2022 北京海淀初二（下）期中

数　学

一、选择题

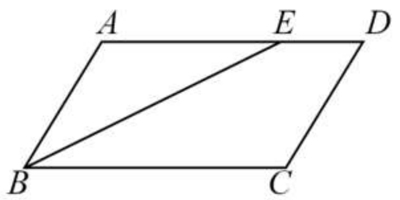
1. 下列各组数中，以它们为边长的线段能构成直角三角形的是（　）

A. 2，3，4　　B. $\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$　　C. 1，$\sqrt{2}$，3　　D. 5，12，13

2. 下列等式，正确的是（　）

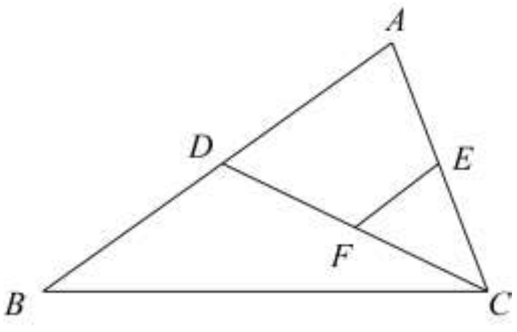
A. $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{15}=\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$　　C. $\sqrt{12}+\sqrt{3}=\sqrt{15}$　　D. $\sqrt{9}=\pm3$

3. 如图，在▱*ABCD* 中，*AB*=4，*BC*=7，∠*ABC* 的平分线交 *AD* 于点 *E*，则 *ED* 等于（ ）



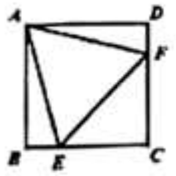
A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 如图，*CD* 是△*ABC* 的中线，*E*，*F* 分别是 *AC*，*DC* 的中点，$EF=1$，则 *BD* 的长为（　）



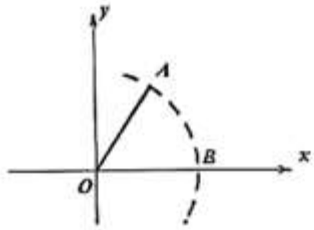
A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 如图，在正方形 *ABCD* 中，等边△*AEF* 的顶点 *E*，*F* 分别在边 *BC* 和 *CD* 上，则∠*AEB* 等于（　）



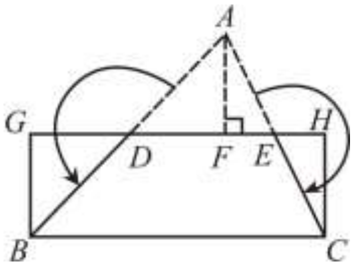
A. 60°　　B. 70°　　C. 75°　　D. 80°

6. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 *O*（0，0），*A*（2，3），以点 *O* 为圆心，*OA* 长为半径画弧，交 *x* 轴的正半轴于 *B* 点，则 *B* 点的横坐标介于（　）



A. 3 和 4 之间　　B. 4 和 5 之间　　C. 5 和 6 之间　　D. 6 和 7 之间

7. 如图，在$\triangle ABC$中，分别取 *AB*、*AC* 的中点 *D*、*E*，连接 *DE*，过点 *A* 作$AF \perp DE$，垂足为 *F*，将$\triangle ABC$分割后拼接成矩形 *BCHG*，若$DE=4$，$AF=2$，则$\triangle ABC$的面积是（　）



A. 8　　B. 10　　C. 14　　D. 16

8. 我校举行跳绳比赛，甲、乙两班参赛同学每分钟跳绳个数统计结果如下表：

班级	参加人数	中位数	方差	平均数
甲	40	129	161	115
乙	40	131	90	115

某同学分析上表后得到如下结论：

①甲、乙两班学生平均成绩相同；

②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数（每分跳绳个数≥ 130为优秀）；

③甲班成绩的波动比乙班大.

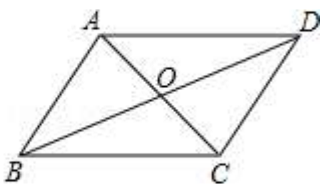
上述结论正确的是（　）

A. ①②③　　B. ①②　　C. ①③　　D. ②③

二、填空题

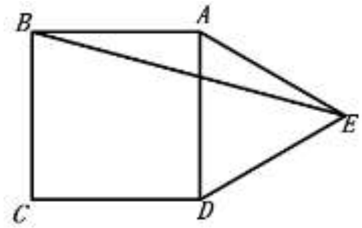
9. 若$\sqrt{x+3}$在实数范围内有意义，则 *x* 的取值范围为______.

10. 如图，在四边形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于点 O，AD∥BC，请添加一个条件：______，使四边形 ABCD 为平行四边形（不添加任何辅助线）.

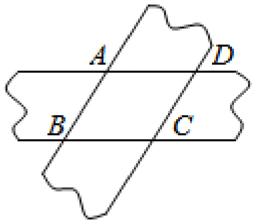


11. 两直角边分别为 6 和 8　直角三角形，斜边上的中线的长是_________.

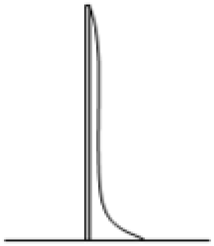
12. 如图，在正方形 *ABCD*　外侧，作等边△*ADE*，则∠*AEB*=_______



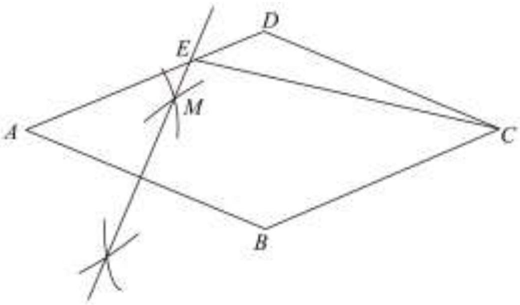
13. 如图，将两条宽度都为 3 的纸条重叠在一起，使 $\angle ABC=60^{\circ}$，则四边形 $ABCD$ 的面积为________.



14. 《九章算术》中记载：今有立木，系索其末，委地三尺，引索却行，去本八尺而索尽．问索长几何．译文：今有一竖直着的木柱，在木柱的上端系有绳索，绳索从木柱的上端顺木柱下垂后堆在地面的部分有三尺（绳索比木柱长 3 尺），牵着绳索退行，在距木柱底部 8 尺处时而绳索用尽．设绳索长为 x 尺，则根据题意可列方程为______.



15. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle A$=45°，分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M，N 两点，直线 MN 交 AD 于点 E，连接 CE，则 CE 的长为_______.



16. 在▱$ABCD$ 中，O 为 AC 的中点，点 E，M 为▱$ABCD$ 同一边上任意两个不重合的动点（不与端点重合），EO，MO 的延长线分别与▱$ABCD$ 的另一边交于点 F，N.

下面四个推断：

①四边形 $ABFM$ 是平行四边形；

②四边形 $ENFM$ 是平行四边形；

③若▱$ABCD$ 是矩形（正方形除外），则至少存在一个四边形 $ENFM$ 是正方形；

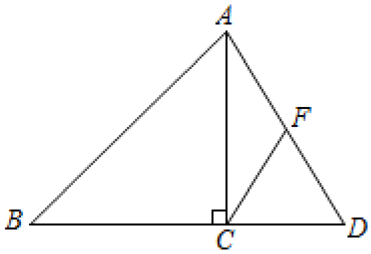
④对于任意的▱$ABCD$，存在无数个四边形 $ENFM$ 是矩形.

其中，正确 有__________.

三、解答题

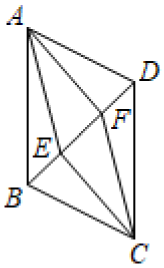
17. 计算：$2^{-1}+\sqrt{8}-|-2\sqrt{2}|+(\pi+\sqrt{2})^{0}$

18. 如图，在$\triangle ABD$中，$AC\perp BD$，$BC=8$，$AB=10$，$\angle D=60°$，F为AD的中点，求AC，CF的长．



19. 已知$x=\sqrt{3}+1$，求x^2-2x-3的值．

20. 如图，四边形$ABCD$和四边形$AECF$都是平行四边形，求证：$BE=DF$．



21. 尺规作图：如图，已知线段a，b．

求作：菱形$ABCD$，使其一条对角线的长等于线段a的长，边长等于线段b的长．

作法：①作直线m，在m上截取线段$AC=a$；

②作线段AC的垂直平分线EF，交线段AC于点O；

③以点A为圆心，线段b的长为半径画弧，交直线EF于点B，D；

④分别连接AB，BC，CD，DA；

则四边形$ABCD$就是所求作的菱形．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

m

（2）完成下面的证明．

证明：∵EF垂直平分AC，

∴AB=_____，_____=_____，（_______）

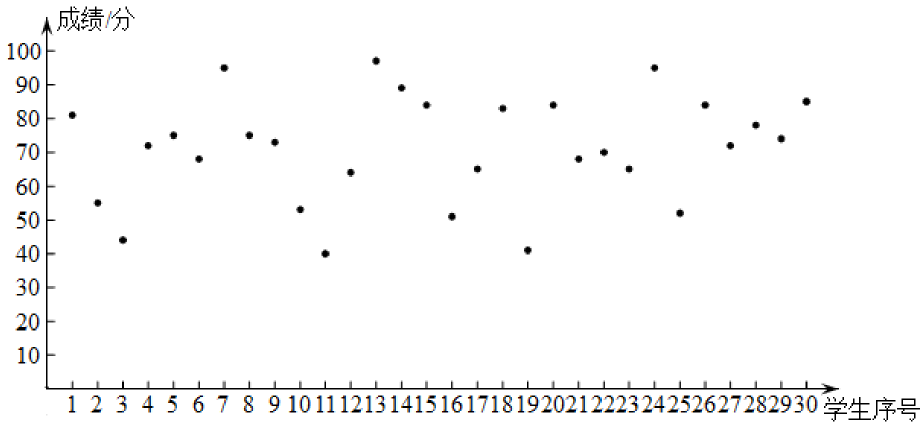
∵$AB=AD$，

∴$AB=AD=BC=BD$，

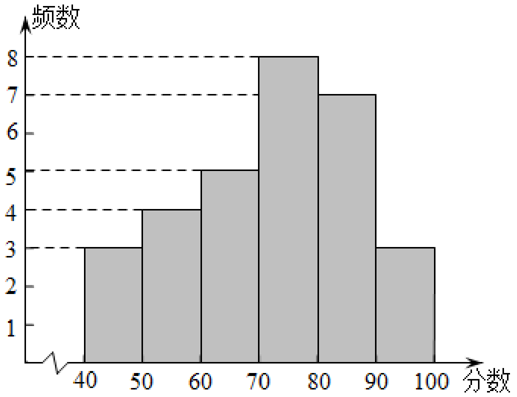
∴四边形$ABCD$是菱形．（_________________）

22. 从2020年5月1日开始，新版《北京市生活垃圾管理条例》正式实施．为了调查同学们对垃圾分类知识的了解情况，小清从我校初中三个年级各随机抽取10人，进行了相关测试，获得了他们的成绩（单位：分），并对成绩进行了整理、描述和分析，下面给出了相关信息：

a．30名同学测试成绩的统计图如下：



b．30 名同学测试成绩的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$40\leqslant x<50$，$50\leqslant x<60$，$60\leqslant x<70$，$70\leqslant x<80$，$80\leqslant x<90$，$90\leqslant x\leqslant 100$）：



c．测试成绩在 $70\leqslant x<80$ 这一组的分别是：

73　　74　　77　　75　　70　　74　　73　　78

d．小华的知识测试成绩为 85 分．

根据以上信息，回答下列问题：

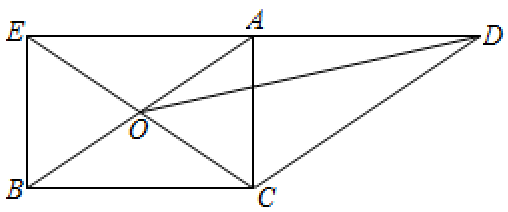
（1）小华的测试成绩在抽取的 30 名同学的成绩中从高到低排名第_____；

（2）抽取的 30 名同学的成绩的中位数为_____；

（3）序号为 1-10 的学生是七年级的，他们的成绩的方差记为 s_1^2；序号为 11-20 的学生是八年级的，他们的成绩的方差记为 s_2^2，序号为 21-30 的学生是九年级的，他们的成绩的方差记为 s_3^2，直接写出 s_1^2，s_1^2，s_3^2 的大小关系_____；

（4）成绩 80 分及以上记为优秀，若我校初中三个年级 840 名同学都参加测试，估计成绩优秀　同学约为_____人．

23. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$AC\perp AD$，作 $\angle ECA=\angle ACD$，CE 交 AB 于点 O，交 DA 的延长线于点 E，连接 BE．



（1）求证：四边形 $ACBE$ 是矩形；

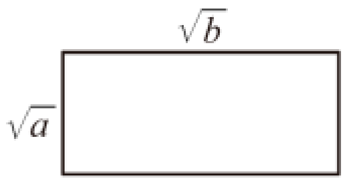
（2）连接 OD．若 $AB=4$，$\angle ACD=60°$，求 OD 的长．

24. 观察猜想

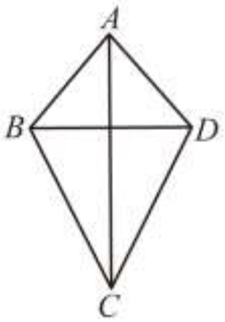
（1）观察猜想：①$2+1>2\sqrt{1\times 2}$；②$3+\frac{1}{3}>2\sqrt{3\times\frac{1}{3}}$；③$8+8=2\sqrt{8\times 8}$．

通过上面三个计算，可以初步对任意的非负实数 a，b 做出猜想：$a+b$ _____ $2\sqrt{ab}$；

（2）验证结论：我们知道可以利用几何图形对一个等式进行验证，请你利用与下图全等的四个矩形，构造几何图形对你的猜想进行验证．（要求：画出构造的图形，写出验证过程）



（3）结论应用：如图，某同学在做一个面积为 800cm^2，对角线相互垂直的四边形玩具时，用来做对角线的竹条至少要_____cm．



25. 如图，在正方形 $ABCD$ 外有一点 P，满足 $\angle APB=45°$，以 AP，AD 为邻边作 $\square APQD$．

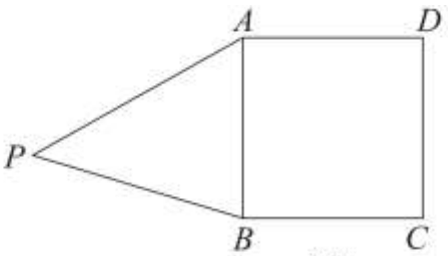
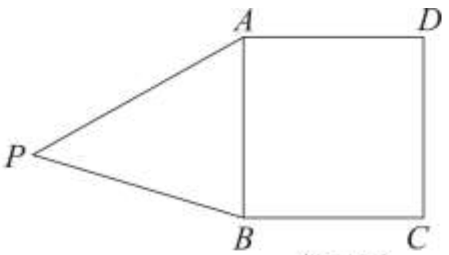


图1



备用图

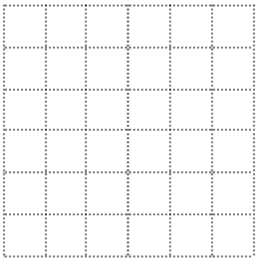
（1）如图 1，根据题目要求补全图形；

（2）连接 QC，求 $\angle DQC$ 的度数；

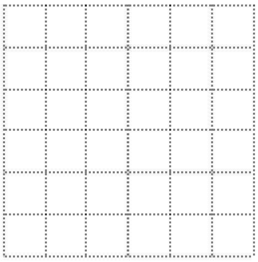
（3）连接 AQ，猜线段 AQ，PQ 和 PB 之间　数量关系并证明．

26. 在正方形网格中，每个小正方形的边长为 1．线段 $AC=\sqrt{m^2+n^2}$（m，n 均为正整数），点 A，C 在格点上，以 AC 为对角线画出正方形 $ABCD$（B，D 落在网格内）．

（1）当 m=____，n=_____时（给出一组值即可），B，D 在格点上，在网格中画出正方形 $ABCD$；



（2）当 m=____，n=_____时（给出一组值即可），B，D 均不在格点上，在网格中画出正方形 $ABCD$（尺规作图，保留痕迹，不写作法）；



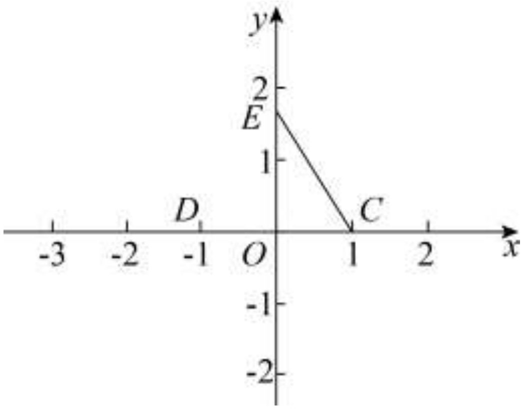
（3）当 m，n 满足_____时，B，D 一定在格点上（网格纸足够用）．

27. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W_1 和图形 W_2 给出如下定义：在图形 W_1 上存在两点 A，B（点 A，B 可以重合），在图形 W_2 上存在两点 M，N（点 M，N 可以重合）使得 $AM=2BN$．则称图形 W_1 和图形 W_2 满足限距关系．

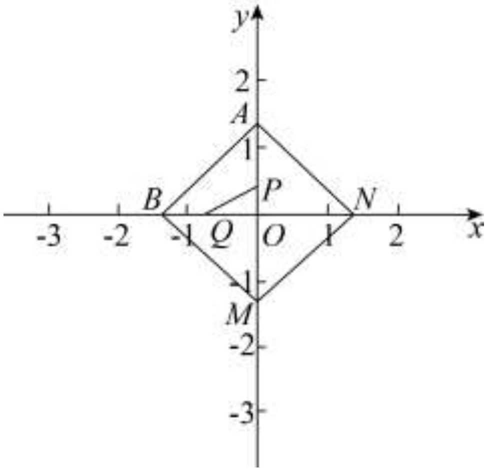
（1）如图，点 $C(1,0)$，$D(-1,0)$，$E(0,\sqrt{3})$，点 F 在 CE 上运动（点 F 可以与 C，E 重合），连接 OF，DF．

①线段 OF 的最小值为_____，最大值为_____；线段 DF 的取值范围是_____；

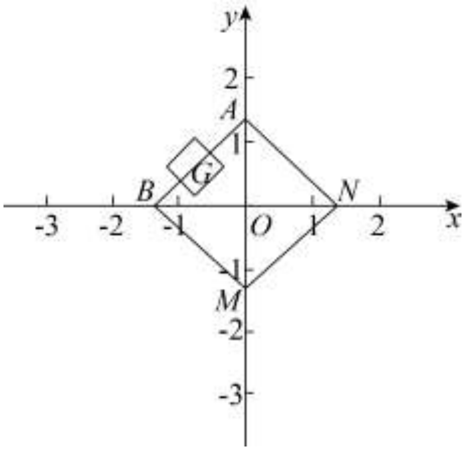
②在点 O，D 中，点_____与线段 CE 满足限距关系；



（2）如图，正方形 $ABMN$ 的边长为 2，直线 PQ 分别于 x 轴，y 轴交于点 Q，P，且与 x 轴正方向的夹角始终是 30°，若线段 PQ 与正方形 $ABMN$ 满足限距关系，求点 P 的纵坐标 $a(a>0)$ 的取值范围；



（3）如图，正方形 *ABMN* 的顶点均在坐标轴上， $A(0,b)(b>0)$ ，*G*，*H* 是正方形边上两点，分别以 *G*，*H* 为中心作边长为 1 的正方形，与正方形 *ABMN* 的四边分别平行，若对于任意的点 *G*，*H*，以 *G*，*H* 为中心的正方形都满足限距关系，直接写出 *b* 的取值范围．



参考答案

一、选择题

1. 下列各组数中，以它们为边长的线段能构成直角三角形的是（   ）

A. 2，3，4　　　　B. $\sqrt{3}$，$\sqrt{4}$，$\sqrt{5}$　　　　C. 1，$\sqrt{2}$，3　　　　D. 5，12，13

【答案】D

【解析】

【分析】根据勾股定理的逆定理：如果三角形有两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形．如果没有这种关系，这个就不是直角三角形，逐一判定即可．

【详解】解.A.$2^2+3^2\neq4^2$，不符合勾股定理的逆定理，故本选项不符合题意；

B.$(\sqrt{3})^2+(\sqrt{4})^2\neq(\sqrt{5})^2$，不符合勾股定理的逆定理，故本选项不符合题意；

C.$1^2+(\sqrt{2})^2\neq3^2$，不符合勾股定理的逆定理，故本选项不符合题意；

D.$5^2+12^2=13^2$，符合勾股定理的逆定理，故本选项符合题意；

故选：D．

【点睛】本题考查了勾股定理的逆定理，在应用勾股定理的逆定理时，应先认真分析所给边的大小关系，确定最大边后，再验证两条较小边的平方和与最大边的平方之间的关系，进而作出判断．

2. 下列等式，正确的是（   ）

A. $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{15}=\sqrt{-3}\times\sqrt{-5}$　　　　C. $\sqrt{12}+\sqrt{3}=\sqrt{15}$　　　　D. $\sqrt{9}=\pm3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据二次根式的四则混合运算及算术平方根的求法计算即可得出结果．

【详解】解：A、$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，选项计算正确，符合题意；

B、$\sqrt{15}=\sqrt{3}\times\sqrt{5}$，$\sqrt{-3}$与$\sqrt{-5}$无意义，选项错误，不符合题意；

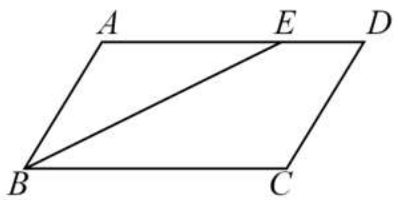
C、$\sqrt{12}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，选项计算错误，不符合题意；

D、$\sqrt{9}=3$，选项计算错误，不符合题意；

故选：A．

【点睛】题目主要考查二次根式的四则运算及算术平方根的求法，熟练掌握运算法则是解题关键．

3. 如图，在▱$ABCD$中，AB=4，BC=7，$\angle ABC$的平分线交AD于点E，则ED等于（ ）



A. 2　　　　B. 3　　　　C. 4　　　　D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可知 $AD\parallel BC$，$AD=BC$，利用两直线平行得到一对内错角相等，由 BE 为角平分线得到一对角相等，等量代换得到 $\angle ABE=\angle AEB$，利用等角对等边得到 $AB=AE=4$，由 $AD-AE$ 求出 ED 的长即可．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AD\parallel BC$，$AD=BC=7$，

∴ $\angle AEB=\angle EBC$，

∵BE 平分 $\angle ABC$，

∴ $\angle ABE=\angle EBC$，

∴ $\angle AEB=\angle ABE$，

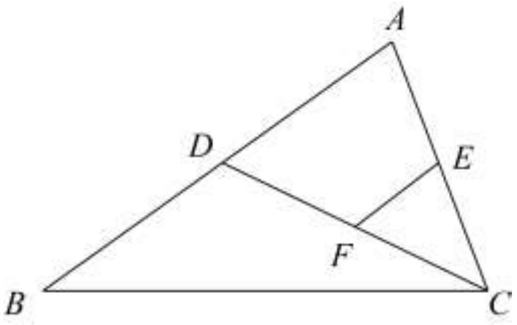
∴$AB=AE=4$，

∴$ED=AD-AE=BC-AE=7-4=3$．

故选：B．

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，角平分线的定义，以及等腰三角形的判定，熟练掌握平行四边形的性质是解本题的关键．

4. 如图，CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，E，F 分别是 AC，DC 的中点，$EF=1$，则 BD 的长为（　）



A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】先利用中位线性质求得 AD，再由中线知 $BD=AD$ 即可解答．

【详解】解：∵点 E、F 分别是 AC、DC 的中点，

∴EF 是△ACD 的中位线，

∴$AD=2EF=2$，

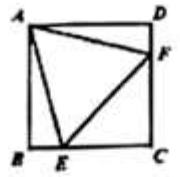
∵CD 是△ABC 的中线，

∴$BD=AD=2$

故选：B．

【点睛】本题考查了三角形的中线和中位线，熟练掌握中位线的性质是解答的关键．

5. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，等边 $\triangle AEF$ 的顶点 E，F 分别在边 BC 和 CD 上，则 $\angle AEB$ 等于（　）



A. $60°$　　　　　　　B. $70°$　　　　　　　C. $75°$　　　　　　　D. $80°$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意直接证明 $Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle ABE$，进而得 $CE=CF$，可知 $\angle FEC=45°$，结合等边三角形的条件，即可求得 $\angle AEB$.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD=AB=BC=CD$， $\angle B=\angle C=\angle D=90°$，

∵ $\triangle AEF$ 是等边三角形，

$\therefore AF=AE$， $\angle AEF=60°$，

在 $Rt\triangle ADF$ 和 $Rt\triangle ABE$ 中

$\begin{cases}AD=AB\\AF=AE\end{cases}$,

$\therefore Rt\triangle ADF\cong Rt\triangle ABE$（$HL$），

$\therefore DF=BE,$

$\therefore CE=CF$，

∵ $\angle C=90°$，

$\therefore \angle FEC=45°$，

又 $\angle AEF=60°$，

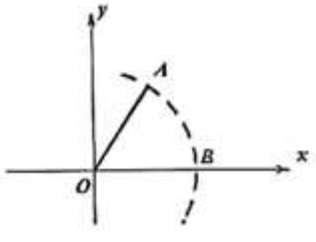
$\therefore \angle AEB=180°-\angle AEF-\angle FEC$，

$=180°-60°-45°=75°$，

故选：C.

【点睛】本题考查了 HL 证明直角三角形全等，等腰直角三角形的性质，等边三角形的性质，正方形的性质，熟练以上性质是解题的关键.

6. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 O（0，0），A（2，3），以点 O 为圆心，OA 长为半径画弧，交 x 轴的正半轴于 B 点，则 B 点的横坐标介于（　）



A. 3 和 4 之间　　　　B. 4 和 5 之间　　　　C. 5 和 6 之间　　　　D. 6 和 7 之间

【答案】A

【解析】

【分析】先根据勾股定理求出 OA 的长，由于 $OB=OA$，故估算出 OA 的长，再根据点 B 在 x 轴的正半轴上即可得出结论.

【详解】解：∵点 A 坐标为（2，3），

∴$OA=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，

∵点 A、B 均在以点 O 为圆心，以 OA 为半径的圆上，

∴$OA=OB=\sqrt{13}$，

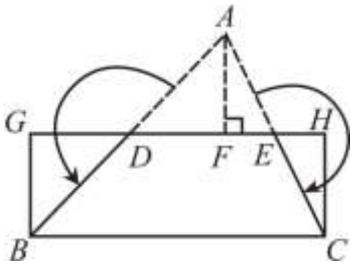
∵$3<\sqrt{13}<4$，点 B 在 x 轴的正半轴上，

∴点 B 的横坐标介于 3 和 4 之间.

故选：A.

【点睛】本题考查的是勾股定理及估算无理数的大小，根据题意利用勾股定理求出 OA 的长是解答此题的关键.

7. 如图，在$\triangle ABC$中，分别取 AB、AC 的中点 D、E，连接 DE，过点 A 作 $AF\perp DE$，垂足为 F，将$\triangle ABC$分割后拼接成矩形 $BCHG$，若 $DE=4$， $AF=2$，则$\triangle ABC$的面积是（　）



A. 8　　　　B. 10　　　　C. 14　　　　D. 16

【答案】D

【解析】

【分析】先利用中位线定理求出 $BC=8$，再由矩形面积等于$\triangle ABC$的面积进行求解即可.

【详解】解：∵D、E 分别是 AB，AC 的中点，

∴DE 是$\triangle ABC$的中位线，

∴$BC=2DE=8$，

由题意得 $BG=AF=2$，$S_{\triangle ABC}=S_{矩形BCHG}$，

∴ $S_{\triangle ABC}=BC\cdot BG=16$，

故选 D.

【点睛】本题主要考查了三角形中位线定理，矩形的性质，熟知三角形中位线定理是解题的关键.

8. 我校举行跳绳比赛，甲、乙两班参赛同学每分钟跳绳个数统计结果如下表：

班级	参加人数	中位数	方差	平均数
甲	40	129	161	115
乙	40	131	90	115

某同学分析上表后得到如下结论：

①甲、乙两班学生平均成绩相同；

②乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数（每分跳绳个数≥130 为优秀）；

③甲班成绩的波动比乙班大.

上述结论正确的是（　）

A. ①②③　　　　B. ①②　　　　C. ①③　　　　D. ②③

【答案】A

【解析】

【分析】首先根据表格信息即可得出二者平均数一样，然后再观察表格发现甲班的中位数是 129，乙班的中位数是 131，由此进一步比较二者的优秀人数即可，最后根据二者的方差大小即可得出哪个班波动大或小，据此进一步得出答案即可.

【详解】解：从表中可知：

甲、乙两班的平均数都是 115，故①正确；

甲班的中位数是 129，乙班的中位数是 131，乙班中位数比甲班的大，而每分钟跳绳的个数≥130 为优秀，由此说明乙班优秀的人数多于甲班优秀的人数，故②正确；

甲班的方差大于乙班的，则说明甲班的波动情况大，故③正确；

综上所述，①②③都正确，

故选：A.

【点睛】本题主要考查了中位数与方差的性质，熟练掌握相关概念是解题关键.

二、填空题

9. 若 $\sqrt{x+3}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围为______.

【答案】x≥-3

【解析】

【分析】直接利用二次根式　定义分析得出答案.

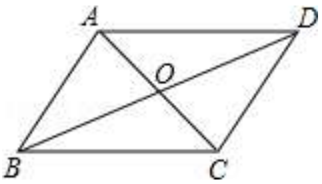
【详解】解：依题意有 x+3≥0，

解得：x≥-3.

故答案为：x≥-3.

【点睛】此题主要考查了二次根式有意义的条件，正确掌握定义是解题关键.

10. 如图，在四边形 ABCD 中，对角线 AC、BD 交于点 O，AD∥BC，请添加一个条件：______，使四边形 ABCD 为平行四边形（不添加任何辅助线）.



【答案】AD=BC.

【解析】

【分析】直接利用平行四边形的判定方法直接得出答案.

【详解】当 AD∥BC，AD=BC 时，四边形 ABCD 为平行四边形.

故答案是 AD=BC（答案不唯一）.

11. 两直角边分别为 6 和 8 的直角三角形，斜边上的中线的长是_________.

【答案】5

【解析】

【分析】根据勾股定理求得斜边的长，再根据斜边上的中线等于斜边的一半从而求得斜边上的中线长.

【详解】解：∵直角三角形两条直角边分别是 6、8，

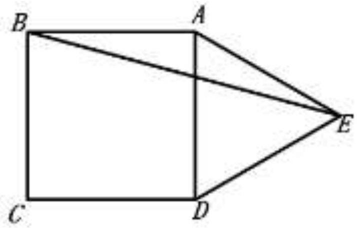
∴斜边长为$\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$，

∴斜边上的中线长为$\frac{1}{2}\times 10=5$.

故答案为：5.

【点睛】此题考查直角三角形的性质及勾股定理的运用．求出斜边的长是解答本题的关键.

12. 如图，在正方形 $ABCD$ 的外侧，作等边△ADE，则∠AEB=_______



【答案】15°

【解析】

【分析】由正方形的性质和等边三角形的性质可得 $BC=CD=AD=AB$、$\angle ADC=\angle BCD=\angle CBA=\angle BAD=90°$，$AE=DE=AD$, $\angle ADE=\angle DEA=\angle EAD=60°$；再说明△$ABE$ 是等腰三角形，最后根据等腰三角形的性质解答即可.

【详解】解：∵正方形 $ABCD$，

∴$BC=CD=AD=AB$, $\angle ADC=\angle BCD=\angle CBA=\angle BAD=90°$，

∵等边三角形 ADE，

∴$AE=DE=AD$, $\angle ADE=\angle DEA=\angle EAD=60°$，

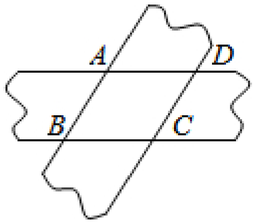
∴$AB=AE$, $\angle BAE=\angle BAD+\angle EAD=150°$，

∴$\angle AEB=\frac{180^\circ-\angle BAE}{2}=\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$.

故答案为：15°.

【点睛】本题考查了正方形的性质、等边三角形的性质、等腰三角形的判定与性质以及等量代换思想，解题的关键是掌握运用等量代换思想是解答.

13. 如图，将两条宽度都为 3 的纸条重叠在一起，使$\angle ABC=60°$，则四边形 $ABCD$ 的面积为_________.



【答案】$6\sqrt{3}$

【解析】

【分析】先根据两组对边分别平行证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再根据两张纸条的宽度相等，利用面积求出 $AB=BC$，然后根据邻边相等的平行四边形是菱形；根据宽度是 3 与 $\angle ABC=60°$ 求出菱形的边长，然后利用菱形的面积=底×高计算即可．

【详解】解：∵纸条的对边平行，即 $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，

∴四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

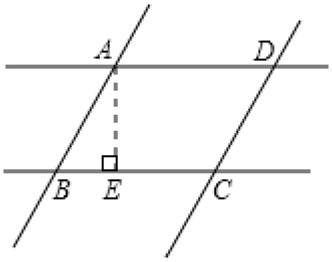
∵两张纸条的宽度都是 3，

∴$S_{\text{四边形}ABCD}=AB\times3=BC\times3$，

∴$AB=BC$，

∴平行四边形 $ABCD$ 是菱形，即四边形 $ABCD$ 是菱形．

如图，过 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，



∵$\angle ABC=60°$，

∴$\angle BAE=90°-60°=30°$，

∴$AB=2BE$，

在△ABE 中，$AB^2=BE^2+AE^2$，

即 $AB^2=\frac{1}{4}AB^2+3^2$，

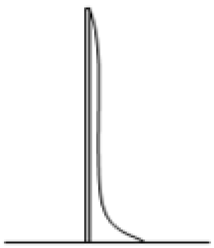
解得 $AB=2\sqrt{3}$，

∴$S_{\text{四边形}ABCD}=BC\bullet AE=2\sqrt{3}\times3=6\sqrt{3}$．

故答案是：$6\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了菱形的判定与性质，根据宽度相等，利用面积法求出边长相等是证明菱形的关键．

14.《九章算术》中记载：今有立木，系索其末，委地三尺，引索却行，去本八尺而索尽．问索长几何．译文：今有一竖直着的木柱，在木柱的上端系有绳索，绳索从木柱的上端顺木柱下垂后堆在地面的部分有三尺（绳索比木柱长3尺），牵着绳索退行，在距木柱底部8尺处时而绳索用尽．设绳索长为 x 尺，则根据题意可列方程为______．



【答案】$(x-3)^2+64=x^2$

【解析】

【分析】根据题意和勾股定理列出方程即可.

【详解】解：∵绳索长为 x 尺，且绳索比竖着的木柱长 3 尺，

∴木柱长 $\left(x-3\right)$ 尺.

∵牵着绳索退行，在距木柱底部8尺处时而绳索用尽.

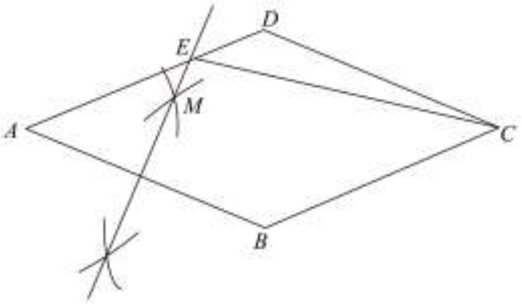
∴木柱的长度和退行的距离构成直角三角形的两条直角边，绳索为直角三角形的斜边.

∴根据勾股定理可列方程：$(x-3)^2+8^2=x^2$，即 $(x-3)^2+64=x^2$.

故答案为：$(x-3)^2+64=x^2$.

【点睛】本题考查勾股定理的应用，正确理解题意是解题关键.

15. 如图，菱形 $ABCD$ 的边长为 4，$\angle A=45°$，分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M，N 两点，直线 MN 交 AD 于点 E，连接 CE，则 CE 的长为_______.

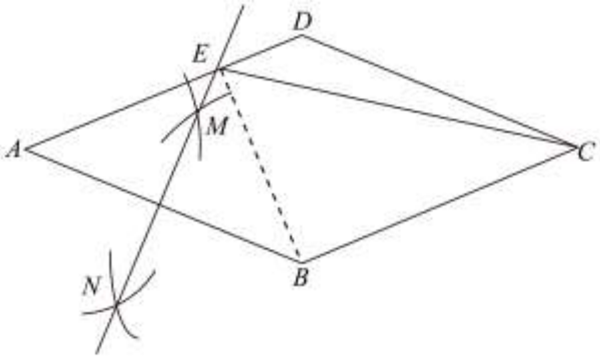


【答案】$2\sqrt{6}$

【解析】

【分析】由作图过程可知 MN 垂直平分线段 AB，因此连接 EB．证明 ΔAEB 是等腰直角三角形，求出 AE，EB，证明 AE，EB,所在三角形 ΔBEC 是直角三角形，利用勾股定理求出 EC 即可.

【详解】解：如图，连接 EB.



由作图可知，MN 垂直平分线段 AB，

$\therefore EA=EB$，

$\therefore \angle A=\angle EBA=45°$，

$\therefore \angle AEB=90°$，

$\because AB=4$，

$\therefore EA=EB=2\sqrt{2}$，

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AD \parallel BC$，

$\therefore \angle EBC = \angle AEB = 90°$，

$\therefore EC = \sqrt{EB^2 + BC^2} = 2\sqrt{6}$，

故答案为：$2\sqrt{6}$.

【点睛】本题考查作图−基本作图，线段的垂直平分线的性质，勾股定理等知识，解题的关键是构造所需直角三角形，提高灵活运用所学知识解决问题的能力.

16. 在▱*ABCD* 中，*O* 为 *AC* 的中点，点 *E*，*M* 为▱*ABCD* 同一边上任意两个不重合的动点（不与端点重合），*EO*，*MO* 的延长线分别与▱*ABCD* 的另一边交于点 *F*，*N*.

下面四个推断：

①四边形 *ABFM* 是平行四边形；

②四边形 *ENFM* 是平行四边形；

③若▱*ABCD* 是矩形（正方形除外），则至少存在一个四边形 *ENFM* 是正方形；

④对于任意的▱*ABCD*，存在无数个四边形 *ENFM* 是矩形.

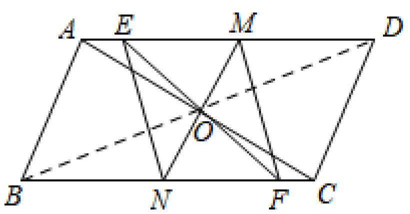
其中，正确的有__________.

【答案】②③④

【解析】

【分析】由“ASA”可证△*EAO*≌△*FCO*，可得 EO=FO，可证四边形 *EMFN* 是平行四边形，可得 *AM* 与 *BF* 不一定相等，故①错误，②正确，由正方形的判定和性质和矩形的判定可判断③错误，④正确，即可求解.

【详解】解：设点 *E*，*M* 为 *AD* 边上任意两个不重合的动点，如图，连接 *BD*，



∵四边形 *ABCD* 是平行四边形，*O* 为 *AC* 的中点，

∴*BD* 也经过点 *O*，*AD*∥*BC*，

∴∠*EAC*=∠*FCA*，

在△*EAO* 和△*FCO* 中，$\begin{cases} \angle EAC = \angle FCA \\ AO = CO \\ \angle AOE = \angle COF \end{cases}$，

∴△*EAO*≌△*FCO*（ASA），

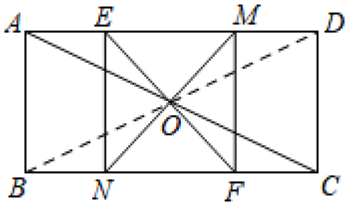
∴*EO*=*FO*，

同理可得 *OM*=*ON*，

∴四边形 *EMFN* 是平行四边形，

∴*AM* 与 *BF* 不一定相等，故①错误，②正确；

若四边形 *ABCD* 是矩形，

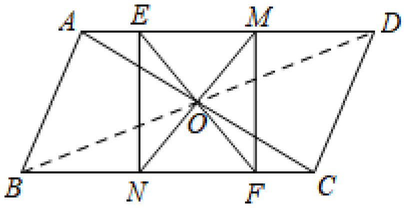


当 $EO=OM$、$EO\perp OM$ 时，则 $EF=MN$、$EF\perp MN$，

又∵四边形 $ENFM$ 是平行四边形，

∴四边形 $ENFM$ 是正方形，故③正确，

当 $EO=OM$ 时，则 $EF=MN$，



又∵四边形 $ENFM$ 是平行四边形，

∴四边形 $ENFM$ 是矩形，故④正确，

故答案为：②③④.

【点睛】本题考查了矩形的性质，正方形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，证明四边形 $ENFM$ 是平行四边形是解题的关键.

三、解答题

17. 计算：$2^{-1}+\sqrt{8}-|-2\sqrt{2}|+(\pi+\sqrt{2})^0$

【答案】$\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】根据负指数幂的性质、二次根式的性质、绝对值的性质和零指数幂的性质计算即可.

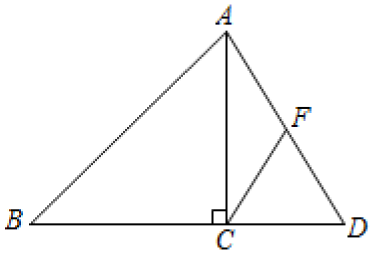
【详解】解：$2^{-1}+\sqrt{8}-|-2\sqrt{2}|+(\pi+\sqrt{2})^0$

$=\dfrac{1}{2}+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+1$

$=\dfrac{3}{2}$.

【点睛】此题考查的是实数的混合运算，掌握负指数幂的性质、二次根式的性质、绝对值的性质和零指数幂的性质是解题关键.

18. 如图，在$\triangle ABD$中，$AC\perp BD$，$BC=8$，$AB=10$，$\angle D=60^\circ$，F 为 AD 的中点，求 AC，CF 的长.



【答案】AC=6，$CF=2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】直接根据勾股定理可得出 AC 的长度，然后由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半得出 $AF=CF=FD$，ΔFCD 为等边三角形，设 $CD=x$，则 $AD=2x$，利用勾股定理求解即可得出 CF 长度.

【详解】解：∵$AC\perp BD$，BC=8，AB=10，

∴$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

∵F 为 AD 中点，

∴$AF=CF=FD$，

∵ $\angle D$=60°，

∴ΔFCD 为等边三角形，

设 $CD=x$，则 $AD=2x$，

∴ $AC^2+CD^2=AD^2$，即 $6^2+x^2=(2x)^2$，

解得：$x=2\sqrt{3}$（负值已舍去），

∴$CF=CD=2\sqrt{3}$.

【点睛】题目主要考查利用勾股定理解三角形，直角三角形斜边上的中线的性质，等边三角形的判定和性质等，理解题意，熟练掌握运用这些知识点是解题关键.

19. 已知 $x=\sqrt{3}+1$，求 x^2-2x-3 的值.

【答案】-1

【解析】

【分析】先变式子 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$，然后再将 $x=\sqrt{3}+1$ 代入求值.

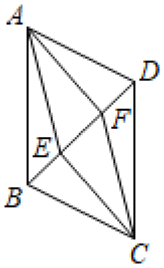
【详解】解：原式$=(x-3)(x+1)$，

将 $x=\sqrt{3}+1$ 代入上式得，

原式$=(\sqrt{3}+1-3)(\sqrt{3}+1+1)=(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)=-1$.

【点睛】本题考查了条件型代数式的求值问题，数量将式子进行因式分解，再代入数值，是解题的关键.

20. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $AECF$ 都是平行四边形，求证：$BE=DF$.

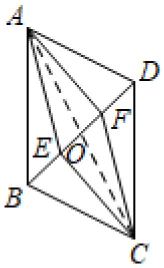


【答案】见解析

【解析】

【分析】连接 AC，交 BD 于点 O，根据平行线的性质得出 $BO=DO$，$EO=FO$，结合图形利用线段间的数量关系即可证明．

【详解】证明：连接 AC，交 BD 于点 O，



∵四边形 $ABCD$ 与四边形 $AECF$ 为平行四边形，

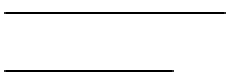
∴$BO=DO$，$EO=FO$（平行四边形的对角线互相平分）

∴．$BO-EO=DO-FO$，

即 $BE=DF$．

【点睛】题目主要考查平行四边形的性质，熟练掌握运用平行四边形的性质是解题关键．

21. 尺规作图：如图，已知线段 a，b．



求作：菱形 $ABCD$，使其一条对角线的长等于线段 a 的长，边长等于线段 b 的长．

作法：①作直线 m，在 m 上截取线段 $AC=a$；

②作线段 AC 的垂直平分线 EF，交线段 AC 于点 O；

③以点 A 为圆心，线段 b 的长为半径画弧，交直线 EF 于点 B，D；

④分别连接 AB，BC，CD，DA；

则四边形 $ABCD$ 就是所求作的菱形．

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：∵EF 垂直平分 AC，

∴AB=_____，_____=_____，（________）

∵ $AB = AD$，

∴ $AB = AD = BC = BD$，

∴四边形 $ABCD$ 是菱形．（__________________）

【答案】（1）作图见解析；

（2）BC；AD；CD；线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等；四条边都相等的四边形是菱形

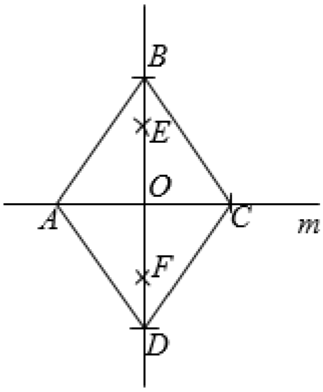
【解析】

【分析】（1）根据题干中提示的步骤，逐步作图即可；

（2）根据垂直平分线的性质及菱形的判定定理进行证明即可．

【小问 1 详解】

解：按照步骤，作图如图所示：



【小问 2 详解】

证明：∵EF 垂直平分 AC，

∴AB=BC，AD=CD，（线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等）

∵AB=AD，

∴AB=BC=AD=CD，

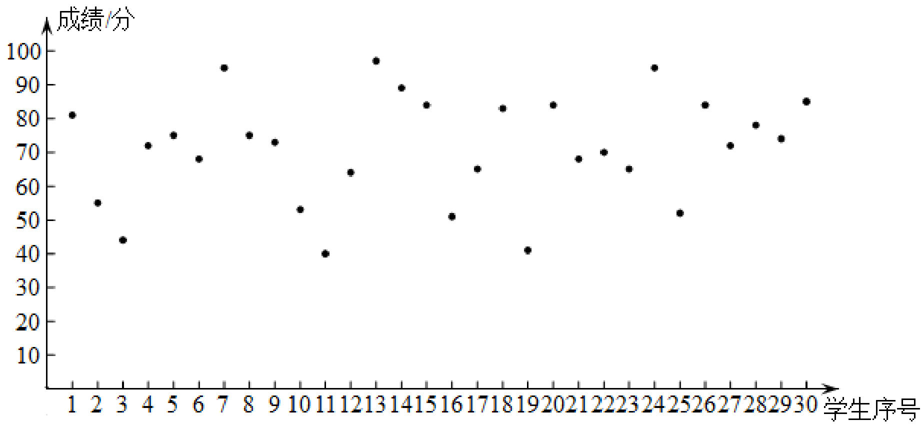
∴四边形 $ABCD$ 是菱形（四条边都相等的四边形是菱形）．

故答案为：BC；AD；CD；线段垂直平分线上的点到线段两个端点的距离相等；四条边都相等的四边形是菱形

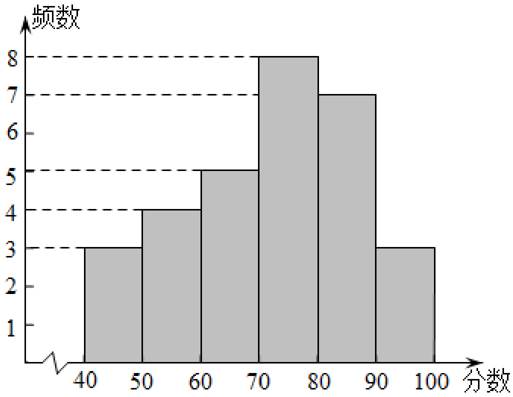
【点睛】本题考查尺规作图-作菱形，以及理论证明，掌握基本作图的方法，以及菱形的判定定理是解题关键．

22. 从 2020 年 5 月 1 日开始，新版《北京市生活垃圾管理条例》正式实施．为了调查同学们对垃圾分类知识的了解情况，小清从我校初中三个年级各随机抽取 10 人，进行了相关测试，获得了他们的成绩（单位：分），并对成绩进行了整理、描述和分析，下面给出了相关信息：

a．30 名同学测试成绩的统计图如下：



b．30 名同学测试成绩的频数分布直方图如下（数据分成 6 组：$40\leqslant x<50$，$50\leqslant x<60$，$60\leqslant x<70$，$70\leqslant x<80$，$80\leqslant x<90$，$90\leqslant x\leqslant 100$）：



c．测试成绩在 $70\leqslant x<80$ 这一组的分别是：

73　　74　　77　　75　　70　　74　　73　　78

d．小华的知识测试成绩为 85 分．

根据以上信息，回答下列问题：

（1）小华的测试成绩在抽取的 30 名同学的成绩中从高到低排名第_____；

（2）抽取的 30 名同学的成绩的中位数为_____；

（3）序号为 1-10 的学生是七年级的，他们的成绩的方差记为 s_1^2；序号为 11-20 的学生是八年级的，他们的成绩的方差记为 s_2^2，序号为 21-30 的学生是九年级的，他们的成绩的方差记为 s_3^2，直接写出 s_1^2，s_1^2，s_3^2 的大小关系_____；

（4）成绩 80 分及以上记为优秀，若我校初中三个年级 840 名同学都参加测试，估计成绩优秀的同学约为_____人．

【答案】（1）5；　（2）74；

（3）$S_2^2>S_1^2>S_3^2$；

（4）280．

【解析】

【分析】（1）根据成绩统计图判断出 85 分以上的人数为 4 人，即可得出小明排第 5；

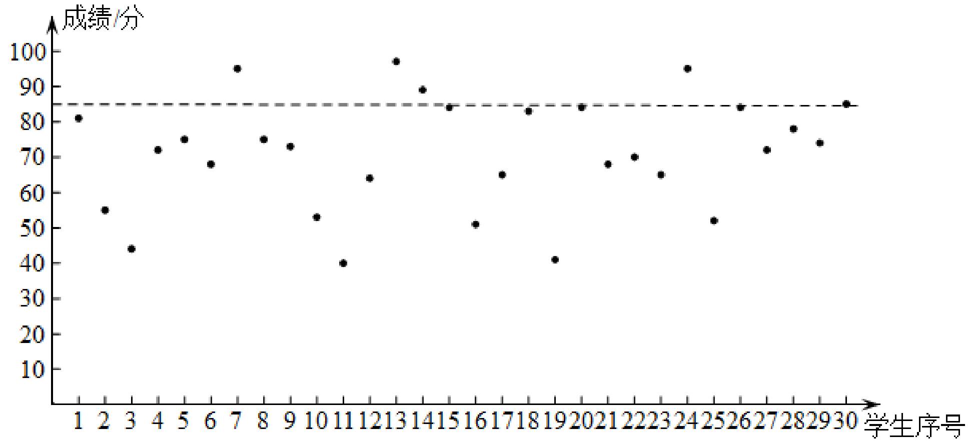
（2）先判断出中位数位于哪一组，再结合 b 中的频数和 c 中的数据，根据中位数的定义求解即可；

（3）根据方差的定义，再结合统计图判断即可；

（4）先求出样本中 80 分以上的比例，再乘以该校初中总人数 420 即可．

【小问 1 详解】

如图所示，可知小华的测试成绩在抽取的 30 名同学的成绩中从高到低排名第 5；



故答案为：5；

【小问 2 详解】

由中位数的定义可知，将这组数据按从小到大排列后，最中间的两个数据的平均数即为中位数，

由频数分布直方图可知六个组的人数分别为 3、4、5、8、7、3，因此第 15 和 16 个数据位于第四组；

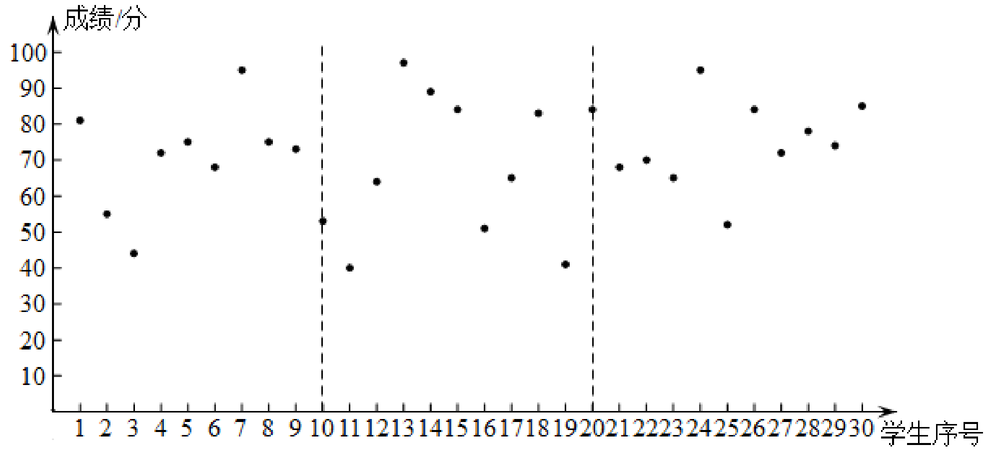
由 c 中信息可知，第 15 和 16 个数据分别是 74 和 74，

因此中位数还是 74，

故答案为：74；

小问 3 详解】

由图可知，八年级点的波动最大，九年级的波动最小，



$\therefore S_2^2 > S_1^2 > S_3^2$，

故答案为：$S_2^2 > S_1^2 > S_3^2$；

【小问 4 详解】

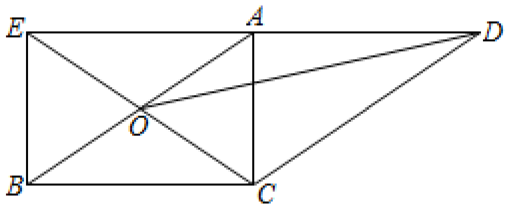
由 b 与 c 图可知，成绩 80 分以上的人数为 7+3=10（人），

$\therefore$若该校初中三个年级 840 名同学都参加测试，估计成绩优秀的同学约为$\dfrac{10}{30}\times 840 = 280$（人），

故答案为：280．

【点睛】本题涉及到的知识点有频数分布直方图、中位数、方差、用样本数据估计总体等知识，要求学生能从题干和图形中挖掘有效信息，在理解相关概念的前提下正确判断或求解，能通过样本数据估计总体的数据，考查了学生的审题能力、读图能力、处理数据的能力以及综合分析的能力等．

23. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AC \perp AD$，作 $\angle ECA = \angle ACD$， CE 交 AB 于点 O，交 DA 的延长线于点 E，连接 BE．



（1）求证：四边形 $ACBE$ 是矩形；

（2）连接 OD．若 $AB = 4$， $\angle ACD = 60°$，求 OD 的长．

【答案】（1）见解析；

（2） $2\sqrt{7}$

【解析】

【分析】（1）先证明四边形 $ACBE$ 是平行四边形，然后根据有一个角是直角的平行四边形是矩形即可证明；

（2）先证明 ΔAOC 为等边三角形，由各角之间的关系得出 $\angle FAO=90°-60°=30°$，根据含有 30°角的直角三角形的性质及勾股定理进行求解即可得出结果．

【小问 1 详解】

证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$AD // BC$，$AD=BC$，

∵$AC \perp AD$，

∴ $\angle EAC=\angle DAC=90°$，

∵ $\angle ECA=\angle ACD$，

∴ $\angle AEC=\angle ADC$，

∴$CE=CD$，

∴$AE=AD=BC$，

∵$AE // BC$，

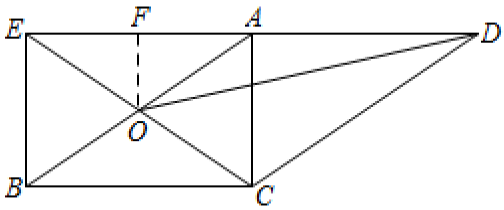
∴四边形 $ACBE$ 是平行四边形，

∵ $\angle EAC=90°$，

∴四边形 $ACBE$ 为矩形；

【小问 2 详解】

如图，过点 O 作 $OF \perp DE$ 于 F，



由（1）可知，四边形 $ACBE$ 为矩形，

∴对角线 AB 与 CE 相等且互相平分，$AO=\frac{1}{2}AB=2$，

∴$OA=OC$，

∵ $\angle ACD=\angle ACO=60°$，

∴ΔAOC 为等边三角形，

∴ $\angle OAC=60°$，

∵ $\angle EAC=90°$，

∴ $\angle FAO=90°-60°=30°$，

在 $Rt\Delta AFO$ 中，

$OF=\frac{1}{2}AO=1$， $AF=\sqrt{3}$，

在 $Rt\Delta AEB$ 中， $BE=\frac{1}{2}AB=2$，

$AD=AE=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

∴$DF=AF+AD=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，

∴$OD=\sqrt{DF^2+OF^2}=2\sqrt{7}$．

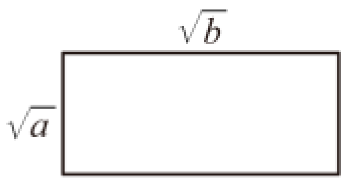
【点睛】题目主要考查矩形的判定和性质，平行四边形的性质，勾股定理，等边三角形的判定和性质，含有 30°角的直角三角形的性质等，理解题意，熟练掌握运用这些知识点是解题关键．

24. 观察猜想

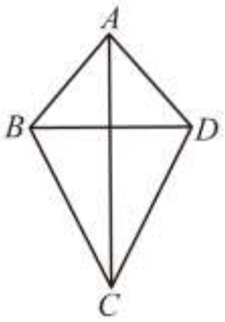
（1）观察猜想：①$2+1>2\sqrt{1\times 2}$；②$3+\frac{1}{3}>2\sqrt{3\times\frac{1}{3}}$；③$8+8=2\sqrt{8\times 8}$．

通过上面三个计算，可以初步对任意的非负实数 a，b 做出猜想：$a+b$ ____ $2\sqrt{ab}$；

（2）验证结论：我们知道可以利用几何图形对一个等式进行验证，请你利用与下图全等的四个矩形，构造几何图形对你的猜想进行验证．（要求：画出构造的图形，写出验证过程）



（3）结论应用：如图，某同学在做一个面积为 800cm^2，对角线相互垂直　四边形玩具时，用来做对角线的竹条至少要_____cm．



【答案】（1）≥；

（2）证明见解析；　（3）80

【解析】

【分析】（1）根据三个式子可直接得出猜想；

（2）利用四个长方形构造出正方形，结合图形求中间的小正方形面积即可证明；

（3）设对角线的长分别为 a 厘米，b 厘米，由对角线垂直得出四边形面积，然后利用（2）中结论即可得出结果．

【小问 1 详解】

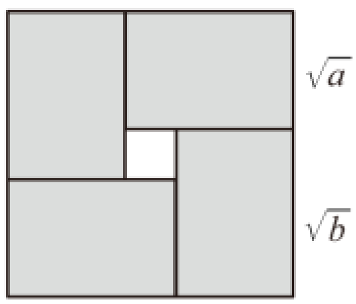
解：观察三个式子可得，

猜想：$a+b\geq 2\sqrt{ab}$，

故答案为：≥；

【小问 2 详解】

解：如图所示，将四个小长方形围城一个大正方形，且画为阴影，



中间所围成的小正方形的边长为：$\sqrt{b}-\sqrt{a}$，

所围成的图形的面积为：$\left(\sqrt{b}-\sqrt{a}\right)^2\geq 0$，

即 $\left(\sqrt{b}\right)^2-2\sqrt{b}?\sqrt{a}+\left(\sqrt{a}\right)^2\geq 0$，

∴$a+b\geq 2\sqrt{ab}$；

【小问 3 详解】

解：设对角线的长分别为 a 厘米，b 厘米，

∵对角线互相垂直，

四边形 $ABCD$ 的面积为：$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}ab$，

即 $\frac{1}{2}ab=800$，

∴ $ab=1600$，

∵ $a+b\geq 2\sqrt{ab}=2\times\sqrt{1600}=80$，

∴用来做对角线的竹条至少要用 80 厘米，

故答案为：80．

【点睛】题目主要考查完全平方公式的应用，理解题意，熟练掌握完全平方公式的证明方法是解题关键．

25. 如图，在正方形 $ABCD$ 外有一点 P，满足 $\angle APB=45°$，以 AP，AD 为邻边作▱$APQD$．

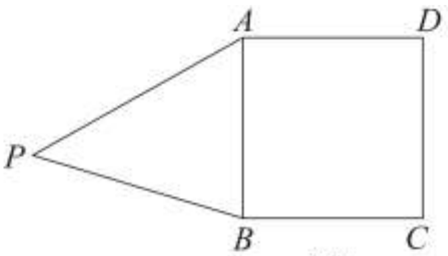
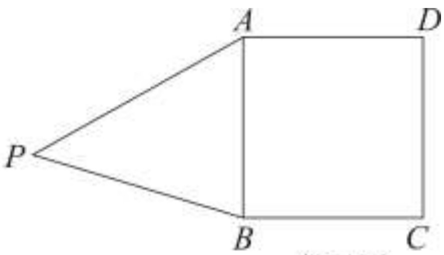


图1



备用图

（1）如图 1，根据题目要求补全图形；

（2）连接 QC，求 $\angle DQC$ 的度数；

（3）连接 AQ，猜线段 AQ，PQ 和 PB 之间的数量关系并证明．

【答案】（1）见解析；　（2）45 度；

（3）$PQ=\sqrt{\frac{PB^2+AQ^2}{2}}$

【解析】

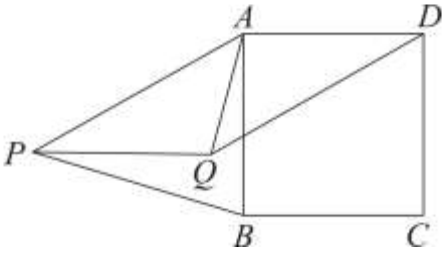
【分析】（1）根据平行四边形的作法，过点 P 作 $PQ\parallel AD$，过点 D 作 $DQ\parallel AP$，PQ、DQ 相交于点 Q，即可得出平行四边形；

（2）连接 CQ，根据平行四边形的判定定理可得 $PQCB$ 为平行四边形，利用平行线的性质及各角之间的关系即可得出结果；

（3）过点 D 作 $DH\perp DQ$ 交 QC 于点 H，得出点 Q、C、H 在同一直线上，$DQ=DH$，根据全等三角形的判定和性质可得 $\Delta AQD\cong\Delta CHD$，$AD=DC=PQ$，$AQ=CH$，线段 AQ、PQ、PB 之间的数量关系转化为 CH、DC、QC 之间的关系，过点 D 作 $DE\perp QH$，由直角三角形斜边上的中线的性质可得 $DE=QE=EH=\frac{QC+CH}{2}$，结合图形、勾股定理及各线段间的数量关系即可得出结果．

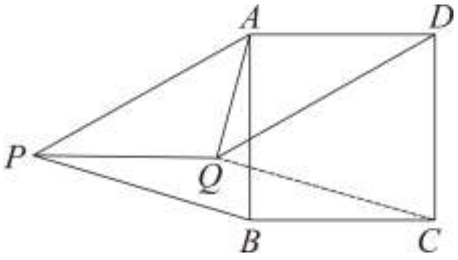
【小问 1 详解】

解：如图所示，过点 P 作 $PQ // AD$，过点 D 作 $DQ // AP$，PQ、DQ 相交于点 Q，四边形 $APQD$ 即为所求；



【小问 2 详解】

连接 CQ，如图所示，



∵$APQD$ 为平行四边形，

∴$AD // PQ$，$AD=PQ$，

∵$AD // BC$，$AD=BC$，

∴$PQ // BC$，$PQ=DC$，

∴$PQCB$ 为平行四边形，

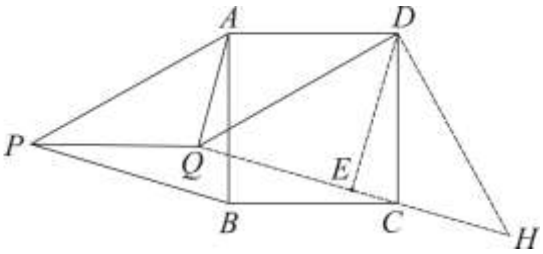
∴ $\angle PQD+\angle APQ=180°$，$\angle QPB+\angle PQC=180°$，

∵ $\angle APB=\angle APQ+\angle QPB=45°$，$\angle PQD+\angle PQC+\angle DQC=360°$，

∴ $\angle DQC=45°$；

【小问 3 详解】

过点 D 作 $DH\perp DQ$ 交 QC 于点 H，



∵ $\angle DQC=45°$，

∴ $\angle DHC=45°$，

∴$DQ=DH$，

∴ΔDQH 为等腰直角三角形，

∴ $\angle QDH=\angle ADC=90°$，

∴ $\angle ADQ+\angle QDC=\angle HDC+\angle QDC$，

∴ $\angle ADQ=\angle HDC$，

在ΔAQD 与ΔCHD 中，

$$\begin{cases} AD=DC \\ \angle ADQ=\angle CDH \\ DQ=DH \end{cases},$$

∴$\Delta AQD \cong \Delta CHD$，

∴$AD=DC=PQ$，$AQ=CH$，

由（2）得 $PQCB$ 为平行四边形，

∴$PB=CQ$，

线段 AQ、PQ、PB 之间的数量关系转化为 CH、DC、QC 之间的关系，

过点 D 作 $DE\perp QH$，

∴$DE=QE=EH=\dfrac{QC+CH}{2}$，

∴$CE=EH-CH=\dfrac{QC-CH}{2}$，

∴ $CD=\sqrt{CE^2+DE^2}=\sqrt{\left(\dfrac{QC-CH}{2}\right)^2+\left(\dfrac{QC+CH}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{QC^2+CH^2}{2}}$，

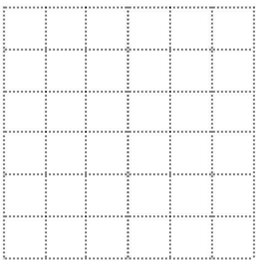
即 $PQ=\sqrt{\dfrac{PB^2+AQ^2}{2}}$，

∴线段 AQ、PQ、PB 之间的数量关系为 $PQ=\sqrt{\dfrac{PB^2+AQ^2}{2}}$．

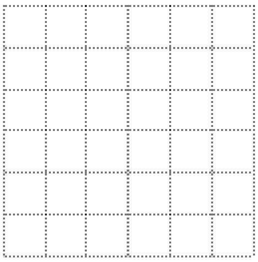
【点睛】题目主要考查平行四边形的判定和性质，勾股定理解三角形，全等三角形的判定和性质等，理解题意，作出相应辅助线是解题关键．

26. 在正方形网格中，每个小正方形的边长为 1．线段 $AC=\sqrt{m^2+n^2}$（m，n 均为正整数），点 A，C 在格点上，以 AC 为对角线画出正方形 $ABCD$（B，D 落在网格内）．

（1）当 m=____，n=____时（给出一组值即可），B，D 在格点上，在网格中画出正方形 $ABCD$；



（2）当 m=____，n=_____时（给出一组值即可），B，D 均不在格点上，在网格中画出正方形 $ABCD$（尺规作图，保留痕迹，不写作法）；



（3）当 m，n 满足______时，B，D 一定在格点上（网格纸足够用）．

【答案】（1）2；4；（答案不唯一）

（2）1；4；（答案不唯一）

（3）$m+n$ 为偶数

【解析】

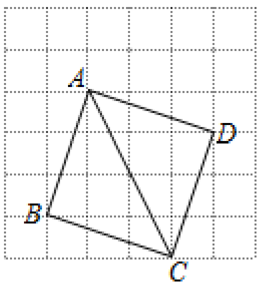
【分析】（1）根据题目要求作图即可；

（2）利用尺规作出图形即可；

（3）结合作图过程即可得出结果．

【小问 1 详解】

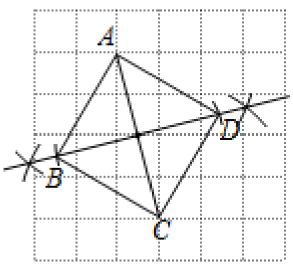
解：当 $m=2$，$n=4$ 时，B、D 在格点上，如图所示，正方形 $ABCD$ 即为所求（答案不唯一）；



故答案为：2；4；

【小问 2 详解】

当 $m=1$，$n=4$ 时，作线段 AC 的垂直平分线，然后以交点为圆心，$\frac{1}{2}AC$ 为半径画弧，交线段 AC 的垂直平分线于点 B，D 两点，然后连接即可，点 B、D 不在格点上，如图所示，正方形 $ABCD$ 即为所求（答案不唯一）；



故答案为：1；4；

【小问 3 详解】

结合图象可得，

当 m，n 满足 $m+n$ 是偶数时，B、D 一定在格点上，

故答案为：$m+n$ 是偶数．

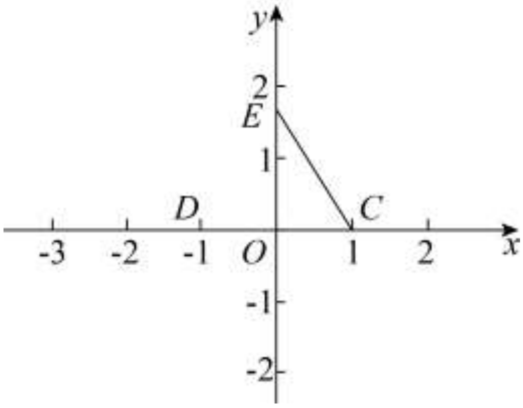
【点睛】题目主要考查作图-应用与设计作图，勾股定理，正方形的判定和性质等，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解答．

27. 对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W_1 和图形 W_2 给出如下定义：在图形 W_1 上存在两点 A，B（点 A，B 可以重合），在图形 W_2 上存在两点 M，N（点 M，N 可以重合）使得 $AM=2BN$．则称图形 W_1 和图形 W_2 满足限距关系．

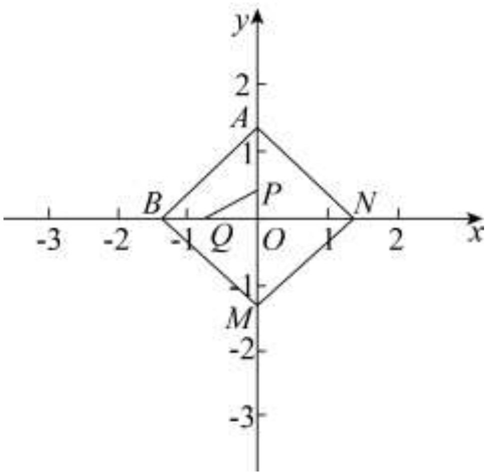
（1）如图，点$C(1,0)$，$D(-1,0)$，$E(0,\sqrt{3})$，点 F 在 CE 上运动（点 F 可以与 C，E 重合），连接 OF，DF.

①线段 OF 的最小值为____，最大值为____；线段 DF 的取值范围是____；

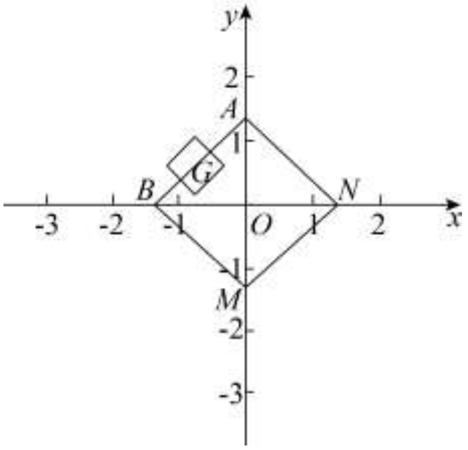
② 点 O，D 中，点____与线段 CE 满足限距关系；



（2）如图，正方形 $ABMN$ 的边长为 2，直线 PQ 分别于 x 轴，y 轴交于点 Q，P，且与 x 轴正方向的夹角始终是 $30°$，若线段 PQ 与正方形 $ABMN$ 满足限距关系，求点 P 的纵坐标 $a(a>0)$ 的取值范围；



（3）如图，正方形 $ABMN$ 的顶点均在坐标轴上，$A(0,b)(b>0)$，G，H 是正方形边上两点，分别以 G，H 为中心作边长为 1 的正方形，与正方形 $ABMN$ 的四边分别平行，若对于任意的点 G，H，以 G，H 为中心的正方形都满足限距关系，直接写出 b 的取值范围.



【答案】（1）①$\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\sqrt{3}$；$\sqrt{3} \le DF \le 2$；②O；

（2）$\frac{\sqrt{6}}{9} \le a \le 3\sqrt{2}$；

（3）$0 < b \le \frac{3}{2}\sqrt{2}$．

【解析】

【分析】（1）①根据题意得出 OC=1，OD=1，OE=$\sqrt{3}$，找到当 $OF \perp CE$ 时，OF 的值最小，利用等面积法得出最小值；观察图象得出当与点重合时取得最大值；确定 DF 的取值范围方法与其一致，进行求解即可；

②根据限距关系的定义，线段 CE 上存在两点 M、N，满足当 OM 为最小值 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，ON 为最大值 $\sqrt{3}$ 时，满足限距定义，即可得出结果；

（2）根据题意可得 OQ=$\sqrt{PQ^2-OP^2}=\sqrt{3}a$，由正方形的边长得出 OA=OB=$\sqrt{2}$，当 $\sqrt{3}a=\sqrt{2}$ 时，即 a=$\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，点 Q 与点 B 重合，分三种情况讨论：当 $0<a<\frac{\sqrt{6}}{3}$ 时，线段 PQ 在正方形内部；当 $\frac{\sqrt{6}}{3} \le a \le \sqrt{2}$ 时，线段 PQ 与正方形有公共点；当 $a>\sqrt{2}$ 时，线段 PQ 在正方形外部；分别利用锐角三角函数及勾股定理求解即可得出结果；

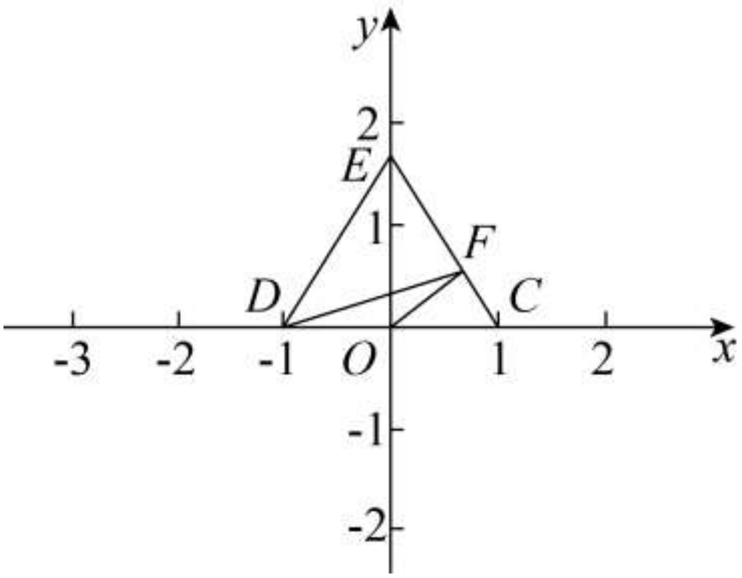
（3）考虑中心 H、G 分别与 B、N 重合，根据题意得出 OA=OB=ON=b，对角线长为 $CD=PQ=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，结合图形得出两个正方形的距离的最小值为 BN-BD-PN=2b-$\sqrt{2}$，最大值为：BN+CB+NQ=2b+$\sqrt{2}$，利用限距定义得出不等式求解即可．

【小问 1 详解】

解：①∵点 $C(1,0)$，$D(-1,0)$，$E(0,\sqrt{3})$，

∴OC=1，OD=1，OE=$\sqrt{3}$，

∴CE=$\sqrt{OC^2+OE^2}=2$，



当 $OF \perp CE$ 时，

$$\frac{1}{2}\cdot OC\cdot OE = \frac{1}{2}\cdot EC\cdot OF，$$

$\therefore OF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

此时，OF 的值最小；

当点 F 与点 E 重合时，OF 的值最大，最大值为 $\sqrt{3}$；

当 $DF \perp CE$ 时，DF 的值最小，

$\therefore \dfrac{1}{2}\cdot DC\cdot OE = \dfrac{1}{2}\cdot EC\cdot DF$，

$\therefore DF=\sqrt{3}$，

当点 F 与点 C 或点 E 重合时，DF 取得最大值，

$DE=\sqrt{OD^2+OE^2}=2=DC$，

$\therefore DF$ 最大值为 2，

$\therefore \sqrt{3} \le DF \le 2$；

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；$\sqrt{3}$；$\sqrt{3} \le DF \le 2$；

②根据限距关系的定义，

线段 CE 上存在两点 M、N，满足当 OM 为最小值 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，ON 为最大值 $\sqrt{3}$ 时，

$OM=2ON$，

$\therefore$点 O 与线段 CE 满足限距关系；

$\because \sqrt{3} \le DF \le 2$，

$\therefore$线段 CE 上不存在两点与点 D 满足限距关系；

故答案为：O；

【小问 2 详解】

解：∵点 P 坐标为（0，a），$\angle PQO$=30°，

∴OP=a，PQ=$2a$，

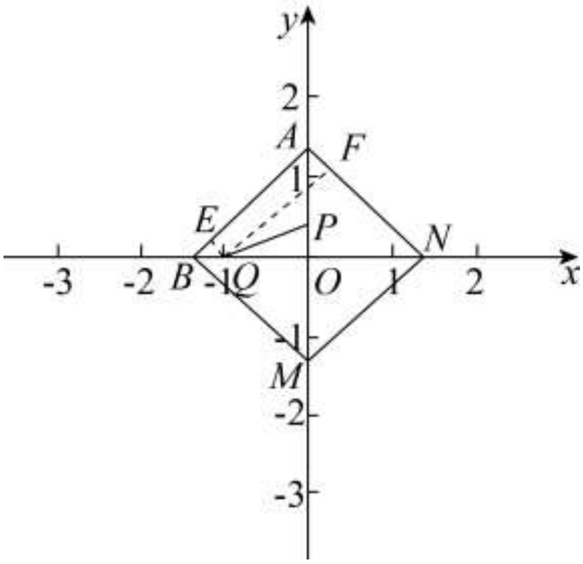
∴OQ=$\sqrt{PQ^2-OP^2}=\sqrt{3}a$，

∵正方形的边长为 2，

∴OA=OB=$\sqrt{2}$，

当$\sqrt{3}a=\sqrt{2}$时，即 a=$\frac{\sqrt{6}}{3}$时，点 Q 与点 B 重合，

∴当$0<a<\frac{\sqrt{6}}{3}$时，线段 PQ 在正方形内部，与正方形无公共点，



此时正方形上的点到线段 PQ 的最短距离为：

$QE=\sqrt{BQ^2-BE^2}=\sqrt{BQ^2-QE^2}$，

解得：$QE=1-\frac{\sqrt{6}a}{2}$，

最大距离为 $NF=\sqrt{QN^2-QF^2}=\sqrt{QN^2-NF^2}$，

解得：$NF=1+\frac{\sqrt{6}a}{2}$，

∵线段 PQ 与正方形满足限距关系，

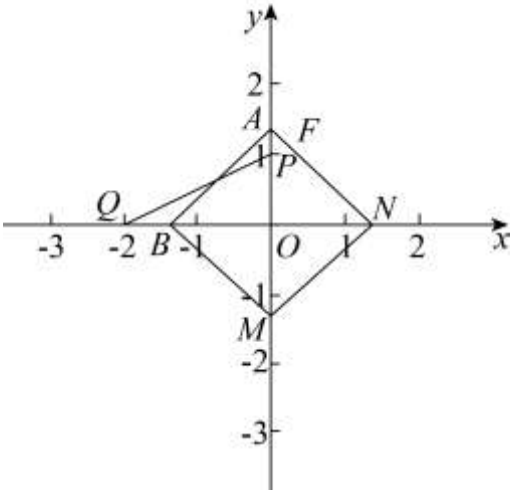
∴$1+\frac{\sqrt{6}a}{2}\geq 2\left(1-\frac{\sqrt{6}a}{2}\right)$，

解得：$a\geq\frac{\sqrt{6}}{9}$，

$\therefore \dfrac{\sqrt{6}}{9} \le a < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$；

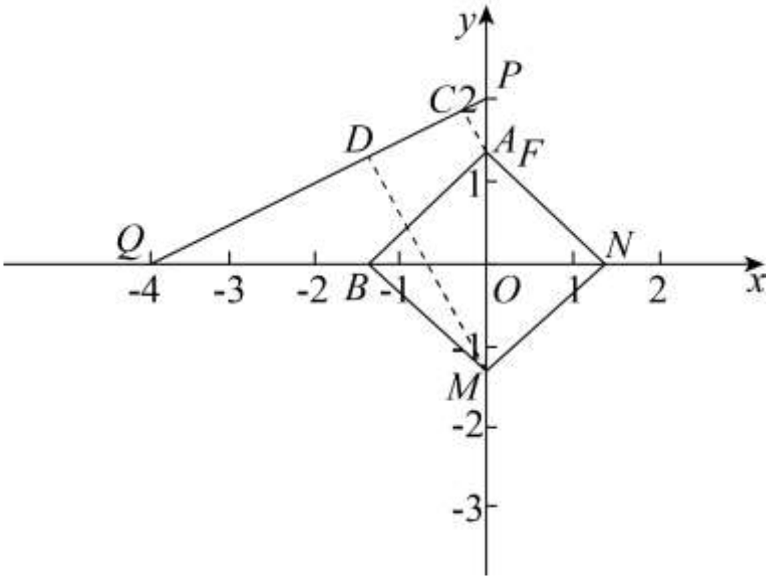
当 $\dfrac{\sqrt{6}}{3} \le a \le \sqrt{2}$ 时，

线段 PQ 与正方形有公共点，



线段 PQ 与正方形满足限距关系；

当 $a > \sqrt{2}$ 时，线段 PQ 在正方形外部，与正方形没有公共点，



由去可知：$\angle OPQ$=60°，

$\therefore \angle PAC$=30°，$\angle PMD$=30°，

$\therefore CP = \dfrac{1}{2}AP$，$PD = \dfrac{1}{2}MP$，

此时正方形到线段 PQ 的最小距离为 $AC = \sqrt{AP^2 - CP^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a - \sqrt{2}\right)$，

最大距离　：$MD = \sqrt{MP^2 - PD^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(a + \sqrt{2}\right)$，

由于线段 PQ 与正方形满足限距关系，

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a+\sqrt{2}\right)\geq 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a-\sqrt{2}\right),$$

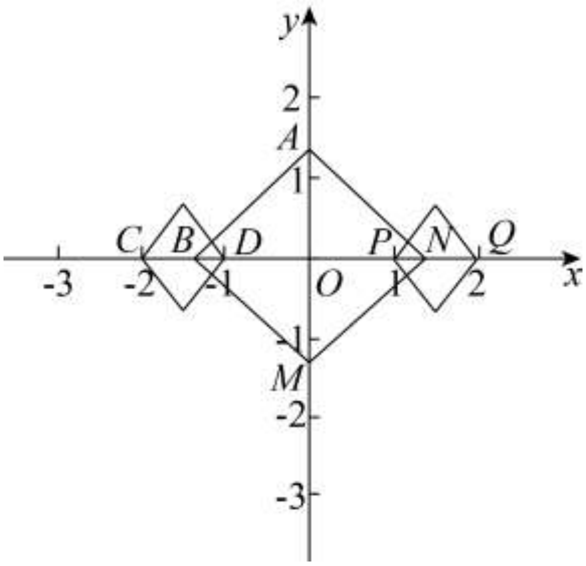
解得：$a\leq 3\sqrt{2}$，

$\therefore \sqrt{2}<a\leq 3\sqrt{2}$；

综上可得：$\dfrac{\sqrt{6}}{9}\leq a\leq 3\sqrt{2}$；

【小问 3 详解】

解：如图所示：中心 H、G 分别与 B、N 重合，



A（0，b），

$\therefore OA=OB=ON=b$，

$\because$ 小正方形的边长为 1，

$\therefore$ 对角线长为 $CD=PQ=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\therefore$ 两个正方形的距离的最小值为 $BN\text{-}BD\text{-}PN=2b\text{-}\sqrt{2}$，

最大值为：$BN+CB+NQ=2b+\sqrt{2}$，

$\because$ 两个正方形满足限距关系，

$\therefore 2b+\sqrt{2}\geq 2\left(2b-\sqrt{2}\right)$，

解得：$b\leq\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$，

$\therefore 0<b\leq\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

【点睛】题目主要考查正方形的性质及勾股定理解三角形，利用锐角三角函数解三角形等，理解题意，作出相应图象，综合运用这些知识点是解题关键.