通州区 2023—2024 学年第一学期九年级期末质量检测

数学试卷

2024 年 1 月

学校________________ 班级________________ 姓名________________

考生须知	1. 本试卷共 6 页，共三道大题，28 个小题，满分为 100 分，考试时间为 120 分钟. 2. 请在试卷和答题卡上准确填写学校名称、班级、姓名. 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效. 4. 在答题卡上，选择题、作图题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答. 5. 考试结束后，请将答题卡交回.

一、选择题（本题共 8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）每题均有四个选项，符合题意的选项只有一个.

1. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$AB=5$，则 $\sin A$ 的值是

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{5}$

2. 已知$\odot O$ 的半径为 6，点 P 到圆心 O 的距离为 4，则点 P 在$\odot O$

A. 内　　B. 上　　C. 外　　D. 无法确定

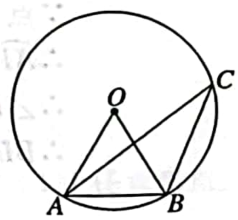
3. 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y=2x^2$ 先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度后所得到的抛物线的表达式为

A. $y=2(x-3)^2+4$　　B. $y=2(x-3)^2-4$

C. $y=2(x+3)^2+4$　　D. $y=2(x+3)^2-4$

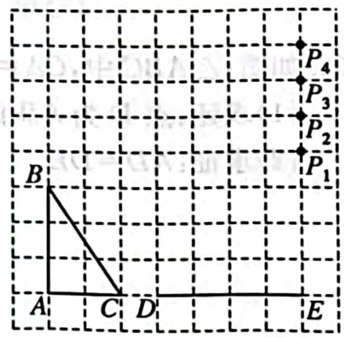
4. 如图，点 A，B，C 在$\odot O$ 上，$\triangle OAB$ 是等边三角形，则$\angle ACB$ 的大小为

A. $20°$　　B. $30°$　　C. $40°$　　D. $60°$



5. 如图，在方格纸中，$\triangle ABC$ 和$\triangle EPD$ 的顶点均在格点上，要使$\triangle ABC\backsim\triangle EPD$，则点 P 所在的格点为

A. P_1　　B. P_2　　C. P_3　　D. P_4



6. 下列关于二次函数 $y=3x^2$ 的说法正确的是

A. 它的图象经过点$(-1,-3)$

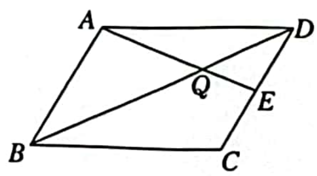
B. 它的图象的对称轴是直线 $x=3$

C. 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小

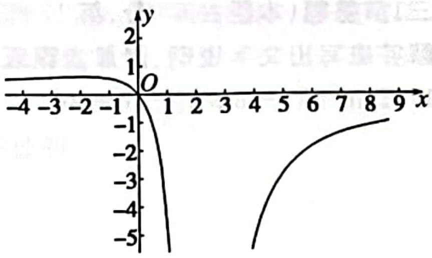
D. 当 $x=0$ 时，y 有最大值为 0

7. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E 为 DC 边的中点，AE 交 BD 于点 Q，若$\triangle DQE$ 的面积为 9，则$\triangle AQB$ 的面积为

A. 18　　B. 27　　C. 36　　D. 45



8. 兴趣小组同学借助数学软件探究函数 $y=\dfrac{ax}{(x-b)^2}$ 的图象，输入了一组 a,b 的值，得到了它的函数图象，借助学习函数的经验，可以推断输入的 a,b 的值满足



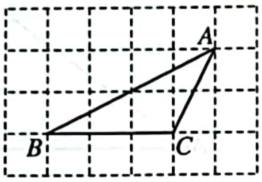
A. $a<0,b>0$　　　　B. $a>0,b<0$

C. $a>0,b>0$　　　　D. $a<0,b<0$

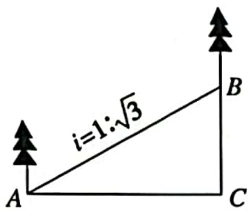
二、填空题(本题共 8 个小题，每小题 2 分，共 16 分)

9. 若扇形的圆心角为 60°，半径为 2，则该扇形的弧长是__________(结果保留 π).

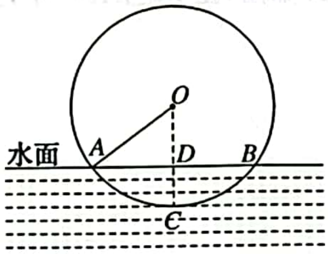
10. 如图，△ABC 的顶点都是正方形网格中的格点，则 $\tan\angle ABC=$__________.



第 10 题



第 11 题



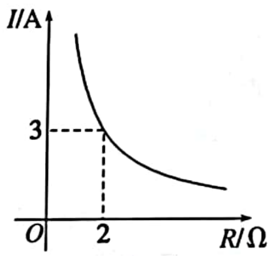
第 12 题

11. 某市开展植树造林活动. 如图，在坡度 $i=1:\sqrt{3}$ 的山坡 AB 上植树，要求相邻两树间的水平距离 AC 为 $2\sqrt{3}$ 米，则斜坡上相邻两树间 AB 的坡面距离为__________米.

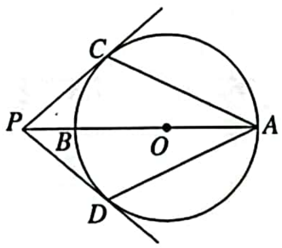
12. 唐代李皋发明了“桨轮船”，这种船是原始形态的轮船，是近代明轮航行模式之先导. 如图，某桨轮船的轮子被水面截得的弦 AB 长为 8 米，轮子的半径 AO 为 5 米，则轮子的吃水深度 CD 为__________米.

13. 已知蓄电池的电压为定值，使用蓄电池时，电流 I(单位:A)与电阻 R(单位:Ω)是反比例函数关系，它的图象如图所示. 如果以此蓄电池为电源的用电器的限制电流不能超过 6 A，那么用电器的可变电阻 R 应控制在__________Ω.

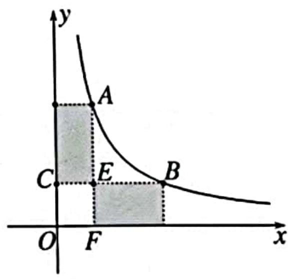
14. 如图，AB 为⊙O 的直径，点 P 在 AB 的延长线上，PC，PD 分别与⊙O 相切于点 C，D，若 $\angle CPA=40°$，则 $\angle CAD$ 的度数为__________.



第 13 题



第 14 题



第 15 题

15. 如图，A，B 两点在反比例函数 $y=\dfrac{4}{x}$ $(x>0)$ 的图象上，分别过点 A，B 向坐标轴作垂线段. 若四边形 $OCEF$ 面积为 1，则阴影部分的面积之和为__________.

16. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 A 的坐标为(4,0). P 是第一象限内任意一点，连接 PO，PA. 若 $\angle POA=m°$，$\angle PAO=n°$，则我们把 $P\langle m,n\rangle$ 叫做点 P 的“角坐标”.

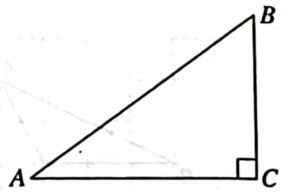
(1)点(2,2)的“角坐标”为__________；

(2)若点 P 到 x 轴的距离为 2，则 $m+n$ 的最小值为__________.

三、解答题（本题共 68 分，第 17－22 题每题 5 分；第 23－26 题每题 6 分；第 27－28 题每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

17．$2\sin^2 60°-\tan 45°+4\cos 60°$

18．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=6$，$\tan A=\frac{3}{4}$．求 AC 的长和 $\cos B$ 的值．



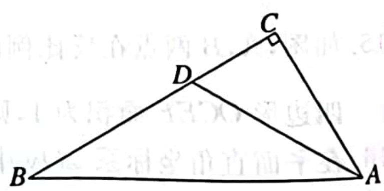
19．已知二次函数几组 x 与 y 的对应值如下表：

x	…	-3	-2	-1	1	3	4	…
y	…	12	5	0	-4	0	5	…

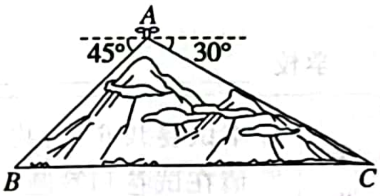
（1）写出此二次函数图象的对称轴；

（2）求此二次函数的表达式．

20．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，AD 平分 $\angle CAB$，交 BC 于点 D，$CD=2$，$AC=2\sqrt{3}$，求 AB 的长．



21. 无人机是利用无线电遥控设备和自备的程序控制装置操纵的不载人飞机，在跟踪、定位、遥测、数据传输等方面发挥着重要作用，在如图所示的某次测量中，无人机在小山上方的 A 处，测得小山两端 B,C 的俯角分别是 $45°$ 和 $30°$，此时无人机距直线 BC 的垂直距离是 200 米，求小山两端 B,C 之间的距离.



22. 下面是某同学设计的"过三角形一个顶点作其对边的平行线"的尺规作图过程.

已知：如图 1，$\triangle ABC$.

求作：直线 BD，使得 $BD\parallel AC$.

作法：如图 2，

①分别作线段 AC,BC 的垂直平分线 l_1,l_2，两直线交于点 O；

②以点 O 为圆心，OA 长为半径作圆；

③以点 A 为圆心，BC 长为半径作弧，交劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 D；

④作直线 BD.

所以直线 BD 就是所求作的直线.

根据设计的尺规作图过程，

(1)使用直尺和圆规，补全图形；(保留作图痕迹)

(2)完成下面的证明.

证明：连接 AD，

$\because$ 点 A,B,C,D 在 $\odot O$ 上，$AD=BC$，

$\therefore \overset{\frown}{AD}=$ ________.

$\therefore \angle DBA=\angle CAB$(　　　　　　　　　　　)(填推理的依据).

$\therefore BD\parallel AC$.

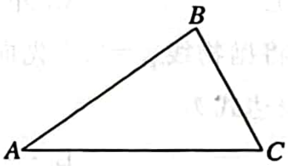


图 1

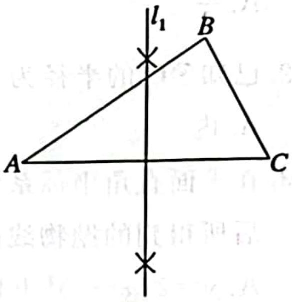
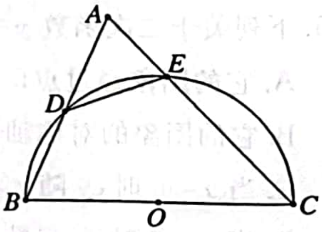


图 2

23. 如图，$\triangle ABC$ 中，$CA=CB$，以 BC 为直径的半圆与 AB 交于点 D，与 AC 交于点 E.

(1)求证：点 D 为 AB 的中点；

(2)求证：$AD=DE$.



24. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 的一个交点是 $A(m,3)$.

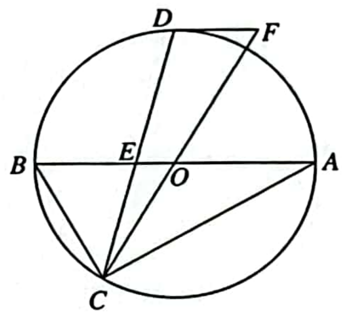
(1)求 m 和 k 的值；

(2)设点 P 是双曲线 $y=\frac{6}{x}$ 上一点，直线 AP 与 x 轴交于点 B. 若 $AB=3PB$，结合图象，直接写出点 P 的坐标.

25. 如图，点 C 在以 AB 为直径的⊙O 上，CD 平分∠ACB 交⊙O 于点 D，交 AB 于点 E，过点 D 作 DF∥AB 交 CO 的延长线于点 F.

(1)求证：直线 DF 是⊙O 的切线；

(2)若∠$A=30°$，$AC=4\sqrt{3}$，求 DF 的长.



26. 在平面直角坐标系 xOy 中，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-1$ 上任意两点.

(1)求抛物线的顶点坐标(用含 m 的式子表示)；

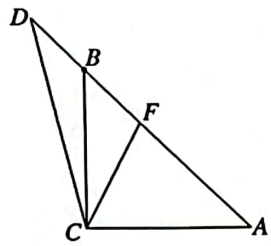
(2)若 $x_1=m-2$，$x_2=m+5$，则 y_1________y_2；(用"<"，"="，或">"填空)

(3)若对于 $-1\leqslant x_1<4$，$x_2=4$，都有 $y_1\leqslant y_2$，求 m 的取值范围.

27. 如图，$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，点 D 在 AB 的延长线上，取 AD 的中点 F，连结 CD、CF，将线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 得到线段 CE，连结 AE、BE.

(1)依题意，请补全图形；

(2)判断 BE、CF 的数量关系及它们所在直线的位置关系，并证明.



28. 在平面直角坐标系 xOy 中，$\odot O$ 的半径为 1. 给出如下定义：过$\odot O$ 外一点 P 做直线与$\odot O$ 交于点 M、N，若 M 为线段 PN 的中点，则称线段 PN 是$\odot O$ 的“外倍线”.

(1)如图 1，点 P_1，P_2，P_3，N_1，N_2，N_3 的横、纵坐标都是整数. 在线段 P_1N_1，P_2N_2，P_3N_3 中，$\odot O$ 的“外倍线”是________________；

(2)$\odot O$ 的“外倍线”PN 与直线 $x=2$ 交于点 P，求点 P 纵坐标 y_P 的取值范围；

(3)如图 2，若$\odot O$ 的“外倍线”PN，N 的坐标为$(-1,0)$，直线 $y=x+b$ 与线段 PN 有公共点，直接写出 b 的取值范围.

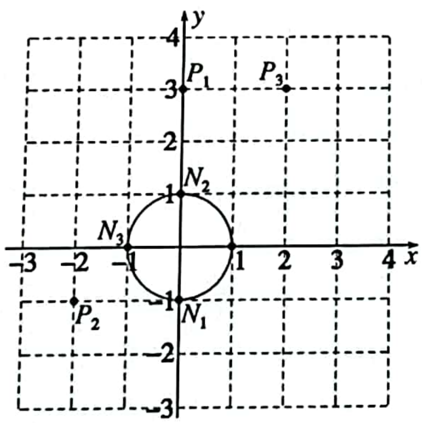


图 1

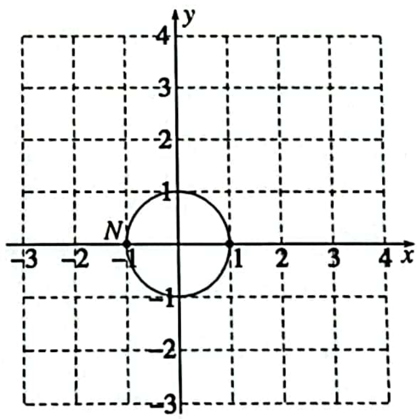


图 2

通州区 2023-2024 学年第一学期九年级期末质量检测
数学试卷参考答案及评分标准

2024 年 1 月

一、选择题（本题共 8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	D	B	C	C	C	A

二、填空题（本题共 8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）

9. $\frac{2\pi}{3}$　　10. $\frac{1}{2}$　　11. 4　　12. 2

13. $R\geqslant 1$　　14. 50°　　15. 6　　16. （1）$\langle 45,45\rangle$　（2）90

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 题每题 5 分；第 23-26 题每题 6 分；第 27-28 题每题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 解：原式$=2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1+4\times\frac{1}{2}$　…………………3 分

$=\frac{5}{2}$　…………………5 分

18. 解：在 Rt△ABC 中，$BC=6$，$\tan A=\frac{3}{4}$

∴$AC=8$　…………………2 分

∴$AB=10$　…………………3 分

∴$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}$　…………………5 分

19. 解：（1）∵二次函数图象经过点（−1，0）和（3，0）

∴该二次函数图象的对称轴为直线 $x=1$　…………………2 分

（2）由题意可知：二次函数图象的顶点坐标为（1，−4）　…………………3 分

∴设该二次函数表达式为：$y=a(x-1)^2-4\ (a\neq 0)$

将（3，0）点代入得：$4a-4=0$

∴$a=1$　…………………4 分

∴$y=x^2-2x-3$…………………5 分

20. 解：在 Rt△ADC 中，CD=2，AC= $2\sqrt{3}$，

∴$\tan\angle CAD=\dfrac{CD}{CA}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ …………………1 分

∴$\angle CAD=30^\circ$ …………………2 分

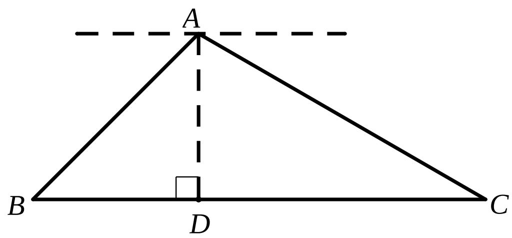
∵AD 平分$\angle CAB$

∴$\angle CAB=2\angle CAD=60^\circ$ …………………3 分

在 Rt△ABC 中，$\angle B=30^\circ$

∴$AB=2AC=4\sqrt{3}$. …………………5 分

21. 解：过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D …………………1 分



∴$\angle B=45^\circ$，$\angle C=30^\circ$

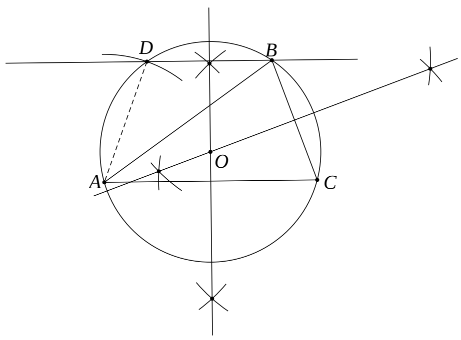
在 Rt△ABD 中，$AD=BD=200$ …………………2 分

在 Rt△ACD 中，$CD=\sqrt{3}AD=200\sqrt{3}$ …………………3 分

∴$CB=200+200\sqrt{3}$. …………………4 分

答：小山两端 B，C 之间的距离为$\left(200+200\sqrt{3}\right)$米. ………5 分

22. （1）



…………………3 分

（2）证明：连接 AD,

∵点 A，B，C，D 在⊙O 上，$AD=BC$,

∴ $AD=\underline{BC}$. …………………4 分

∴ $\angle DBA=\angle CAB$（ 等弧所对的圆周角相等）（填推理的依据）. …………………5 分

∴ $BD\parallel AC$.

23. （1）证明：连结 CD …………………1 分

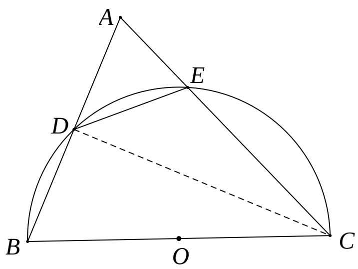
∵BC 为半圆的直径

∴$\angle BDC=90^\circ$ …………………2 分

∴$BD\perp CD$

∵ $CA=CB$

∴点 D 为 AB 的中点 ....3 分



（2）方法一：

证明：∵ $CA=CB$

∴$\angle B=\angle A$

∵四边形 $BCED$ 为圆内接四边形

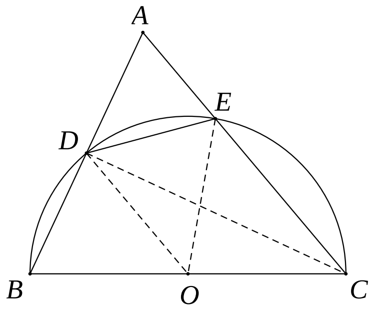
∴$\angle AED=\angle B$ ....4 分

∴$\angle AED=\angle A$ ....5 分

∴ $AD=DE$. ....6 分

方法二：

证明：连结 DO，EO，



∵ $CA=CB$，$AD=BD$，

∴$\angle ACD=\angle BCD$ ....4 分

∵ $\angle DOE=2\angle ACD$，$\angle DOB=2\angle BCD$，

∴ $\angle DOE=\angle DOB$.

∴ $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DE}$

∴ $BD=DE$. ....5 分

∵ $AD=BD$，

∴ $AD=DE$. ....6 分

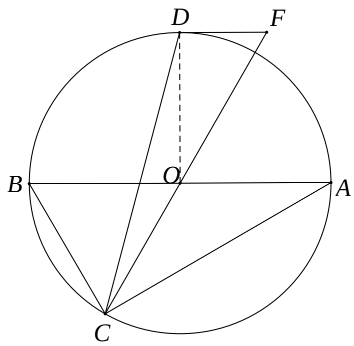
24. 解：（1）∵直线 $y=kx+2$ 与双曲线 $y=\dfrac{6}{x}$ 的一个交点是 $A(m,3)$

∴把点 $A(m,3)$ 代入 $y=\dfrac{6}{x}$ 中，得 $3m=6$， $m=2$ ....1 分

∴把点 $A(2,3)$ 代入 $y=kx+2$，得 $2k+2=3$， $k=\dfrac{1}{2}$. ....2 分

（2）点 $P(6,1)$ 或 $(-6,-1)$. ....6 分

25.（1）证明：连结 OD



∵AB 为$\odot O$ 的直径

∴$\angle ACB=90^\circ$

∵CD 平分$\angle ACB$

∴ $\angle ACD=45^\circ$ ……………………1 分

∴ $\angle AOD=2\angle ACD=90^\circ$ ……………………2 分

∵ $DF // AB$

∴ $\angle AOD+\angle ODF=180^\circ$

∴ $\angle ODF=90^\circ$

∴直线 DF 是⊙O 的切线. ……………………3 分

（2）解：在 Rt△ABC 中，$\angle A=30^\circ$，$AC=4\sqrt{3}$，

∴ $BC=4$，$AB=8$ ……………………4 分

∴ $OD=4$

∵ $\angle COB=60^\circ$

又∵ $DF // AB$

∴ $\angle F=60^\circ$ ……………………5 分

在 Rt△ODF 中，$DF=\dfrac{OD}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. ……………………6 分

26. 解：（1）∵ $y=x^2-2mx+m^2-1=\left(x-m\right)^2-1$ ……………………1 分

∴抛物线顶点坐标为（m，−1）. ……………………2 分

（2）$y_1<y_2$. ……………………3 分

（3）∵抛物线对称轴为直线 $x=m$，

∴点（4，y_2）关于对称轴的对称点为（$2m-4$，y_2），……………………4 分

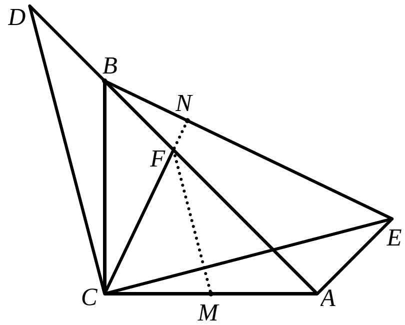
∵抛物线开口向上，$y_1\leqslant y_2$，

∴ $2m-4\leqslant x_1<4$，

∴ $2m-4\leqslant -1$，

解得 $m\leqslant\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………6 分

27. （1）如图 ……………………1 分



（2）$BE=2CF$，$BE\perp CF$

证明：取 AC 中点 M，连结 FM

∵ F 为 AD 中点

∴ $FM // CD$，$FM=\dfrac{1}{2}CD$

∵线段 CD 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到线段 CE

$\therefore FM=\frac{1}{2}CE$

$\because AC=BC$

$\therefore CM=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}CB$

$\therefore \frac{CM}{BC}=\frac{FM}{EC}$ ……………………………2 分

$\because FM\parallel CD$

$\therefore \angle FMC+\angle DCA=180°$

$\therefore \angle FMC=180°-\angle DCA=90°-\angle ECA$

$\because \angle BCE=90°-\angle ECA$

$\therefore \angle FMC=\angle BCE$ ……………………………3 分

$\therefore \triangle FMC\backsim\triangle ECB$ ……………………………4 分

$\therefore BE=2CF$，$\angle BEC=\angle CFM$ ……………………………5 分

$\because DC\perp CE$

$\therefore FM\perp CE$

$\therefore \angle FCE+\angle CFM=90°$

$\therefore \angle FCE+\angle BEC=90°$ ……………………………6 分

$\therefore BE\perp CF$. ……………………………7 分

注：方法不唯一，酌情给分

28. 解：（1）P_1N_1，P_2N_2. ……………………………………2 分

（2）由题意，可得 $PN=2MN$.

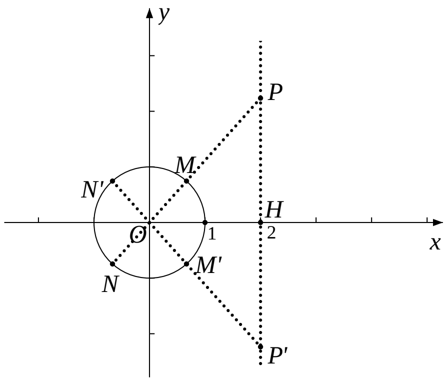
$\because MN\leqslant 2$，

$\therefore PN\leqslant 4$.

如图，当 $OP=3$ 且点 P 在直线 $x=2$ 上时，

$\because OH=2$，

$\therefore PH=P'H=\sqrt{5}$.



结合图形，点 P 的纵坐标取值范围

为 $-\sqrt{5}\leqslant y_P\leqslant\sqrt{5}$. ……………………………………5 分

（3）$-2\sqrt{2}-1\leqslant b\leqslant 2\sqrt{2}-1$. ……………………………………7 分