore$四边形$ADCF$是平行四边形，

$\because\angle BAC=90^{\circ}$，$D$是$BC$的中点，

$\therefore AD=DC=\dfrac{1}{2}BC$，

$\therefore$四边形$ADCF$是菱形；

（2）解：连接DF，

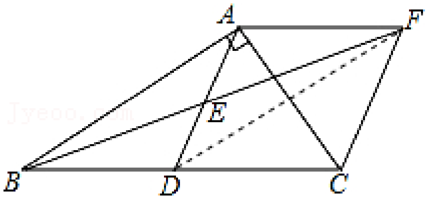
$\because AF//BC$，$AF=BD$，

$\therefore$四边形$ABDF$是平行四边形，

$\therefore DF=AB=5$，

$\because$四边形$ADCF$是菱形，

$\therefore S=\dfrac{1}{2}AC\cdot DF=10$.



【点评】此题考查了菱形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质．注意根据题意画出图形，结合图形求解是关键．

24．【分析】（1）先证明$\Delta CDF\cong\Delta DAE$，根据全等三角形的性质即可得出$AE=DF$；

（2）存在，当点E为AB的中点时，ΔBCG为等腰三角形，延长CB交DE的延长线于点P，然后证明$\Delta AED\cong\Delta BEP$，得出$AD=BP=BC$，再根据$\angle PGC=90^{\circ}$，得出结论．

【解答】（1）证明：$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore AD=CD$，$\angle A=\angle ADC=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ADE+\angle AED=90^{\circ}$，

$\because CF\perp DE$于点G，

$\therefore\angle ADE+\angle DFC=90^{\circ}$，

$\therefore\angle AED=\angle DFC$，

在ΔAED和ΔDFC中，

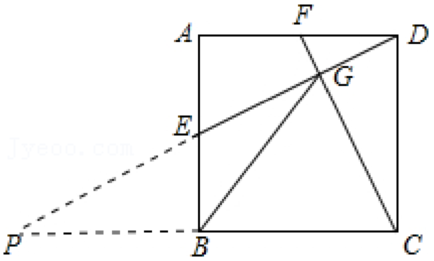
$$\begin{cases}\angle AED=\angle DFC\\ \angle EAD=\angle FDC\\ AD=DC\end{cases},$$

$\therefore\Delta AED\cong\Delta DFC(AAS)$，

$\therefore AE=DF$；

（2）解：存在，当点E为AB的中点时，ΔBCG为等腰三角形，

理由：如图，延长CB交DE的延长线于点P，



$\because E$为AB的中点，

$\therefore AE=BE$，

在ΔAED和ΔBEF中，

$$\begin{cases}\angle DAE=\angle PBE\\ AE=BE\\ \angle AED=\angle BEF\end{cases},$$

$\therefore\Delta AED\cong\Delta BEF(ASA)$，

$\therefore AD=BP=BC$，

$\because\angle PGC=90^{\circ}$，

$\therefore BG=\frac{1}{2}CP=BC$，

即 ΔBCG 为等腰三角形．

【点评】本题考查正方形的性质，三角形全等的判定和直角三角形斜边上的中线的性质，关键是根据正方形的性质证明三角形全等．

25．【分析】（1）根据等腰三角形的判定证得 ΔACP 和 ΔBDP 为等腰直角三角形，利用勾股定理求得 PA 和 PB，从而求得 $PA+PB$；

（2）作 $AE//l$，交 BD 的延长线于 E，根据已知条件求得 BE、$A'E$，然后根据勾股定理即可求得 $A'B$，从而求得 $AP+BP$ 的值；

（3）设 $AC=2m-2$，$PC=1$，则 $PA=\sqrt{(2m-2)^2+1}$；设 $BD=8-2m$，$PD=2$，则 $PB=\sqrt{(8-2m)^2+4}$，结合（2）即可求得．

【解答】解：（1）如图 2，$\because AA'\perp l$，$AC=1$，$PC=1$，

$\therefore AC=CP$，$\angle ACP=90^\circ$，

$\therefore \angle CAP=\angle CPA=45^\circ$，

$\therefore PA=\sqrt{AC^2+CP^2}=\sqrt{2}$，

$\because$ 点 A 关于直线 l 的对称点为 A'，

$\therefore PA'=PA=\sqrt{2}$，

$\therefore \angle CPA'=\angle CPA=45^\circ$，

$\because BD\perp l$，$\angle BPD=\angle CPA'=45^\circ$，

$\therefore \angle PBD=90^\circ-45^\circ=45^\circ=\angle BPD$，

$\therefore BD=PD=2$，

$\therefore PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore AP+PB=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$；

（2）作 $AE//l$，交 BD 的延长线于 E，如图 3，

则四边形 $A'EDC$ 是矩形，

$\therefore AE=DC=PC+PD=3$，$DE=A'C=AC$，

$\because BD=4-AC$，

$\therefore BD+AC=BD+DE=4$，

即 $BE=4$，

在 $RT\triangle A'BE$ 中，$A'B=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

$\therefore AP+BP=5$；

（3）如图 3，设 $AC=2m-2$，$PC=1$，则 $PA=\sqrt{(2m-2)^2+1}$，

设 $BD=8-2m$，$PD=2$，则 $PB=\sqrt{(8-2m)^2+4}$，

$\because DE=AC=2m-2$，

$\therefore BE=BD+DE=6$，$A'E=CD=PC+PD=3$，

$\therefore PA+PB=A'B=\sqrt{A'E^2+BE^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$，

$\therefore \sqrt{(2m-2)^2+1}+\sqrt{(8-2m)^2+4}$ 的最小值是 $3\sqrt{5}$．

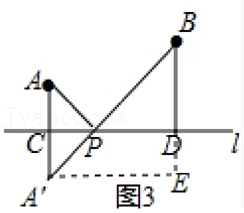


图3

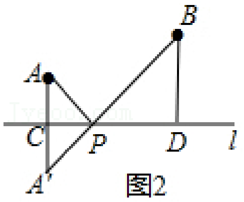


图2

【点评】本题考查了轴对称 – 最短路线问题，熟练掌握轴对称的性质和勾股定理的应用是解题的关键．

26．【分析】（1）作 $\angle GAH=\angle EAB$ 交 GE 于点 H，则 $\angle GAB=\angle HAE$，先根据 ASA 定理得出 $\Delta ABG\cong\Delta AEH$，由 $\angle GAH=\angle EAB=60^\circ$ 可知 ΔAGH 是等边三角形，故可得出结论；

（2）作 $\angle GAH=\angle EAB$ 交 GE 的延长线于点 H，先根据 ASA 定理得出 $\Delta ABG\cong\Delta AEH$，故可得出 $BG=EH$，$AG=AH$，根据 $\angle GAH=\angle EAB=90^\circ$ 可知 ΔAGH 是等腰直角三角形，所以 $\sqrt{2}AG=HG$，由此可得出结论．

【解答】（1）证明：如图 1，作 $\angle GAH=\angle EAB$ 交 GE 于点 H，则 $\angle GAB=\angle HAE$．

$\because \angle EAB=\angle EGB$，$\angle GAB=\angle HAE$，

$\therefore \angle ABG=\angle AEH$．

在 ΔABG 和 ΔAEH 中，

$$\begin{cases}\angle GAB=\angle HAE\\ AB=AE\\ \angle ABG=\angle AEH\end{cases},$$

$\therefore \Delta ABG\cong\Delta AEH(ASA)$．

$\therefore BG=EH$，$AG=AH$．

$\because \angle GAH=\angle EAB=60^\circ$，

$\therefore \Delta AGH$ 是等边三角形．

$\therefore AG=HG$．

$\therefore EG=AG+BG$；

（2）解：线段 EG、AG、BG 之间的数量关系是 $EG=\sqrt{2}AG-BG$．

理由如下：

如图 2，作 $\angle GAH=\angle EAB$ 交 GE 的延长线于点 H，则 $\angle GAB=\angle HAE$．

$\because \angle EGB=\angle EAB=90^\circ$，

$\therefore \angle ABG+\angle AEG=\angle AEG+\angle AEH=180^\circ$．

$\therefore \angle ABG=\angle AEH$．

在 ΔABG 和 ΔAEH 中，

$\begin{cases}\angle HAE=\angle GAB\\ AB=AE\\ \angle AEH=\angle ABG\end{cases}$,

$\therefore \Delta ABG\cong \Delta AEH(ASA)$.

$\therefore BG=EH$， $AG=AH$.

$\because \angle GAH=\angle EAB=90^\circ$，

$\therefore \Delta AGH$ 是等腰直角三角形.

$\therefore \sqrt{2}AG=HG$，

$\therefore EG=\sqrt{2}AG-BG$.

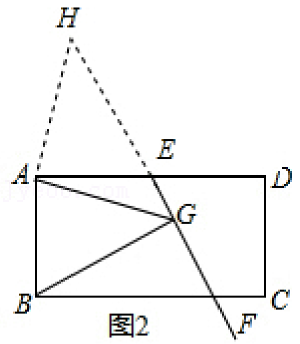


图2

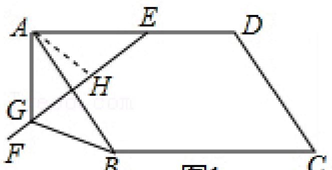


图1

【点评】本题考查了等腰直角三角形的性质，全等三角形的判定与性质、等边三角形的性质等知识，熟练掌握全等三角形的性质是解题的关键.