北京市朝阳区九年级综合练习

数学试卷

2021.3

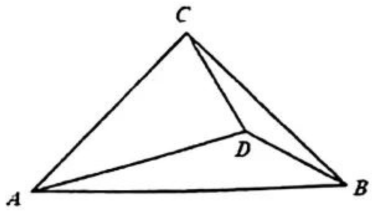
学校__________ 班级__________ 姓名__________ 考号__________

一、选择题（本题共 20 分，每小题 4 分）

下面 1−5 题均有四个选项，其中符合题意的选项只有一个.

1．在△ABC 中，∠ACB=90°，∠CAD=30°，AC=BC=AD，则∠CBD 的度数为（　　）

（A）12°
（B）13°
（C）14°
（D）15°



2．已知三个有理数 a，b，c 的积是负数，它们的和是正数，当 $x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ 时，代数式 $x^{19}-x+2$ 的值为（　　）

（A）0　　（B）2　　（C）4　　（D）5

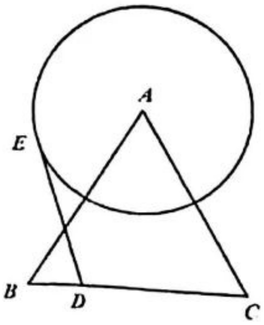
3. 小天计算一组数据 92，90，94，86，100，88 的方差为 $s_0^{\ 2}$，则数据 46，45，47，43，50，44 的方差为（　　）

（A）$s_0^{\ 2}$　　（B）$\frac{1}{2}s_0^{\ 2}$　　（C）$\frac{1}{4}s_0^{\ 2}$　　（D）$\frac{1}{8}s_0^{\ 2}$

4．如图，等边△ABC 的边长为 2，⊙A 的半径为 1，点 D 是线段 BC 上一动点（不与 B，C 重合），过点 D 作⊙A 的切线，切点为 E，DE 的最小值为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$

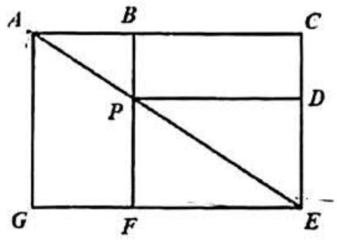
（C）$\sqrt{3}$　　（D）2



5. 一只小虫子欲从 A 点不重复经过图中的点或者线段，而最终到达目的地 E，这只小虫子的不同走法共有（　　）

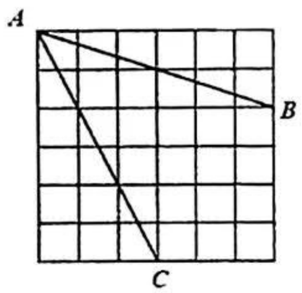
（A）12 种　　（B）13 种

（C）14 种　　（D）15 种

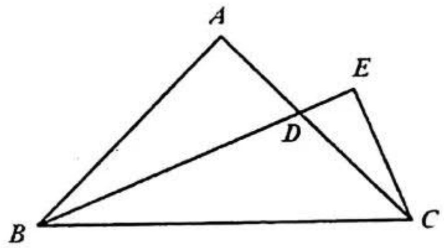


二、填空题（本题共 20 分，每小题 4 分）

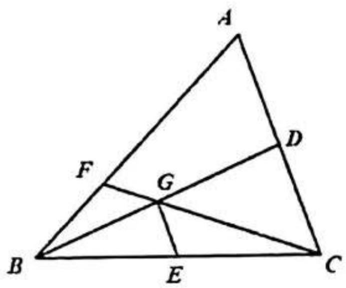
6. 如图所示的正方形网格中，A，B，C 是网格线交点，$\angle CAB$ 的度数为______.



（第 6 题图）



（第 7 题图）



（第 8 题图）

7.在$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，BE 平分$\angle ABC$ 交 AC 于点 D，$CE\perp BE$，若 $CE=1$，则 BD 的长为________.

8.在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别是 AC，BC 的中点，点 F 在边 AB 上，BD 与 FC 相交于点 G，连接 EG，若 $BF=\frac{1}{3}AB$，则 $\frac{S_{\triangle BFG}}{S_{\triangle BEG}}=$______.

9．已知关于 x 的方程 $mx^2+2x+5m=0$ 有两个不相等的实数根 x_1，x_2，且 $x_1<2<x_2$，则实数 m 的取值范围为____________.

10．**阅读下面材料：**

分解因式：$x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3$.

因为 $x^2+3xy+2y^2=(x+y)(x+2y)$，

设 $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3=(x+y+m)(x+2y+n)$.

比较系数得，$m+n=4,2m+n=5$. 解得 $m=1,n=3$.

所以 $x^2+3xy+2y^2+4x+5y+3=(x+y+1)(x+2y+3)$.

解答下面问题：

在有理数范围内，分解因式 $2x^2-21xy-11y^2-x+34y-3=$____________________.

三、解答题（本题共 60 分，第 11 题 8 分，12-15 题，每小题 10 分，16 题 12 分）

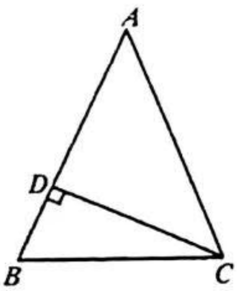
11. 游船在湖面 A 处时，望见正北方向和北偏西 60° 方向各有 1 个灯塔，继续乘船向正西方向航行 1 海里到达 B 处，这时两个灯塔分别在它的东北、西北方向，求这两个灯塔之间的距离.（$\sqrt{3}\approx 1.73$，结果保留一位小数）

12. 在几何的证明中，经常可以通过“作一个角等于已知角，作一条线段等于已知线段”或者 “过一点作已知直线的平行线，过一点作已知直线的垂线”的方式添加辅助线，解决问题.

例如，证明“等腰三角形腰上的高与底边所夹的角等于顶角的一半”.

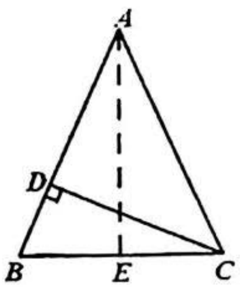
即“已知：如图，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$CD\perp AB$.求证：$\angle DCB=\dfrac{1}{2}\angle A$.”.

证明的两种方法虽然不同，但总体思路基本一致.



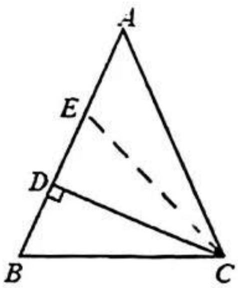
方法一

如图，作$\angle BAC$ 的平分线 AE 交 BC 于点 E. 通过作等角，利用等腰三角形“三线合一”的性质和“三角形内角和定理”，即可证明.



方法二

如图，过点 C 作射线 CE 交 AB 于点 E，使$\angle DCE=\angle DCB$. 通过作等角，利用“全等三角形对应角相等”，“等腰三角形的两个底角相等”和“三角形内角和定理”即可证明.



参考以上内容，求证“若三角形的两边不等，则大边同这边上的高的和，一定大于小边同这边上的高的和”.

13．在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过点 A（$-\sqrt{3}$，0），B（$3\sqrt{3}$,0），C（0，-3）．

（1）求抛物线顶点 P 的坐标；

（2）连接 BC 与抛物线对称轴交于点 D，连接 PC.

①求证：$\triangle PCD$ 是等边三角形.

②连接 AD，与 y 轴交于点 E，连接 AP，在平面直角坐标系中是否存在一点 Q，使以 Q，C，D 为顶点的三角形与 $\triangle ADP$ 全等.若存在，直接写出点 Q 坐标，若不存在，请说明理由；

（3）在（2）的条件下，点 M 是直线 BC 上任意一点，连接 ME，以点 E 为中心，将线段 ME 逆时针旋转 60°，得到线段 NE，点 N 的横坐标是否发生改变.若不改变，直接写出点 N 的横坐标；若改变，请说明理由.

14．已知二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 图象的顶点坐标为（1，16）．

（1）求 b，c 的值；

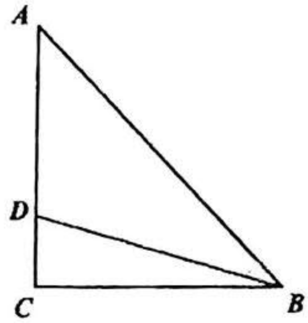
（2）是否存在实数 m，n（$m<n$），使当 $m\leqslant x\leqslant n$ 时，二次函数的最小值是 $4m$，最大值是 $4n$. 若存在，求出 m，n 的值；若不存在，请说明理由.

15．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，$AC=BC$，点D是AC边上一点（不与点A，C重合），连接BD，以点D为中心，将线段DB顺时针旋转$90°$，得到线段DE，连接EC并延长交AB边于点F.

（1）依题意补全图形；

（2）①求证：$EC=CF$；

②用等式表示线段CD与AF之间的数量关系，并证明.



16．对于给定的$\odot M$和点P，若存在边长为1的等边$\triangle PQR$，满足点Q在$\odot M$上，且$MP \geq MR$（规定当点R，M重合时，$MR=0$），称点P为$\odot M$的"远圆点".

（1）在平面直角坐标系xOy中，$\odot O$的半径为$\sqrt{3}$.

①在点$A(\sqrt{3},1)$，$B(0,3)$，$C(-\sqrt{3},0)$，$D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$E(0,1-\sqrt{3})$中，$\odot O$的"远圆点"是________；

②已知直线$l: y=\sqrt{3}x+b\ (b>0)$分别交x轴，y轴于点F，G，且线段FG上存在$\odot O$的"远圆点"，直接写出b的取值范围.

（2）线段HI上的所有点都是以M（1，0）为圆心，以r为半径的$\odot M$的"远圆点"，已知H（-1，0），I（0，1），直接写出r的取值范围是________.

北京市朝阳区九年级综合练习

数学试卷评分标准及参考答案

2021.3

一、选择题（本题共 20 分，每小题 4 分）

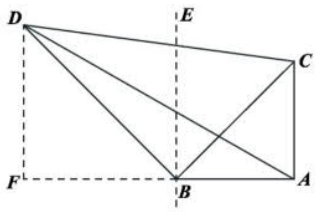
题号	1	2	3	4	5
答案	D	B	C	B	C

二、填空题（本题共 20 分，每小题 4 分）

题号	6	7	8	9	10
答案	45°	2	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{9}<m<0$	$(x-11y+1)(2x+y-3)$

三、解答题（本题共 60 分，第 11 题 8 分，12-15 题，每小题 10 分，16 题 12 分）

11．解：画出示意图，如图，点 C 和点 D 代表两个灯塔.



……………………………………………………………………………………2 分

由题意，易知$\angle CAB=90°$，$\angle CAD=60°$，$\angle CBE=\angle DBE=45°$，$AB=1$，

$\therefore BC=\sqrt{2}$.……………………………………………………………………3 分

过点 D 作 AB 的延长线的垂线，垂足为 F. 由题意，有$\angle DBF=45°$，

设 $DF=x$，则 $BF=x$.

在 Rt$\triangle AFD$ 中，$\tan30°=\dfrac{x}{x+1}$，解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$.

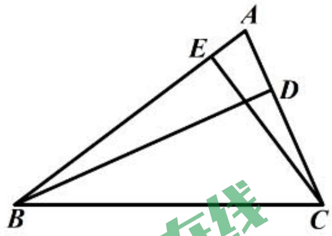
$\therefore BD=\sqrt{2}\,x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{3})$. ……………………………………………………5 分

在 Rt$\triangle BCD$ 中，$CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=\sqrt{4+\sqrt{3}}\approx 2.4$.……………………………7 分

答：两个灯塔之间的距离大约是 2.4 海里. ……………………………………………8 分

12．已知：如图，在△*ABC* 中，*AB*＞*AC*，*BD*，*CE* 分别为 *AB*，*AC* 边上的高.

求证： *AB*+*CE*＞*AC*+ *BD*.



……4 分

证明：如图，在 *AB* 截取 *AF*= *AC*，过点 *F* 作 *FH*⊥*AC* 于点 *H*，

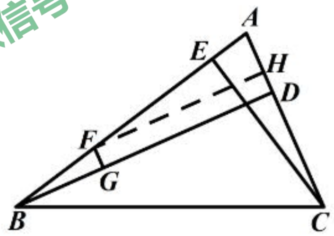
可证△*AFH*≌△*ACE*. ……………………………………5 分

∴*FH*=*CE*. ………………………………………………......6 分

过点 *F* 作 *FG*⊥*BD* 于点 *G*，

易证四边形 *FGDH* 是平行四边形. …………………7 分

∴*FH*=*GD*. ……………………………………………....8 分



∴*BF*=*AB*−*AF*=*AB*−*AC*，*BG*=*BD*−*GD*= *BD*−*CE*.……………………………………………....9 分

在 Rt△*BGF* 中， *BF*＞*BG*.

∴*AB*−*AC*＞*BD*−*CE*.

∴*AB*+*CE*＞*AC*+ *BD*. ………………………………………………………………………..10 分

13．解：（1）设抛物线解析式为 $y=a(x+\sqrt{3})(x-3\sqrt{3})$.

∵抛物线经过点 *C*（0，-3），

∴ $a=\frac{1}{3}$. ……………………………………………………………………………………… 1 分

∴抛物线顶点 $P(\sqrt{3},-4)$. …………………………………………………………………… 2 分

（2）①设直线 *BC* 的解析式为 $y=kx-3$.

∵直线经过点 *B*，

∴ $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………………………………………………… 3 分

∴点 $D(\sqrt{3},-2)$. …………………………………………………………………………… 4 分

∴ $PD=CD=2$,∠*CPD*=60° .

∴△*PCD* 是等边三角形.…………………………………………………………………….5 分

②点 *Q* 坐标为$(0,-7)$ ， $(\sqrt{3},2)$ ， $(3\sqrt{3},-4)$ ， $(-2\sqrt{3},-1)$. ……………………………...9 分

（3）点 *N* 的横坐标为 $\sqrt{3}$ ………………………………………………………………………….10 分

14. 解：（1）∵ 二次函数 $y=-x^2+bx+c$ 图象的顶点横坐标为 1，

∴ $-\dfrac{b}{-2}=1$. 解得 $b=2$. ………………………………………………………………… 2 分

∴ 二次函数为 $y=-x^2+2x+c$.

当 $x=1$ 时，$y=-1+2+c=16$，

∴ $c=15$. ………………………………………………………………………………………… 4 分

（2）由二次函数图象的顶点坐标为（1，16）可知，图象的对称轴为直线 $x=1$.

解 $4x=-x^2+2x+15$，得 $x_1=-5$，$x_2=3$. ………………………………………………… 7 分

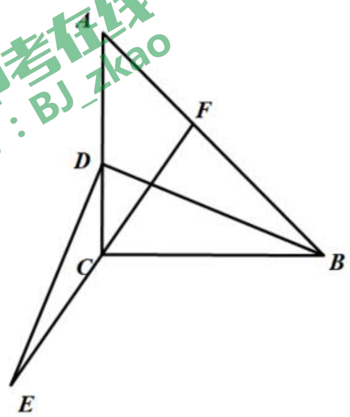
∴$m=-5$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

∵$x_2=3>1$，

∴$4n=16$.

∴$n=4$. ………………………………………………………………………………………10 分

15. 解：（1）补全图形，如图.



…………………………………………………………………………………………………2 分

（2）证明：延长 AC 到 G，使得 $CG=AC$.过 E 作 $EH\perp CG$ 于点 H，连接 EG.

由题意知，$DB=DE$，$\angle BDE=90°$.

∵$\angle BDC+\angle EDC=90°$，

又∵$\angle BDC+\angle DBC=90°$，

∴$\angle EDC=\angle DBC$.

∵$EH\perp CG$，

∴$\angle EHD=\angle C=90°$.

∴$\triangle BDC\cong\triangle DEH$. ……………………………… 4 分

∴$EH=CD$，$DH=BC$.

∴$AD+CD=CH+CD$.

∴$AD=CH$.

又∵$CG=AC$，

∴$CH+HG=AD+CD$.

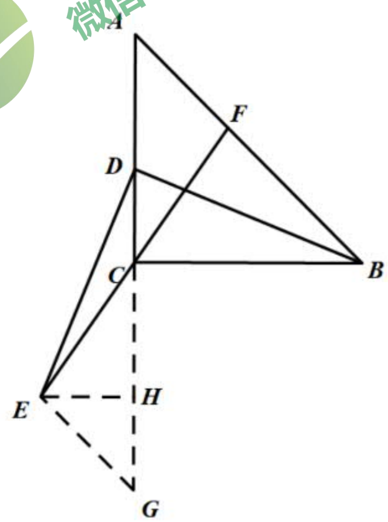
∴$HG=CD=EH$.

∴$\angle G=\angle A=45°$. ……………………………… 6 分

又∵$\angle ECG=\angle ACF$，

∴$\triangle ECG\cong\triangle FCA$.

∴$EC=CF$. ……………………………………….7 分



（3） $AF=\sqrt{2}CD$

证明：过 F 作 $FM\perp AC$ 于点 M.

$\because \angle A=45°$，

$\therefore AM=MF$.

$\because FM\perp AC$，

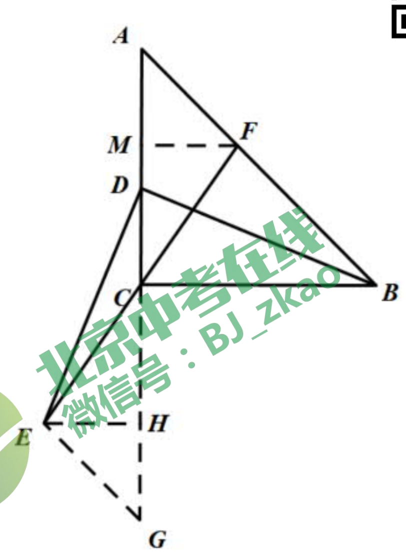
$\therefore \angle FMC=\angle EHC=90°$.

$\therefore \triangle FMC\cong\triangle EHC$……………………………...9 分

$\therefore FM=EH=CD$.

$\because AF=\sqrt{2}FM$，

$\therefore AF=\sqrt{2}CD$. ……………………………10 分



16.（1）①A，C，D；……………………………………………………………………...3 分

②$1\le b\le 2+2\sqrt{3}$；…………………………………………………………………...6 分

（2）$1\le r\le \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$ ……………………………………………………………………...12 分