2022 北京牛栏山一中高三（上）期中

数　　学

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $S=\{x|-2<x<1\}$，$T=\{x|0<x<2\}$，则 $S\cup T$（　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(-1,0)$

2. 设 $\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(-3,4)$，$\vec{c}=(3,2)$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=$（　）

A. $-6,4$　　B. -2　　C. 5　　D. $(1,4)$

3. 下列每组双曲线中渐近线都为 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 是（　）

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$，$y^2-\frac{x^2}{3}=1$

B. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$，$\frac{y^2}{3}-x^2=1$

C. $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{9}=1$，$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$

D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$，$y^2-x^2=3$

4. 抛物线 $y^2=8x$ 的准线过双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左焦点，则双曲线的虚轴长为（　）

A. 8　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $4\sqrt{3}$

5. 给出三个等式：$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，$f(x)+f(\pi+x)=0$．下列函数中不满足任何一个等式的是（　）

A. $f(x)=\lg x$

B. $f(x)=\mathrm{e}^x$

C. $f(x)=\sin x$

D. $f(x)=\tan x$

6. 已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是两个互相垂直的单位向量，$\vec{c}=\vec{a}+\lambda\vec{b}(\lambda\in R)$，则 $\lambda=1$ 是 $\vec{c}$ 和 $\vec{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 圆 $C:x^2+y^2=1$ 上的点 P 到直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=4(\theta\in\mathrm{R})$ 的距离为 d，点 P 和 θ 在变化过程中，d 的最小值为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 在平行四边形 $ABCD$ 中，E 是边 CD 的中点，AE 与 BD 交于点 F．若 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{AF}=$（　）

A. $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$　　B. $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$　　C. $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$　　D. $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

9. 函数 $f(x)=\sin 2x$ 图象上存在两点 $P(s,t)$，$Q(r,t)(t>0)$ 满足 $r-s=\frac{\pi}{6}$，则下列结论成立的是（　）

A. $f\left(s+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$　　B. $f\left(s+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $f\left(s-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$　　D. $f\left(s-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. 已知曲线 $C:\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$，则下列说法正确的有几个（　）

（1）C 关于原点对称；

（2）C 只有两条对称轴；

（3）曲线 C 上点到原点最大距离是 1；

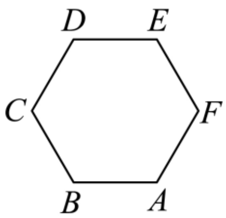
（4）曲线 C 所围成图形的总面积小于 π；

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. $\vec{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\vec{b}=(1,1)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\tan\theta=$______.

12. 如图，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 1，$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{DE}=$______.



13. 若 $f(x)=a\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(ab\neq 0)$ 是奇函数，则有序实数对 (a,b) 可以是______.（写出你认为正确的一组数即可）.

14. 若函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\le a,\\ x^2, x>a.\end{cases}$ 满足存在 $t\in R$ 使 $f(x)=t$ 有两个不同的零点，则 a 的取值范围是______.

15. 已知圆 $x^2+y^2=16$ 和定点 $P(2,0)$，动点 M 在圆上，Q 为 PM 中点，O 为坐标原点．则下面说法正确的是______.

①点 Q 到原点的最大距离是 4；

②若 $\triangle OMP$ 是等腰三角形，则其周长为 10；

③点 Q 的轨迹是一个圆；

④ $\angle OMP$ 的最大值是 $\frac{\pi}{6}$．

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16. 已知函数 $f\left(x\right)=2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^{2}x-\sin^{2}x\right)$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间；

（2）若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},m\right]\left(m>-\frac{\pi}{3}\right)$ 上的值域为 $\left[-2,2\right)$，求 m 值.

17. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 所对边的长分别为 a，b，c，且有 $2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C$

（1）求角 A 的大小；

（2）从下列条件①、条件②、条件③中选一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 唯一确定，并求 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①： AB 边上的高为 $\sqrt{3}$；

条件②： $a=\sqrt{7}$， $b=3$；

条件③： $a=\sqrt{7}$， $\sin B=3\sin C$.

18. 椭圆 $\Gamma:\frac{x^{2}}{4}+y^{2}=1$.

（1）点 C 是椭圆 Γ 上任意一点，求点 C 与点 $D\left(0,2\right)$ 两点之间距离 d 的最大值和最小值；

（2） A 和 B 分别为椭圆 Γ 的右顶点和上顶点． P 为椭圆 Γ 上第三象限点．直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N．求 $\left(\frac{|PM|}{|MA|}\right)^{2}+\left(\frac{|PN|}{|NB|}\right)^{2}$.

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{4}=1\left(a>0\right)$ 的焦点在 x 轴上，且经过点 $E\left(2,\sqrt{2}\right)$，左顶点为 D，右焦点为 F .

（1）求椭圆 C 的离心率和 $\triangle DEF$ 的面积；

（2）已知直线 $y=kx+1$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点．过点 B 作直线 $y=4$ 的垂线，垂足为 G．判断直线 AG 是否经过定点?若存在，求出这个定点；若不存在，请说明理由.

20. 已知 $x=1$ 是函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln\left(ax+2\right)$ 的一个极值点.

（1）求 a 值；

（2）判断 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（3）是否存在实数 m，使得关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\geq m$ 的解集为 $\left(0,+\infty\right)$?直接写出 m 的取值范围.

21. 已知有限数列 A：a_1，a_2，…，a_N（$N\geq 3$ 且 $N\in\mathbb{N}^{*}$）各项均为整数，且满足 $\left|a_i-a_{i-1}\right|=1$ 对任意 $i=2$，3，…，N 成立．记 $S\left(A\right)=a_1+a_2+\cdots+a_N$.

（1）若 $a_1=3$， $N=6$，求 $S(A)$ 能取到的最大值；

（2）若 $N=2022$，求证：$S(A)\neq 0$；

（3）若 $S(A)=100N$（这里 N 是数列的项数），求证：数列 A 中存在 $a_k\left(1\le k\le N\right)$ 使得 $a_k=100$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】C

【分析】由并集的定义直接求解.

【详解】$S=\{x|-2<x<1\}$，$T=\{x|0<x<2\}$，$\therefore S\cup T=\{x|-2<x<2\}$.

故选：C

2.【答案】B

【详解】根据平面向量数量积坐标运算求解即可.

【点睛】因为$\vec{a}=(1,-2)$，$\vec{b}=(-3,4)$，$\vec{c}=(3,2)$，

所以$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=3-4+(-9)+8=-2$.

故选：B

3.【答案】A

【分析】依次求出各双曲线的渐近线方程即可求解.

【详解】因为双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的焦点在x轴上，

$a=\sqrt{3}$，$b=1$，其渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

且双曲线$y^2-\frac{x^2}{3}=1$的焦点在y轴上，$a=1$，$b=\sqrt{3}$，

其渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，所以选项 A 正确；

因为双曲线$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$的焦点在$x$轴上，

$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，其渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

但双曲线$\frac{y^2}{3}-x^2=1$的焦点在y轴上，$a=\sqrt{3}$，$b=1$，

其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，所以选项 B 错误；

因为双曲线$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{9}=1$的焦点在$y$轴上，

$a=\sqrt{3}$，$b=3$，其渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

但双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$的焦点在$x$轴上，$a=\sqrt{3}$，$b=3$，

其渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，所以选项C错误；

因为双曲线$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$的焦点在$x$轴上，

$a=\sqrt{6}$，$b=\sqrt{2}$，其渐近线方程为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

但双曲线$y^2-x^2=3$的焦点在y轴上，$a=b=1$，

其渐近线方程为$y=\pm x$，所以选项D错误.

故选：A.

4.【答案】B

【分析】先求出抛物线的准线，从而可得双曲线的c，根据a,b,c的关系可得答案.

【详解】因为抛物线$y^2=8x$的准线为$x=-2$，所以由题意可知双曲线的左焦点为$(-2,0)$，

因为$1+b^2=4$，所以$b=\sqrt{3}$，所以双曲线的虚轴长为$2\sqrt{3}$.

故选：B.

5.【答案】D

【分析】对于A，利用对数的运算法则检验$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$即可；

对于B，利用指数的运算法则检验$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$即可；

对于C，利用三角函数诱导公式检验$f(x)+f(\pi+x)=0$即可；

对于D，举反例逐一判断三个等式即可.

【详解】对于A，因为$f(x)=\lg x$，所以$f(x_1x_2)=\lg x_1x_2=\lg x_1+\lg x_2=f(x_1)+f(x_2)$，故A不满足题意；

对于B，因为$f(x)=e^x$，所以$f(x_1+x_2)=e^{x_1+x_2}=e^{x_1}e^{x_2}=f(x_1)f(x_2)$，故B不满足题意；

对于C，因为$f(x)=\sin x$，所以$f(x)+f(\pi+x)=\sin x+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0$，故C不满足题意；

对于D，因为$f(x)=\tan x$，

所以令$x_1=\frac{\pi}{4},x_2=0$，则$f(x_1x_2)=\tan 0=0, f(x_1)+f(x_2)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan 0=1$，故

$f(x_1x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)$；

令$x_1=\frac{\pi}{4},x_2=0$，则$f(x_1+x_2)=\tan\frac{\pi}{4}=1, f(x_1)f(x_2)=\tan\frac{\pi}{4}\times\tan 0=0$，故

$f(x_1+x_2)\neq f(x_1)f(x_2)$；

令 $x=\frac{\pi}{4}$，则 $f(x)+f(\pi+x)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=1+1=2$，故 $f(x)+f(\pi+x)\neq 0$；

综上：$f(x)=\tan x$ 不满足任何一个等式，故 D 满足题意.

故选：D.

6.【答案】A

【分析】根据向量公式 $\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}$ 表示出 $\vec{c}$ 和 $\vec{a}$ 夹角的余弦值，再讨论夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 时 λ 的取值，最后根据充分条件和必要条件定义选出答案.

【详解】$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)=|\vec{a}|^2+\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{c}|=\sqrt{\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)^2}=\sqrt{1+\lambda^2}$

$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$，当 $\lambda=\pm1$ 时，$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\vec{c}$ 和 $\vec{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$，

故 $\lambda=1$ 是 $\vec{c}$ 和 $\vec{a}$ 夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 的充分不必要条件

故选：A

7.【答案】C

【分析】设出 P 点坐标，并利用点在圆上得出 $x_0^2+y_0^2=1$，根据点到直线距离公式表达出距离 d，利用辅助角公式化简 d，进而得出 d 的最小值.

【详解】解：由题意，

在圆 $C:x^2+y^2=1$ 中，

圆心 $C(0,0)$，半径 $\mathrm{r}=1$，

点 P 到直线 $x\cos\theta+y\sin\theta=4(\theta\in R)$ 的距离为 d

设 $P(x_0,y_0)$，

$x_0^2+y_0^2=1$，

$$d=\frac{|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-4|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}},$$

解得：$d=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-4|$

在 $d=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-4|$ 中，

$d=|x_0\cos\theta+y_0\sin\theta-4|=\left|\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sin(\theta+\varphi)-4\right|$，其中 $\tan\varphi=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$，

$\therefore d=\left|\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sin(2\theta)-4\right|=|\sin(2\theta)-4|$

当 $\sin(2\theta)=1$ 时，d 最小，$d_{\min}=|1-4|=3$.

故选：C.

8.【答案】D

【分析】设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AE}\left(0<\lambda<1\right)$，根据 B,F,D 三点共线，即 $\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BD}$ 共线，可设 $\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{BD}$，用 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 表示出关系，即可解出结果.

【详解】$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

设 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{AE}\left(0<\lambda<1\right)$，

则 $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\lambda\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)-\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AD}+\left(\dfrac{\lambda}{2}-1\right)\overrightarrow{AB}$，

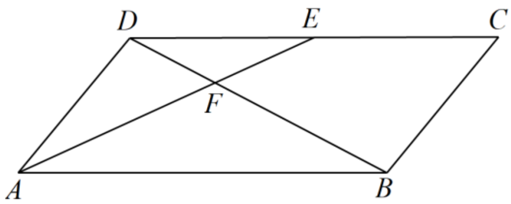
又 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，且 B,F,D 三点共线，则 $\overrightarrow{BF},\overrightarrow{BD}$ 共线，

即 $\exists\mu\in\mathrm{R}$，使得 $\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{BD}$，即 $\lambda\overrightarrow{AD}+\left(\dfrac{\lambda}{2}-1\right)\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{AD}-\mu\overrightarrow{AB}$，

又 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 不共线，则有 $\begin{cases}\lambda=\mu\\ \dfrac{\lambda}{2}-1=-\mu\end{cases}$，解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{2}{3}\\ \mu=\dfrac{2}{3}\end{cases}$，

所以，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$.

故选：D.



9.【答案】B

【分析】根据 $P\left(s,t\right)$，$Q\left(r,t\right)\left(t>0\right)$ 在 $f\left(x\right)=\sin 2x$ 上,可得出 $2r+2s=\pi+2k\pi,k\in Z$,再根联立 $r-s=\dfrac{\pi}{6}$,得到 s 的值,根据 $t>0$ 缩小 s 的取值范围,进而代入 $f\left(s+\dfrac{\pi}{6}\right),f\left(s-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 求值即可.

【详解】解:由题知 $f\left(x\right)=\sin 2x$，$\therefore T=\pi$，

$\because P\left(s,t\right),Q\left(r,t\right)$ 均在 $f\left(x\right)=\sin 2x$ 上,

$\therefore \sin 2s=\sin 2r=t>0$，

$\because r-s=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{T}{4}$，

$\therefore 0<2r-2s<\dfrac{T}{2}$，

故有: $2r+2s=\pi+2k\pi, k\in Z$

两等式联立有 $\begin{cases}2r+2s=\pi+2k\pi\\ r-s=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$，

解得 $\therefore 2s=\dfrac{\pi}{3}+k\pi, k\in Z$，

$\because \sin 2s=t>0$，

$\therefore 2s=\dfrac{\pi}{3}+2k_1\pi, k_1\in Z$，

$\therefore f\left(s+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\left(s+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2s+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore f\left(s-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin 2\left(s-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2s-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+2k\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，

综上选项 B 正确.

故选:B

10.【答案】C

【分析】对于（1）（2），代入 $(-x,-y),(x,-y),(-x,y),(y,x)$ 即可判断曲线 C 的对称情况；

对于（3），利用基本不等式与两点距离公式的几何意义即可判断；

对于（4），利用（3）中的结论容易判断.

【详解】对于（1），不妨设点 (x,y) 在曲线 $C:\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2$ 上，则 $(-x,-y)$ 也在该曲线上，所以曲线 C 关于原点对称，故（1）正确；

对于（2），易知 $(x,-y),(-x,y),(y,x)$ 也都在该曲线上，所以曲线 C 关于 x 轴、y 轴、$y=x$ 对称，故（2）错误；

对于（3），因为 $\left(x^2+y^2\right)^3=4x^2y^2\le\left(x^2+y^2\right)^2$，所以 $x^2+y^2\le1$，即 $\sqrt{x^2+y^2}\le1$，所以曲线 C 上点到原点最大距离是 1，故（3）正确；

对于（4），由（3）得，曲线 C 所围成的图形落在圆 $O:x^2+y^2=1$ 内，且显然是圆内的部分图形，而圆 O 的面积为 $\pi r^2=\pi$，所以曲线 C 所围成图形的总面积小于 π，故（4）正确；

综上：（1）（3）（4）正确，（2）错误，故说法正确的有 3 个.

故选：C.

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】1

【分析】利用向量共线的坐标表示和同角三角函数基本关系式进行求解.

【详解】由题意，得 $\cos\theta=\sin\theta$，则 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$.

故答案为：1.

12.【答案】-1

【分析】由正六边形性质，结合向量线性运算及数量积运算即可

【详解】由正六边形性质，$\angle ADE = 60°$，$AD = 2DE$，

$\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}=-\left|\overrightarrow{DA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DE}\right|\cos<\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}>=-2\times1\times\cos60°=-1$.

故答案为：-1.

13.【答案】$(1,1)$（答案不唯一）

【分析】首先根据正弦函数和差角公式将原式化简整理，然后根据奇函数的定义得到参数a，b应该满足的条件，按等式关系选取答案即可.

【详解】已知$ab\neq0$，$f(x)=a\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+b\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=a\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)+b\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-b)\cos x$，

若$f(x)$是奇函数，则$a-b=0$即可，

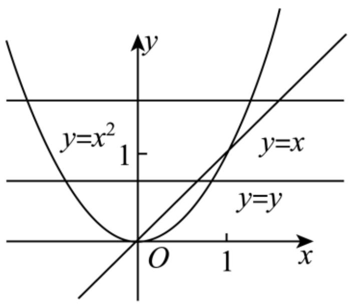
可以取$a=1$，$b=1$.

故答案为：$(1,1)$（答案不唯一）

14.【答案】$(-\infty,0)\cup(0,1)$

【分析】画出函数$f(x)=\begin{cases}x, x\le a\\x^2, x>a\end{cases}$的图象，观察图象即可得到答案.

【详解】如图所示，画出函数$f(x)=\begin{cases}x, x\le a\\x^2, x>a\end{cases}$的图象.



结合图象可知，$a\in(-\infty,0)\cup(0,1)$

故答案为：$(-\infty,0)\cup(0,1)$.

15.【答案】②③④

【分析】利用求轨迹方程的方法求出点Q的轨迹，再根据点和圆的位置关系确定点Q到原点的最大距离，再根据几何关系确定$\triangle OMP$的周长，利用余弦定理结合基本不等式得到$\cos\angle OMP\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$即可求出

$\angle OMP$ 的最大值.

【详解】设 $M(x_0,y_0),Q(x,y)$, 由中点坐标公式得 $\begin{cases}\dfrac{x_0+2}{2}=x\\ \dfrac{y_0}{2}=y\end{cases}$,

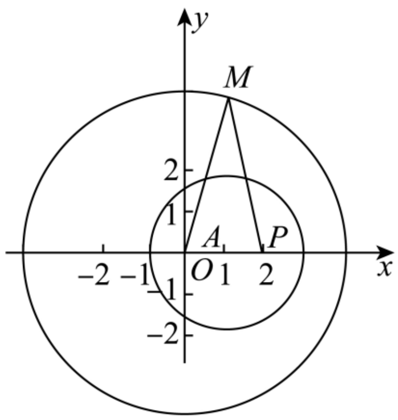
所以 $\begin{cases}x_0=2x-2\\ y_0=2y\end{cases}$,因为 $M(x_0,y_0)$ 在圆 $x^2+y^2=16$ 上,

所以 $x_0^2+y_0^2=16$,即 $(2x-2)^2+(2y)^2=16$,即 $(x-1)^2+y^2=4$,

所以点 Q 的轨迹是一个圆, 方程为 $(x-1)^2+y^2=4$,

是以 $A(1,0)$ 为圆心, $r=2$ 为半径的圆,

所以点 Q 到原点的最大距离是 $AO+r=1+2=3$, 故①错误;



因为 $P(2,0)$, 所以 $OP=2,OM=4$,

若 $\triangle OMP$ 为等腰三角形, 若 $PM=OP=2$,则 $M(4,0)$,

此时 O,P,M 三点共线, 不满足题意,

若 $PM=OM=4$,则 $M(1,\pm\sqrt{15})$,满足题意,

所以 $\triangle OMP$ 的周长等于 $4+4+2=10$, 故②正确;

由以上过程可知 Q 的轨迹是一个圆, 方程为 $(x-1)^2+y^2=4$,

所以③正确;

设 $\angle OMP=\theta$, 当 $M(\pm4,0)$ 时, $\angle OMP=0$, 不是最大角,

M 不为 $(\pm4,0)$ 时, $\triangle OMP$ 中, $2\le PM\le 6$

$$\cos\theta=\frac{OM^2+MP^2-OP^2}{2OM\cdot MP}=\frac{1}{8}\left(MP+\frac{12}{MP}\right)\ge\frac{1}{8}\times2\sqrt{MP\cdot\frac{12}{MP}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

当且仅当 $MP=\dfrac{12}{MP}$,即 $MP=2\sqrt{3}$ 时取得等号,

所以 $\theta\le\dfrac{\pi}{6}$, 故④正确.

故答案为：②③④.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.【答案】(1) $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

(2) $\frac{5\pi}{12}$

【分析】(1) 由诱导公式、二倍角公式和两角差的正弦公式，化简函数 $f(x)$ 为一个角的三角函数形式，然后结合正弦函数的性质求解；

(2) 求出 $2x-\frac{\pi}{3}$ 的范围，结合正弦函数的性质可求 m 值.

【小问 1 详解】

解：已知 $f(x)=2\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2x-\sin^2x\right)=2\cos x\cdot\sin x-\sqrt{3}\cos 2x=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$

增区间为：$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

$-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$

所以，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

【小问 2 详解】

解：已知 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},m\right)\left(m>-\frac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore -\frac{2\pi}{3}\leqslant 2x\leqslant 2m$，

即 $-\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}<2m-\frac{\pi}{3}$，

因为，值域为 $[-2,2)$，

$2m-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow m=\frac{5\pi}{12}$.

17.【答案】(1) $\frac{\pi}{3}$

(2) 答案见解析.

【分析】（1）注意到已知等式右边为$\sin B$，可得$\cos A=\frac{1}{2}$.

（2）若选择①，结合（1）只能求得 b.

若选择②，结合（1）和正弦定理，可求得$\sin B$.

若选择③，结合（1）和正，余弦定理，可求得 b，c.

【小问 1 详解】

由题$2\sin B\cos A=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin B$，因$\sin B\neq 0$.

则$\cos A=\frac{1}{2}$，因 A 为三角形内角，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

若选择①，设 AB 边上的高为$h_{AB}=\sqrt{3}$，

则$h_{AB}=b\sin A$，得$b=2$.因题目条件不足，故$\triangle ABC$无法唯一确定.

若选择②，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$及（1），

有$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.因$\frac{3\sqrt{21}}{14}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，又题目条件不足，故无法判断 B 为钝角还是锐角，则$\triangle ABC$无法唯一确定.

若选择③，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，及$\sin B=3\sin C$，

则$b=3c$又由余弦定理及（1），

有$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{10c^2-7}{6c^2}=\frac{1}{2}$，

得$c=1$，$b=3$.

此时$\triangle ABC$唯一确定，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 1\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

综上选择③时，$\triangle ABC$唯一确定，此时$\triangle ABC$的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

18.【答案】（1）$d_{\max}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，$d_{\min}=1$

（2）1

【分析】（1）设$C\left(x_0,y_0\right)$，$y_0\in[-1,1]$，计算得到$d=\sqrt{-3\left(y_0+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3}}$，根据二次函数的性质得到最值.

（2）过点 P 作$PG\perp x$轴于G，过点 P 作$PH\perp y$轴于H，设$P\left(x_1,y_1\right)$，利用相似计算得到答案.

【小问 1 详解】

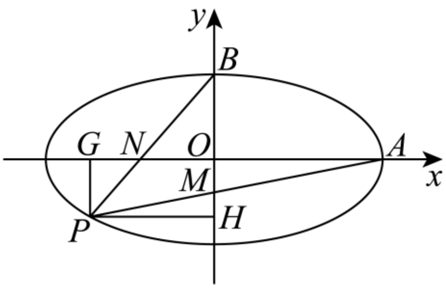
设$C\left(x_0,y_0\right)$，$y_0\in\left[-1,1\right]$，则$\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，

$d=\left|CD\right|=\sqrt{{x_0}^2+\left(y_0-2\right)^2}=\sqrt{-3{y_0}^2-4y_0+8}=\sqrt{-3\left(y_0+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{28}{3}}$，

当$y_0=-\dfrac{2}{3}$时，$d_{\max}=\sqrt{\dfrac{28}{3}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，当$y_0=1$时，$d_{\min}=1$.

【小问 2 详解】

如图所示：过点P作$PG\perp x$轴于G，过点P作$PH\perp y$轴于H，设$P\left(x_1,y_1\right)$，



$$\left(\frac{|PM|}{|MA|}\right)^2+\left(\frac{|PN|}{|NB|}\right)^2=\left(\frac{|GO|}{|OA|}\right)^2+\left(\frac{|HO|}{|OB|}\right)^2=\frac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$$

19.【答案】（1）$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$S_{\triangle DEF}=\sqrt{2}+2$

（2）直线AG经过定点$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$，理由见详解.

【分析】（1）由椭圆C经过点$E\left(2,\sqrt{2}\right)$，代入椭圆方程求得$a^2=8$，结合$c^2=a^2-b^2$，解得c的值，进而求得离心率和$\triangle DEF$的面积；

（2）由直线$y=kx+1$与椭圆C交于A，B两点，则说明斜率存在，

所以分$k=0$，$k\neq0$，进行讨论找出直线过得点.

【小问 1 详解】

由题意，椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{4}=1\left(a>0\right)$经过点$E\left(2,\sqrt{2}\right)$，

可得$\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{4}=1$，解得$a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt{2}$，

即椭圆$C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

因为$c^2=a^2-b^2=8-4=4$，即$c=2$，

所以椭圆C的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

又由左顶点为D，右焦点为F，所以$D(-2\sqrt{2},0),F(2,0)$，

所以$\triangle DEF$的面积为$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times|DF|\times|y_E|=\frac{1}{2}\times\left(2+2\sqrt{2}\right)\times\sqrt{2}=\sqrt{2}+2$

【小问 2 详解】

由直线$y=kx+1$与椭圆C交于A，B两点

所以当$k=0$时，直线为$y=1$与椭圆C交于A，B两点

由$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=1\end{cases}$ 解得：$x=\pm\sqrt{6}$

令$A(-\sqrt{6},1),B(\sqrt{6},1)$，此时$G(\sqrt{6},4)$

所以$k_{AG}=\frac{4-1}{\sqrt{6}-(-\sqrt{6})}=\frac{\sqrt{6}}{4}$

所以直线$l_{AG}:y-1=\frac{\sqrt{6}}{4}(x+\sqrt{6})$

即$l_{AG}:y=\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{5}{2}$，令$x=0\Rightarrow y=\frac{5}{2}$

所以直线AG是经过定点$\left(0,\frac{5}{2}\right)$

同理若$A(\sqrt{6},1),B(-\sqrt{6},1)$，则$l_{AG}:y=-\frac{\sqrt{6}}{4}x+\frac{5}{2}$

令$x=0\Rightarrow y=\frac{5}{2}$

所以直线AG是经过定点$\left(0,\frac{5}{2}\right)$

当$k\neq0$时，由直线$y=kx+1$与椭圆C交于A，B两点

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立方程组$\begin{cases}y=kx+1\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，

整理得$(2k^2+1)x^2+4kx-6=0$，

则$x_1+x_2=\frac{-4k}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{-6}{2k^2+1}$，

所以$x_1+x_2=\frac{2}{3}kx_1x_2\Rightarrow x_1x_2=\frac{3}{2k}\left(x_1+x_2\right)$

设点$G(x_2,4)$，所以$k_{AG}=\frac{y_1-4}{x_1-x_2}$

AG 的方程为 $y-4=\frac{y_1-4}{x_1-x_2}(x-x_2)\Rightarrow y=\frac{y_1-4}{x_1-x_2}(x-x_2)+4$，

令 $x=0$，可得 $y=\frac{-x_2y_1+4x_2}{x_1-x_2}+4=\frac{4x_1-x_2y_1}{x_1-x_2}$

$=\frac{4x_1-x_2(kx_1+1)}{x_1-x_2}=\frac{4x_1-x_2-kx_1x_2}{x_1-x_2}$

$=\frac{4x_1-x_2-k?\frac{3}{2k}\left(x_1+x_2\right)}{x_1-x_2}$

$=\frac{4x_1-x_2-\frac{3}{2}x_1-\frac{3}{2}x_2}{x_1-x_2}=\frac{\frac{5}{2}x_1-\frac{5}{2}x_2}{x_1-x_2}=\frac{5}{2}$，

所以直线 AG 经过定点 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$，

综上可得，直线 AG 经过定点 $\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

20.【答案】（1） $a=2$

（2）函数在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

（3）存在， $m\in(-\infty,\ln 2]$

【分析】（1）求导得到导函数，根据 $f'(1)=0$ 计算得到答案.

（2）求导得到 $f'(x)=\frac{-\ln x}{(1+x)^2}$，根据导数的正负得到单调区间.

（3）先证明 $\ln(1+x)<x$， $\ln(1+x)<\sqrt{1+x}$，计算得到 $f(x)>\ln 2$，且 $f(x)<\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\ln 2$，得到答案.

【小问 1 详解】

$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(ax+2)$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}+1-\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{a}{ax+2}$，

$f'(1)=\frac{\frac{1}{x}+1-\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{a}{ax+2}=\frac{2}{4}-1+\frac{a}{a+2}=0$，解得 $a=2$.

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}+1-\ln x}{(1+x)^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{2x+2}=\frac{-\ln x}{(1+x)^2}$，

当 $x\in(0,1)$ 时， $f'\ \ x\ \ >0$，函数单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减.

故 $x=1$ 是函数的极大值点，满足.

【小问 2 详解】

$$f'(x)=\frac{-\ln x}{(1+x)^2},$$

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，函数单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，函数单调递减.

【小问 3 详解】

$$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x+\ln(x+1)+\ln 2=\frac{x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]+\ln(x+1)}{1+x}+\ln 2,$$

当 $x\in(0,+\infty)$，易知 $\ln(x+1)-\ln x>0$，$\ln(x+1)>0$，故 $f(x)>\ln 2$.

故 $m\le\ln 2$，满足条件.

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，设 $g(x)=\ln(1+x)-x$，故 $g'(x)=\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{x}{x+1}<0$，

故 $g(x)<g(0)=0$，即 $\ln(1+x)<x$，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，设 $h(x)=\ln(1+x)-\sqrt{1+x}$，$h'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{2-\sqrt{1+x}}{2(x+1)}$，

当 $x\in(0,3)$ 时，$h'(x)=\dfrac{2-\sqrt{1+x}}{2(x+1)}>0$，函数单调递增；

当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$h'(x)=\dfrac{2-\sqrt{1+x}}{2(x+1)}<0$，函数单调递减；

故 $h(x)\le h(3)=\ln 4-2<0$，故 $\ln(1+x)<\sqrt{1+x}$.

$$f(x)=\frac{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln(x+1)}{x+1}+\ln 2<\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\sqrt{x+1}}{x+1}+\ln 2<\frac{2}{\sqrt{x+1}}+\ln 2,$$

即 $f(x)$ 可以无限接近 $\ln 2$.

综上所述：$m\in(-\infty,\ln 2]$.

【点睛】本题考查了根据极值点求参数，利用导数求函数的单调区间，不等式恒成立问题，意在考查学生的计算能力，转化能力和综合应用能力，其中放缩的思想是解题的关键.

21.【答案】(1) 33　(2) 证明见详解

(3) 证明见详解

【分析】(1) 根据题意结合累加法和等差数列求和运算求解；(2) 根据 (1) 中结论，结合数的奇偶性分

析证明；（3）令 $b_i = a_i - 100$，根据题意利用反证法证明.

【小问 1 详解】

$\because \left|a_i - a_{i-1}\right| = 1$，则 $a_i - a_{i-1} = 1$ 或 $a_i - a_{i-1} = -1$，

设 $m_i \in \{-1,1\}, i \in \{1,2,...,N-1\}$，即 $a_i - a_{i-1} = m_{i-1}, 2 \le i \le N$，

当 $i \ge 2$ 时，则 $a_i = (a_i - a_{i-1}) + (a_{i-1} - a_{i-2}) + ... + (a_2 - a_1) + a_1 = a_1 + (m_1 + m_2 + ... + m_{i-1})$，

故 $S(A) = a_1 + a_2 + ... + a_N = a_1 + (a_1 + m_1) + (a_1 + m_1 + m_2) + ... + (a_1 + m_1 + m_2 + ... + m_{N-1})$

$= Na_1 + (N-1)m_1 + (N-2)m_2 + ... + m_{N-1}$，

若 $S(A)$ 能取到的最大值，则 $m_i = 1$，此时 $S(A) = Na_1 + (N-1) + (N-2) + ... + 1 = Na_1 + \dfrac{N(N-1)}{2}$，

若 $a_1 = 3$，$N = 6$，则 $S(A)$ 能取到的最大值为 $6 \times 3 + \dfrac{6 \times 5}{2} = 33$.

【小问 2 详解】

若 $N = 2022$，则由（1）可得：$S(A) = 2022a_1 + 2021m_1 + 2020m_2 + ... + m_{2021}$，

记满足 $m_i = -1$ 中的 i 依次为 $k_1, k_2, ..., k_n$，则

$S(A) = 2022a_1 + 2021 + 2020 + ... + 1 - 2\left[(2022 - k_1) + (2022 - k_2) + ... + (2022 - k_n)\right]$

$= 2022a_1 + 1011 \times 2021 - 2\left[(2022 - k_1) + (2022 - k_2) + ... + (2022 - k_n)\right]$，

$\because a_1, (2022 - k_1), (2022 - k_2), ..., (2022 - k_n)$ 均为整数，则

$2022a_1, 2\left[(2022 - k_1) + (2022 - k_2) + ... + (2022 - k_n)\right]$ 为偶数，1011×2021 为奇数，

$\therefore S(A)$ 为奇数，故 $S(A) \ne 0$.

【小问 3 详解】

记 $b_i = a_i - 100, i = 1,2,...,N$，则有限数列 B：b_1，b_2，…，b_N 满足 $\left|b_i - b_{i-1}\right| = 1$ 对任意 $i = 2$，3，…，N 成立，

则 $S(B) = b_1 + b_2 + \cdots + b_N = (a_1 - 100) + (a_2 - 100) + ... + (a_N - 100) = S(A) - 100N = 0$，

$\because \left|b_i - b_{i-1}\right| = 1$，则对 $\forall i \in \{2,3,...,N\}$，均有 $b_i \ne b_{i-1}$，即数列 $\{b_n\}$ 不是常数列，

设数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 M，最小项 m，则 $M > 0, m < 0$，

反证：假设对 $\forall i \in \{1,2,...,N\}, b_i \ne 0$，

设满足 $b_i > 0$ 中的 i 依次为 $t_1, t_2, ..., t_n$，则必存在 $t_j, j = 1,2,...,n$，使得 $b_{t_j} > 0, b_{t_j+1} < 0$ 或

$b_{t_j} > 0, b_{t_j-1} < 0$，

当 $b_{t_j} > 0, b_{t_j+1} < 0$ 时，$\because b_{t_j} \ge 1, b_{t_j+1} \le -1$，则 $b_{t_j+1} - b_{t_j} \ge 2$，这与 $\left|b_{t_j+1} - b_{t_j}\right| = 1$ 相矛盾，

当$b_{t_j}>0,b_{t_j-1}<0$时，$\because b_{t_j}\geq 1,b_{t_j-1}\leq -1$，则$b_{t_j}-b_{t_j-1}\geq 2$，这与$\left|b_{t_j}-b_{t_j-1}\right|=1$相矛盾，

故假设不成立，即数列B中存在$b_k\left(1\leq k\leq N\right)$使得$b_k=a_k-100=0$，

故数列A中存在$a_k\left(1\leq k\leq N\right)$使得$a_k=100$.

【点睛】思路点睛：数列与函数的综合问题主要有以下两类：

①已知不等式条件，解决数列问题，此类问题一般利用不等式性质研究数列问题；

②已知数列条件，解决不等式问题，解决此类问题一般要充分利用数列的范围、公式、求和方法对式子化简变形.