2022 北京人大附中初二（下）期中

数　学

一、选择题：（每题 3 分，共 30 分）

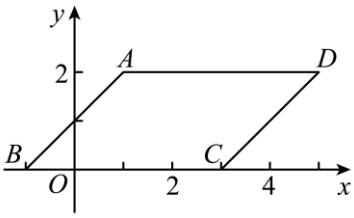
1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C$＝90°，AC＝6，BC＝8，则 AB 的长度为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

2. 若 $\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=0$，则 $3x+2y$ 的值等于（　　）

A. －5　　B. 5　　C. 13　　D. －13

3. 如图，在平面直角坐标系中，A（1，2），B（－1，0），C（3，0），若四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则点 D 的坐标为（　　）

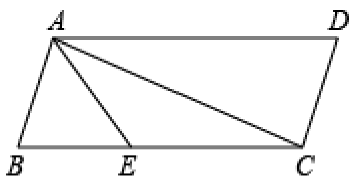


A.（4，2）　　B.（2，4）　　C.（2，5）　　D.（5，2）

4. 下列二次根式属于最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{32}$　　B. $\sqrt{4x+8}$　　C. $\sqrt{\frac{2}{a}}$　　D. $\sqrt{b^2+4}$

5. 如图，点 E 为▱$ABCD$ 的边 BC 上的一点，连接 AE，满足 AB＝BE，AE＝EC，若 $\angle B$＝72°，则 $\angle ACD$ 的度数为（　　）

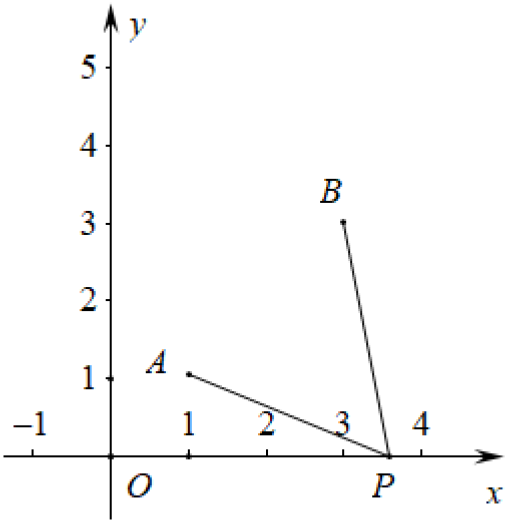


A. 80°　　B. 81°　　C. 82°　　D. 83°

6. 已知 $\sqrt{(3a-2)^2}$ ＝2－3a，那么 a　取值范围是（　　）

A. $a\neq\frac{2}{3}$　　B. $a>\frac{2}{3}$　　C. $a\geq\frac{2}{3}$　　D. $a\leq\frac{2}{3}$

7. 如图，在平面直角坐标系中，A（1，1），B（3，3），点 P 为 x 轴上的动点，则 $PA+PB$ 的最小值为（　　）

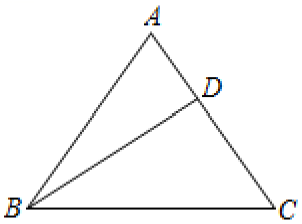


A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 5　　D. $\sqrt{15}$

8. 估计$(3\sqrt{15}-\sqrt{45})\cdot\sqrt{\dfrac{1}{5}}$的值应该在（　　）

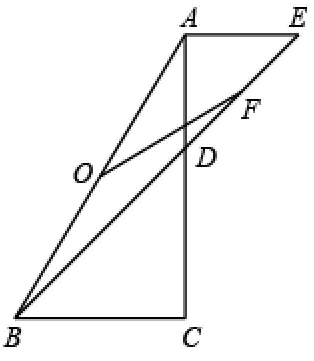
A. 0 到 1 之间　　B. 1 到 2 之间　　C. 2 到 3 之间　　D. 3 到 4 之间

9 如图，在△*ABC* 中，*AB*＝*AC*＝5，*BC*＝6，则 *AC* 边上的高 *BD* 的长为（　　）



A. 4　　B. 4.4　　C. 4.8　　D. 5

10. 如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，点 *O* 为 *AB* 的中点，点 *D* 在线段 *AC* 上，过点 *A* 作 *BC* 的平行线交直线 *BD* 于点 *E*，点 *F* 是 *DE* 的中点，连接 *OF*，若 *AD*＝*AE*＝2，*BC*＝4，则 *OF* 的长为（　　）.



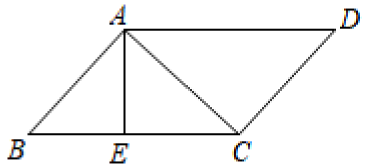
A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{13}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 3.5

二、填空题：（每空 2 分，共 20 分）。

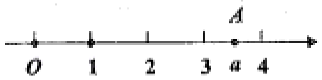
11. 在▱*ABCD* 中，若$\angle A=50^\circ$，则$\angle C$的度数为_______.

12. 已知$\sqrt{x-3}$是二次根式，则 x 的取值范围是___.

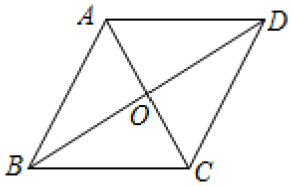
13. 如图，在▱*ABCD* 中，∠*B*＝45°，*AE*⊥*BC* 于点 *E*，连接 *AC*，若 *AC*＝5，*AE*＝3，则 *AD* 的长为 _____.



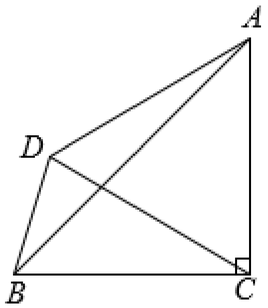
14. 如图，数轴上点 A 表示的数为 a，化简$|a - 3| - \sqrt{a^2-8a+16}$ =_____.



15. 如图，在▱$ABCD$ 中，AC 平分∠BAD，连接 BD 交 AC 于点 O，∠ABD=30°，AO=2，则▱$ABCD$ 的周长为_____.

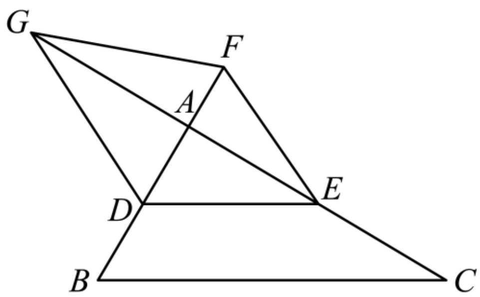


16. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=2$，$\triangle ACD$ 为等边三角形，连接 BD，则 $\angle ADB=$_____°，$\triangle BCD$ 的面积为 _____.

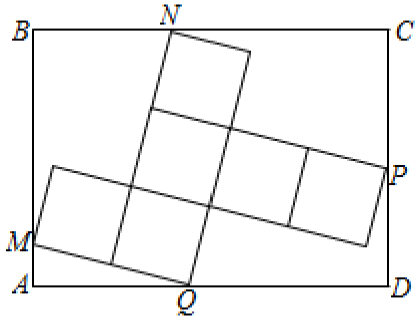


17. 若 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=-2$，则 $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的值为 _____.

18. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中∠BAC=90°，点 D 和点 E 分别是 AB，AC 的中点，点 F 和点 G 分别在 BA 和 CA 的延长线上，若 BC=10，GF=6，EF=4，则 GD 的长为 _____.



19. 小兵在学习了勾股定理的赵爽弦图后，尝试用小正方形做类似的图形，经过尝试后，得到如图：长方形 $ABCD$ 内部嵌入了 6 个全等的正方形，其中点 M，N，P，Q 分别在长方形的边 AB，BC，CD 和 AD 上，若 AB=23，BC=32，则小正方形的边长为 _____.



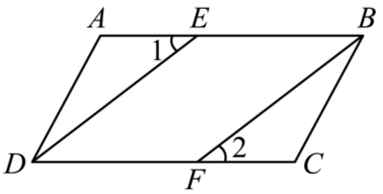
三、解答题：（20 题每小题 8 分，21-23 每题 4 分，24-25 题每题 5 分，共 30 分）

20. 计算：

（1）$\sqrt{8}-\sqrt{18}+2\sqrt{\frac{1}{2}}$；

（2）$4\sqrt{\frac{9}{8}}\times(-\frac{2}{5}\sqrt{15})\div 2\sqrt{\frac{3}{2}}$．

21. 如图，点 E，F 分别是▱$ABCD$ 的边 AB，CD 上的一点，连接 DE，BF，若∠1＝∠2，求证：四边形是 $DEBF$ 是平行四边形．



22. 已知，如图点 M 为∠BAC 的边上的一个定点，点 N 为∠BAC 内部的一个定点，连接 MN，在射线∠BAC 的内部求作一点 P，使得∠APN＝∠AMN．下面是小兵设计一种尺规作图过程．

①连接 AN；

②作线段 AN 的垂直平分线 l，交 AN 与点 O；

③连接 MO，并延长 MO 至 P，使得 PO＝MO；

则点 P 即为所求．

根据小兵设计的尺规作图过程．

（1）使用直尺和圆规，补全图形．（保留作图痕迹）

（2）完成下面　证明：

证明：连接 AP，PN．

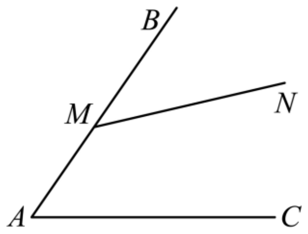
∵直线 l 为线段 AN 的垂直平分线，

∴AO＝NO，

∵PO＝MO，

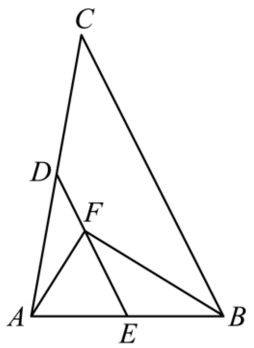
∴四边形 $AMNP$ 为平行四边形（______）（填推理的依据）

∴∠APN＝∠AMN（______）（填推理的依据）．

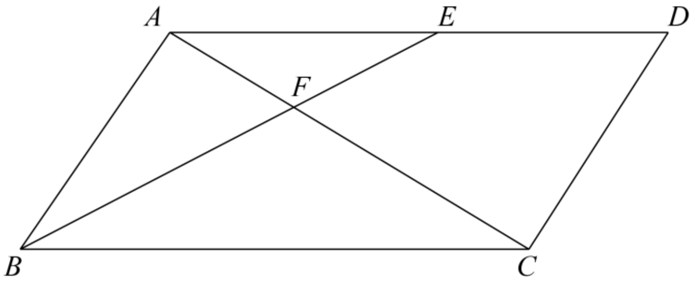


23 先化简，再求值：$3x\sqrt{\frac{4}{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{16y}-3y\sqrt{\frac{x}{y^{2}}}+\frac{4\sqrt{y^{3}}}{y}$，其中 x＝9，y＝$\frac{1}{4}$．

24. 如图，在△ABC 中，点 D，点 E 分别是边 AC，AB 的中点，点 F 在线段 DE 上，AF＝5，BF＝12，AB＝13，BC＝19，求 DF 的长度．



25. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，∠ABC 的角平分线 BE 交 AD 于点 E，连接 AC 交 BE 于点 F．



（1）求证：BC＝CD+ED；

（2）若 AB⊥AC，AF＝3，AC＝8，求 AE 的长．

四、解答题：（26 题 6 分，27 题，28 题每题 7 分，共 20 分）

26. 在二次根式的计算和比较大小中，有时候用“平方法”会取得很好的效果，例如，比较 $a=2\sqrt{3}$ 和 $b=3\sqrt{2}$ 的大小，我们可以把 a 和 b 分别平方，∵a^2＝12，b^2＝18，则 a^2＜b^2，∴a＜b．

请利用“平方法”解决下面问题：

（1）比较 $c=4\sqrt{2}$，$d=2\sqrt{7}$ 大小，c___d（填写＞，＜或者＝）．

（2）猜想 $m=2\sqrt{5}+\sqrt{6}$，$n=2\sqrt{3}+\sqrt{14}$ 之间的大小，并证明．

（3）化简：$\sqrt{4p-8\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}$＝______（直接写出答案）．

27. 如图，直线 l_1∥l_2，点 A，B 为直线 l_1 的两点，点 C，D 为直线 l_2 的两点，且满足 AB⊥AC，点 E 为直线 l_1，l_2 之间的一点，满足∠AEC＝90°．

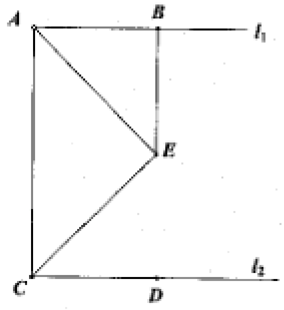


图 1

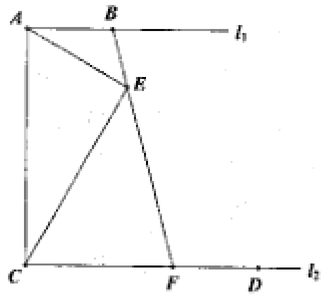


图 2

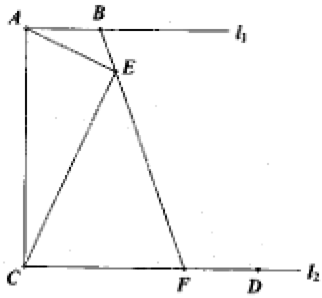


图 3

（1）如图 1，当$\angle CAE=45°$，$AB\perp BE$时，线段AB与AC的数量关系为____（直接写出答案）.

（2）直线BE交线段CD于点F，且满足$\angle CEF=45°$；

①如图 2，若$\angle ACE=30°$，$AB=2$，求AC的长；

②如图 3，若$AC=CD$，用等式表示线段AB，CF，AD之间的数量关系，并证明.

28. 对于平面内的两个点M，N和图形Ω，若在图形Ω上存在两个点P，Q（P和Q点可以重合），使得$PM+QN=k$（k为大于 0 的常数），则称点M和点N为图形Ω的k系距离点．在平面直角坐标系中，O为坐标原点，M（m，0），N（0，n）.

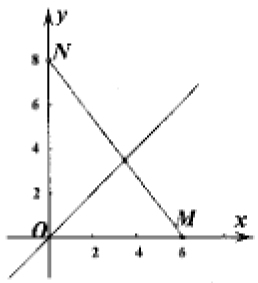


图 1

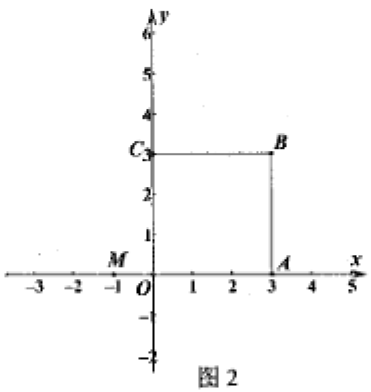


图 2

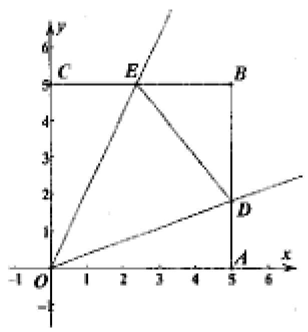


图 3

（1）如图 1，当$m=6$，$n=8$时，图形Ω为一三象限的角平分线，点M和点N为图形Ω的k系距离点，在下列数值：①10；②8；③$7\sqrt{2}$中，实数k可能是___（填写正确的序号）.

（2）已知正方形$OABC$　顶点A，C分别在x轴和y轴的正半轴上，A（a，0），

①如图 2，当$a=3$，$m=-1$时，图形Ω为正方形$OABC$，若点M和点N为图形Ω的 10 系距离点，求n的取值范围.

②如图 3，当 $a=m=5$，$n=3\sqrt{2}$ 时，点 D，点 E 分别为线段 AB 和 BC 上的动点，且满足 $AD+CE=DE$，图形 Ω 为 $\angle DOE$，点 M 和点 N 为图形 Ω 的 k 系距离点，则 k 的最大值为___（直接写出答案）．

参考答案

一、选择题：（每题 3 分，共 30 分）

1. 在 Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，*AC*＝6，*BC*＝8，则 *AB* 的长度为（　　）

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

【答案】C

【解析】

【分析】根据勾股定理即可得到结论．

【详解】解：在 Rt△*ABC* 中，∠*C*=90°，*AC*=6，*BC*=8，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

故选：C．

【点睛】此题考查了勾股定理，解题的关键是熟练掌握勾股定理．

2. 若 $\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=0$，则 3*x*+2*y* 的值等于（　　）

A. －5　　B. 5　　C. 13　　D. －13

【答案】A

【解析】

【分析】根据非负数的性质即可求出 *x* 和 *y* 的值，再代入 3*x*+2*y* 中求值即可．

【详解】∵ $\sqrt{x+3}+\sqrt{y-2}=0$，

∴ $x+3=0$，$y-2=0$，

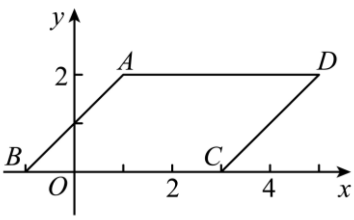
解得：$x=-3$，$y=2$．

∴ $3x+2y=3\times(-3)+2\times2=-5$．

故选 A．

【点睛】本题考查非负数的性质，代数式求值．掌握被开方数为非负数是解题关键．

3. 如图，在平面直角坐标系中，*A*（1，2），*B*（－1，0），*C*（3，0），若四边形 *ABCD* 为平行四边形，则点 *D* 的坐标为（　　）



A. （4，2）　　B. （2，4）　　C. （2，5）　　D. （5，2）

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质即可求解．

【详解】解：∵四边形 *ABCD* 是平行四边形，点 *A*（1，2），*B*（－1，0），*C*（3，0），

∴*AD*=*BC*=3+1=4，

故点 *D* 的坐标为（1+4，2），即（5，2）

故选：D．

【点睛】此题考查了坐标与图形，解题的关键是熟知平行四边形的性质．

4. 下列二次根式属于最简二次根式的是（　　）

A. $\sqrt{32}$　　B. $\sqrt{4x+8}$　　C. $\sqrt{\frac{2}{a}}$　　D. $\sqrt{b^2+4}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据最简二次根式的定义即可判断．最简二次根式同时满足下列三个条件：（1）被开方数的因数是整数，因式是整式；（2）被开方数中不含有能开的尽的因式；（3）被开方数不含分母．

【详解】A．$\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，不是最简二次根式，故选项错误，不符合题意；

B．$\sqrt{4x+8}=2\sqrt{x+2}$，不是最简二次根式，故选项错误，不符合题意；

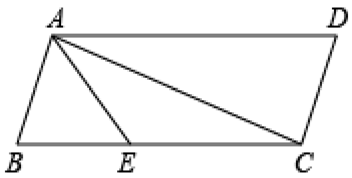
C．$\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{\sqrt{2a}}{a}$，不是最简二次根式，故选项错误，不符合题意；

D．$\sqrt{b^2+4}$为最简二次根式，故选项正确，符合题意；

故选：D．

【点睛】此题考查了最简二次根式的识别，解题的关键是熟知最简二次根式的定义．

5. 如图，点 E 为▱$ABCD$ 的边 BC 上的一点，连接 AE，满足 $AB=BE$，$AE=EC$，若 $\angle B=72°$，则 $\angle ACD$ 的度数为（　　）



A. 80°　　B. 81°　　C. 82°　　D. 83°

【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质得出$\angle AEB$，进而得出$\angle ACB$，然后利用平行四边形的性质解答即可．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$\angle BCD=180°-\angle B=180°-72°=108°$，

∵$AB=BE$，

∴$\angle AEB=\frac{180°-72°}{2}=54°$，

∵$AE=EC$，

∴$\angle ACE=\frac{1}{2}\angle AEB=27°$，

∴$\angle ACD=\angle BCD-\angle ACE=108°-27°=81°$，

故选：B．

【点睛】此题主要考查了平行四边形的性质、三角形的外角、等腰三角形的性质，解题的关键是根据平行四边形的邻角互补解答.

6. 已知 $\sqrt{(3a-2)^2}$ ＝2﹣3a，那么 a 的取值范围是（　　）

A. $a\neq\frac{2}{3}$　　B. $a>\frac{2}{3}$　　C. $a\geq\frac{2}{3}$　　D. $a\leq\frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意利用二次根式的性质 $\sqrt{a^2}=|a|$，进而去绝对值讨论即可得出 x 的取值范围.

【详解】解：$\because\sqrt{(3a-2)^2}=|3a-2|=2-3a$，

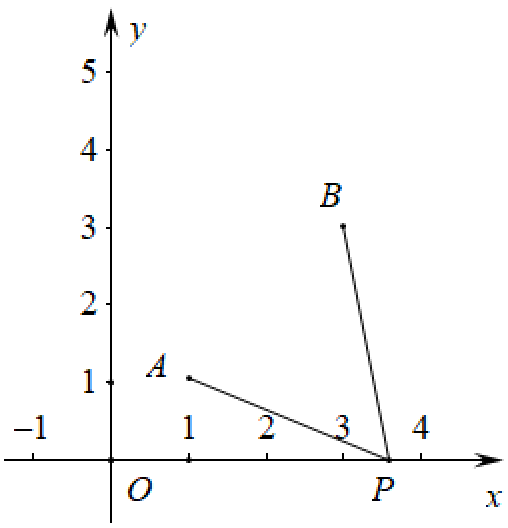
$\therefore 3a-2\leq 0$，

$\therefore a\leq\frac{2}{3}$.

故选：D.

【点睛】此题考查了二次根式的性质与化简，解题的关键是熟练掌握二次根式的性质 $\sqrt{a^2}=|a|$.

7. 如图，在平面直角坐标系中，A（1，1），B（3，3），点 P 为 x 轴上的动点，则 PA+PB 的最小值为（　　）



A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 5　　D. $\sqrt{15}$

【答案】A

【解析】

【分析】求出 A 点关于 x 轴的对称点 A'，连接 $A'B$，交 x 轴于点 P，则 P 即为所求点，利用两点间的距离公式即可求解.

【详解】解：作点 A 关于 x 轴的对称点 A'，连接 $A'B$ 交 x 轴于点 P，则 P 即为所求点；

∵点 A（1，1），

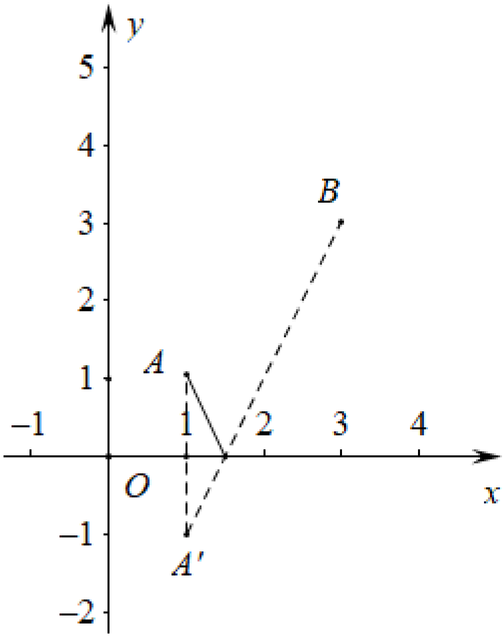
∴点 A 关于 x 轴的对称点 A'的坐标为（1，-1），

∵A'（1，-1），B（3，3），

∴$A'B$=$\sqrt{(3-1)^2+(3+1)^2}$=$2\sqrt{5}$，

即 $PA+PB$ 的最小值为 $2\sqrt{5}$，

故选：A.



【点睛】此题考查了最短线路问题及两点间的距离公式，解答此题的关键是熟知两点之间线段最短的知识.

8. 估计 $(3\sqrt{15}-\sqrt{45})\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$ 的值应该在（　　）

A. 0 到 1 之间　　B. 1 到 2 之间　　C. 2 到 3 之间　　D. 3 到 4 之间

【答案】C

【解析】

【分析】先计算二次根式，再利用“夹逼法”估算无理数的大小.

【详解】解：$(3\sqrt{15}-\sqrt{45})\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$，

$=3\sqrt{15\times\frac{1}{5}}-\sqrt{45\times\frac{1}{5}}$，

$=3\sqrt{3}-3$，

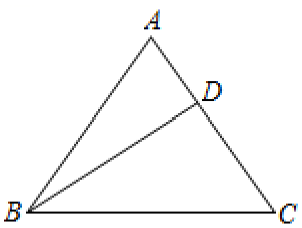
$\because 3\sqrt{3}=\sqrt{27}$，$5<\sqrt{27}<6$，

$\therefore 2<3\sqrt{3}-3<3$；

故选：C.

【点睛】此题考查了二次根式的混合运算及估算无理数的大小，解题的关键是先估算出 $3\sqrt{3}$ 值的范围.

9. 如图，在△ABC 中，AB＝AC＝5，BC＝6，则 AC 边上的高 BD 的长为（　　）



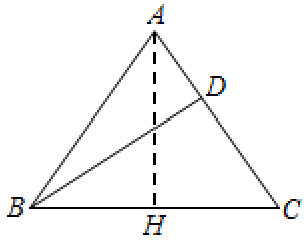
A. 4　　B. 4.4　　C. 4.8　　D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，利用勾股定理求得 $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，然后利用 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}BC\times AH$ 即可求解.

【详解】解：过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，



$\because AB=AC=5$， $BC=6$，

$\therefore BH=CH=\frac{1}{2}BC=3$，

$\therefore Rt\Delta ABH$ 中， $AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\because BD\perp AC$，

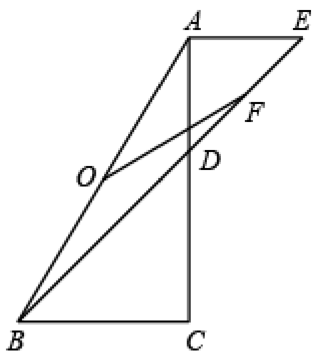
$\therefore S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}BC\times AH$，

即 $\frac{1}{2}\times 5\times BD=\frac{1}{2}\times 6\times 4$，解得 $BD=4.8$，

故选：C

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质和勾股定理，根据题意作出适当的辅助线是解题的关键.

10. 如图，在 Rt△*ABC* 中，∠*C*＝90°，点 *O* 为 *AB* 的中点，点 *D* 在线段 *AC* 上，过点 *A* 作 *BC* 的平行线交直线 *BD* 于点 *E*，点 *F* 是 *DE* 的中点，连接 *OF*，若 *AD*＝*AE*＝2，*BC*＝4，则 *OF* 的长为（　　）.



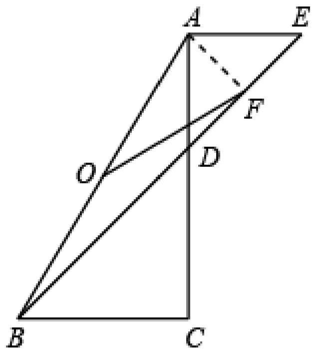
A. $2\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{13}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. 3.5

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AF，结合题目条件得到 $AF\perp DE$，根据由点 O 为 AB 的中点，得到$OF=\frac{1}{2}AB$，又易得 $AC=6$，再在直角三角形 ABC 中，根据勾股定理计算出 AB，从而得到 OF 的值.

详解】解：连接 AF，



∵$AD=AE$，点 F 是 DE 的中点，

∴$AF\perp DE$，

又∵点 O 为 AB 的中点，

$\therefore OF=\frac{1}{2}AB$，

又 $AE//BC$，$\angle C=90°$,

$\therefore \angle ADE=\angle AED=45°$，

$\therefore \angle DBC=\angle BDC=45°$，

∴$BC=DC=4$，

∴$AC=AD+CD=6$，

在 $Rt\triangle ABC$ 中，由勾股定理得，

$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$，

$\therefore OF=\frac{1}{2}AB=\sqrt{13}$,

故选择：B.

【点睛】本题主要考查直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，勾股定理，等腰三角形的性质，熟练掌握直角三角形的性质是解题的关键.

二、填空题：（每空 2 分，共 20 分）。

11. 在▱$ABCD$ 中，若$\angle A=50°$，则$\angle C$ 的度数为_______.

【答案】50°

【解析】

【分析】根据平行四边形的对角相等即可求解.

【详解】∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

∴$\angle C=\angle A=50°$.

故答案为 50°.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，掌握平行四边形的对角相等是解题的关键.

12. 已知 $\sqrt{x-3}$ 是二次根式，则 x 的取值范围是___.

【答案】$x\geq3$##$3\leq x$

【解析】

【分析】二次根式的被开方数是非负数，即 $x-3\geq0$，据此求得 x 的取值范围.

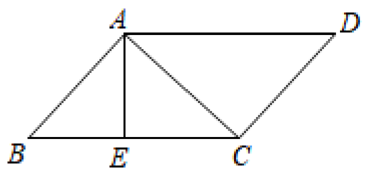
【详解】解：依题意得：$x-3\geq0$，

解得 $x\geq3$.

故答案是：$x\geq3$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，熟知二次根式有意义的条件是被开方数为非负数是解题关键.

13. 如图，在▱$ABCD$ 中，$\angle B=45°$，$AE\perp BC$ 于点 E，连接 AC，若 $AC=5$，$AE=3$，则 AD 的长为_____.



【答案】7

【解析】

【分析】根据勾股定理先求 CE 的长，由 $\angle B=45°$，得出 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，$BE=AE=3$，从而 $BC=BE+CE$，再由平行四边形的性质得出 $AD=BC$ 即可.

【详解】$\because AE\perp BC$, $\therefore \angle AEC=90°$，

$\therefore CE=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

$\because \angle B=45°$, $\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore BE=AE=3$,

$\therefore BC=BE+CE=7$，

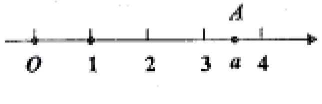
又$\because$四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD=BC=7$，

故答案为：7.

【点睛】本题考查了勾股定理，等腰直角三角形和平行四边形的性质，熟练掌握平行四边形的性质是解题的关键.

14. 如图，数轴上点 A 表示的数为 a，化简$|a-3|-\sqrt{a^2-8a+16}=$_____.



【答案】1

【解析】

【分析】直接利用二次根式的性质以及结合数轴得出 a 的取值范围进而化简绝对值即可.

【详解】解：由数轴可得：$3<a<4$，

则$|a-3|-\sqrt{a^2-8a+16}$

$=a-3+|a-4|$

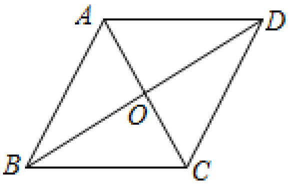
$=a-3+4-a$

$=1$．

故答案为：1．

【点睛】此题考查了二次根式的性质与化简，解题的关键是正确得出 a 的取值范围.

15. 如图，在▱$ABCD$ 中，AC 平分∠BAD，连接 BD 交 AC 于点 O，∠ABD＝30°，AO＝2，则▱$ABCD$ 的周长为_____.



【答案】16

【解析】

【分析】首先证明 AB＝BC，再根据菱形和等边三角形的性质即可解决问题.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，AO＝2，

∴AD∥BC，AB＝CD，$AD=BC$，$AC=2AO=4$，

∴∠DAC＝∠ACB，

∵AC 平分∠BAD，

∴∠DAC＝∠BAC，

∴∠ACB＝∠BAC，

∴AB＝BC，

∴$AB=BC=DC=AD$

∴▱$ABCD$ 是菱形，

∴$BD\perp AC$，

∴$\angle ABO=\angle CBO=\dfrac{1}{2}\angle ABC$

∵∠ABD＝30°，

∴∠ABC=60°，

∴△ABC 是等边三角形，

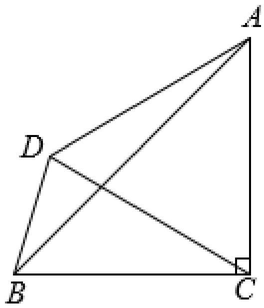
∴AB＝AC＝4，

∴▱$ABCD$ 的周长＝4×AB=4×4＝16；

故答案为：16．

【点睛】此题考查了平行四边形的性质、菱形的判定和性质、等腰三角形的判定和性质、等边三角形的判定和性质等知识，解题的关键是灵活应用这些知识解决问题.

16. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC=2$，$\triangle ACD$ 为等边三角形，连接 BD，则 $\angle ADB=$_____°，$\triangle BCD$ 的面积为 _____.



【答案】 ①. 135 ②. 2

【解析】

【分析】如图，过D作$DE\perp AC$于E，第一个空：根据$\triangle ACD$为等边三角形，可得$\angle ADC=\angle ACD=60^\circ$，$AC=DC$，然后再根据$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，利用等腰三角形的性质可求出$\angle CDB$，然后由$\angle ADB=\angle ADC+\angle CDB$即可得到答案；第二个空：根据$DE\perp AC$和$\angle ACB=90^\circ$可确定$\triangle BCD$的边$BC$边上的高等于$CE$，再根据等腰三角形的三线合一的性质可得$EC=\dfrac{1}{2}AC$，则$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC\bullet EC$，代入数据计算即可得到答案.

【详解】如图，过D作$DE\perp AC$于E，

$\because\triangle ACD$为等边三角形，

$\therefore\angle ADC=\angle ACD=60^\circ$，$AC=DC$，

$\because\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，

$\therefore\angle DCB=\angle ACB-\angle ACD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$，$DC=BC$，

$\therefore\angle CDB=\angle CBD=\dfrac{1}{2}\times\left(180^\circ-\angle DCB\right)=\dfrac{1}{2}\times\left(180^\circ-30^\circ\right)=75^\circ$，

$\therefore\angle ADB=\angle ADC+\angle CDB=60^\circ+75^\circ=135^\circ$；

$\because DE\perp AC$，

$\therefore\angle AED=90^\circ$

$\because\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore DE//BC$，

$\therefore\triangle BCD$的边BC边上的高等于CE，

$\because\triangle ACD$为等边三角形，

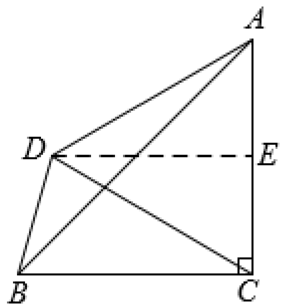
$\therefore AD=CD$，

又$\because DE\perp AC$，$AC=BC=2$，

$\therefore EC=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}\times2=1$，

$\therefore S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}BC\bullet EC=\dfrac{1}{2}\times2\times2=2$.

故答案为：135；2.



【点睛】本题考查了等边三角形、等腰三角形的性质及三角形面积计算等知识．发现$\triangle BCD$的边BC上的高等于AC的一半是解题的关键．

17. 若$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-2$，则$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$的值为 _____．

【答案】$2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】两边同时平方得，$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(-2)^2$，展开后求出$x+\frac{1}{x}=6$，求出$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=8$，从而开方求出$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$的值．

【详解】平方得：$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(-2)^2$，

展开后，$x-2+\frac{1}{x}=4$，

$\therefore x+\frac{1}{x}=6$，

$\therefore x+2+\frac{1}{x}=8$，

即$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=8$，

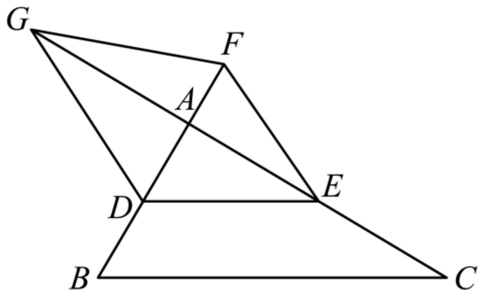
$\therefore \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2}$或$-2\sqrt{2}$（舍去），

$\therefore \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2\sqrt{2}$，

故答案为：$2\sqrt{2}$．

【点睛】本题考查了完全平方公式的应用，能分别求出$x+\frac{1}{x}$，$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$是解此题的关键．

18. 如图，在$Rt\triangle ABC$中$\angle BAC=90°$，点D和点E分别是AB，AC的中点，点F和点G分别在BA和CA的延长线上，若$BC=10$，$GF=6$，$EF=4$，则GD的长为 _____．



【答案】$3\sqrt{5}$

【解析】

【分析】先利用三角形的中位线的性质求得线段 $DE=\frac{1}{2}BC=5$，然后在 ΔADE，ΔAEF，ΔADG，ΔAGF 中分别利用勾股定理即可求解.

【详解】解：∵点 D 和点 E 分别是 AB，AC 的中点，BC＝10，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC=5$，

∵$Rt\triangle ABC$ 中∠BAC＝90°，

$\therefore \Delta ADE$，ΔAEF，ΔADG，ΔAGF 都是直角三角形，

∵GF＝6，EF＝4，

∴由勾股定理得，$AF^2+AG^2=GF^2=36$ ①，

$AF^2+AE^2=EF^2=16$②，

$AD^2+AE^2=DE^2=25$③，

∴①－②＋③，得 $AD^2+AG^2=45$，

∵在 $Rt\Delta ADG$ 中，$AD^2+AG^2=GD^2$，

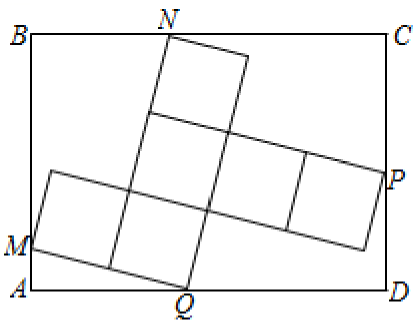
$\therefore GD^2=45$，

解得 $GD=3\sqrt{5}$ 或 $GD=-3\sqrt{5}$（不合题意，舍去）

故答案为：$3\sqrt{5}$

【点睛】本题考查了三角形的中位线的性质及勾股定理的应用，此处勾股定理的灵活运算是解题的关键.

19. 小兵在学习了勾股定理的赵爽弦图后，尝试用小正方形做类似的图形，经过尝试后，得到如图：长方形 $ABCD$ 内部嵌入了 6 个全等的正方形，其中点 M，N，P，Q 分别在长方形的边 AB，BC，CD 和 AD 上，若 AB＝23，BC＝32，则小正方形的边长为 _____.



【答案】$\sqrt{53}$

【解析】

【分析】如图，作出辅助线，每个小正方形都分为四个全等的直角三角形和一个正方形，假设小直角三角形长边直角边长为 b，短边直角边长为 a，找出等量关系，列二元一次方程组解出 a、b，再由勾股定理算出原图中的小正方形边长．

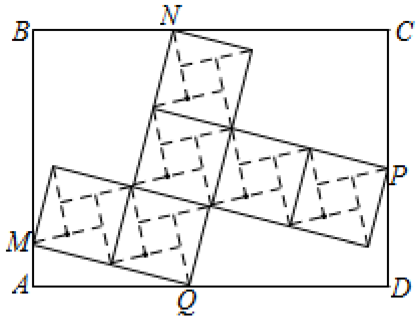
【详解】解：如图，作辅助线，发现每个小正方形都分为四个全等的直角三角形和一个正方形，假设小直角三角形长边直角边长为 b，短边直角边长为 a，由题意，得

$$\begin{cases}3b+a=23\\4b+2a=32\end{cases},$$

解得：$\begin{cases}a=2\\b=7\end{cases}$，

小正方形的边长为：$a^2+b^2=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{53}$，

故答案为：$\sqrt{53}$．



【点睛】此题考查了用勾股定理构造图形解决问题，解题的关键是作出辅助线，找到等量关系求解．

三、解答题：（20 题每小题 8 分，21-23 每题 4 分，24-25 题每题 5 分，共 30 分）

20. 计算：

（1）$\sqrt{8}-\sqrt{18}+2\sqrt{\frac{1}{2}}$；

（2）$4\sqrt{\frac{9}{8}}\times(-\frac{2}{5}\sqrt{15})\div2\sqrt{\frac{3}{2}}$．

【答案】（1）0　（2）$-\frac{6}{5}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】（1）根据二次根式的混合运算法则计算即可；

（2）根据二次根式的混合运算法则计算即可．

【小问 1 详解】

$\sqrt{8}-\sqrt{18}+2\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}+2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=-\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=0$

小问 2 详解】

$4\sqrt{\frac{9}{8}}\times(-\frac{2}{5}\sqrt{15})\div 2\sqrt{\frac{3}{2}}$

$=4\times\frac{3}{2\sqrt{2}}\times(-\frac{2}{5}\sqrt{15})\div(2\times\frac{\sqrt{6}}{2})$

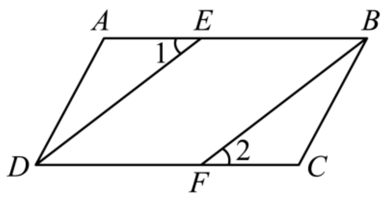
$=3\sqrt{2}\times(-\frac{2}{5}\sqrt{15})\div\sqrt{6}$

$=-\frac{6}{5}\sqrt{30}\div\sqrt{6}$

$=-\frac{6}{5}\sqrt{5}$

【点睛】本题考查二次根式的混合运算．掌握二次根式的混合运算法则是解题关键．

21. 如图，点 E，F 分别是▱$ABCD$ 的边 AB，CD 上的一点，连接 DE，BF，若∠1＝∠2，求证：四边形是 $DEBF$ 是平行四边形．



【答案】证明过程见解析

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可得 $AB=CD$，$AD=BC$，$\angle A=\angle C$，由“AAS”可证△ADE≌△CBF，可得 $ED=FB$，$AE=CF$，可得 $BE=DF$，则可得结论．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形

∴$AD=BC$，$\angle A=\angle C$，$AB=DC$，

又∵∠1＝∠2，

∴△ADE≌△CBF（AAS），

∴$AE=CF$，$DE=BF$，

∴$AE+BE=CF+DF$，

∴$BE=DF$，且 $DE=BF$，

∴四边形 $BEDF$ 是平行四边形．

【点睛】此题考查了平行四边形的判定和性质，全等三角形判定和性质，解题的关键是熟练运用平行四边形的判定和性质．

22. 已知，如图点 M 为∠BAC 的边上的一个定点，点 N 为∠BAC 内部的一个定点，连接 MN，在射线∠BAC 的内部求作一点 P，使得∠APN＝∠AMN．下面是小兵设计一种尺规作图过程．

①连接 AN；

②作线段 AN 的垂直平分线 l，交 AN 与点 O；

③连接 MO，并延长 MO 至 P，使得 $PO=MO$；

则点 P 即为所求.

根据小兵设计的尺规作图过程.

（1）使用直尺和圆规，补全图形.（保留作图痕迹）

（2）完成下面的证明：

证明：连接 AP，PN.

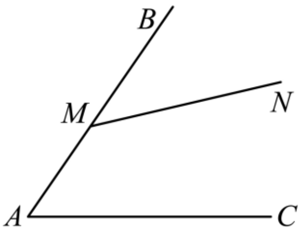
∵直线 l 为线段 AN 的垂直平分线，

∴$AO=NO$，

∵$PO=MO$，

∴四边形 $AMNP$ 为平行四边形（______）（填推理的依据）

∴$\angle APN=\angle AMN$（______）（填推理的依据）.



【答案】（1）作图见解析

（2）对角线相互平分的四边形是平行四边形；平行四边形对角相等

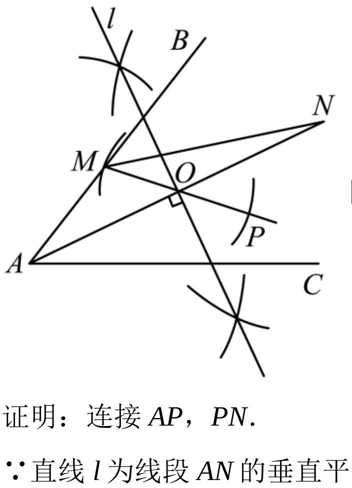
【解析】

【分析】（1）根据几何语言画出对应图形即可；

（2）根据证明过程补全相应知识点即可.

【小问 1 详解】

解：如图所示，点 P 即为所求.



【小问 2 详解】

证明：连接 AP，PN.

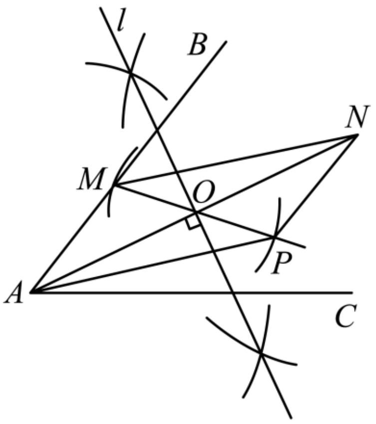
∵直线 l 为线段 AN 的垂直平分线，

∴$AO=NO$，

∵$PO=MO$，

∴四边形 $AMNP$ 为平行四边形（对角线相互平分的四边形是平行四边形）（填推理的依据）

∴$\angle APN=\angle AMN$（平行四边形对角相等）（填推理的依据）.



【点睛】此题考查了尺规作图能力以及垂直平分线的性质和平行四边形的性质，解题的关键是熟练掌握垂直平分线的性质和平行四边形的性质.

23. 先化简，再求值：$3x\sqrt{\frac{4}{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{16y}-3y\sqrt{\frac{x}{y^2}}+\frac{4\sqrt{y^3}}{y}$，其中 x＝9，$y=\frac{1}{4}$.

【答案】$3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$；

10

【解析】

【分析】先化简二次根式，然后合并同类二次根式，再将 x 和 y 值代入计算即可.

【详解】解：$3x\sqrt{\frac{4}{x}}-\frac{1}{2}\sqrt{16y}-3y\sqrt{\frac{x}{y^2}}+\frac{4\sqrt{y^3}}{y}$

$=6\sqrt{x}-2\sqrt{y}-3\sqrt{x}+4\sqrt{y}$

$=3\sqrt{x}+2\sqrt{y}$，

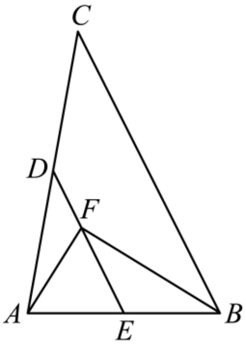
将 x＝9，$y=\frac{1}{4}$ 代入，

原式=$3\sqrt{9}+2\sqrt{\frac{1}{4}}$=9+1=10，

故答案为：10.

【点睛】此题考查了二次根式的化简求值，解题的关键是掌握运算法则.

24. 如图，在△ABC 中，点 D，点 E 分别是边 AC，AB 中点，点 F 在线段 DE 上，AF＝5，BF＝12，AB＝13，BC＝19，求 DF 的长度.



【答案】3

【解析】

【分析】由题易得出 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，即 $DE=\frac{1}{2}BC=\frac{19}{2}$．由勾股定理逆定理可判断 $\angle AFB=90°$，即可利用直角三角形斜边中线的性质求出 $EF=\frac{1}{2}AB=\frac{13}{2}$，从而即可求出 $DF=DE-EF=3$．

【详解】∵点 D，点 E 分别是边 AC，AB 的中点，

∴DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线，

$\therefore DE=\frac{1}{2}BC=\frac{19}{2}$．

∵$AF=5$，$BF=12$，$AB=13$，

$\therefore AF^2+BF^2=AB^2$，

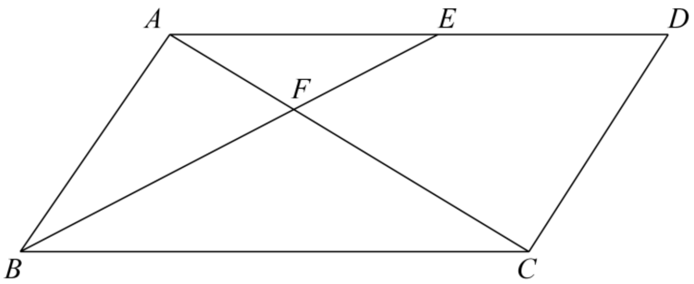
$\therefore \angle AFB=90°$，

$\therefore EF=\frac{1}{2}AB=\frac{13}{2}$，

$\therefore DF=DE-EF=\frac{19}{2}-\frac{13}{2}=3$．

【点睛】本题考查三角形中位线的性质，勾股定理逆定理，直角三角形斜边中线的性质．熟练掌握上述知识是解题关键．

25. 如图，四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\angle ABC$ 的角平分线 BE 交 AD 于点 E，连接 AC 交 BE 于点 F．



（1）求证：$BC=CD+ED$；

（2）若 $AB\perp AC$，$AF=3$，$AC=8$，求 AE　长．

【答案】（1）证明过程见解析

（2）6

【解析】

【分析】（1）运用角平分线的性质和平行线的性质证 $AB=AE$，再等量代换即可；

（2）过点 F 作 $FG\perp BC$，先通过角平分线　性质和勾股定理算出 $GC=4$， 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB^2+AC^2=BC^2$，设 $AE=AB=BG=x$ 等量代换求出 AE.

【小问 1 详解】

解：∵四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

∴$AD\parallel BC$， $AB=CD$ ，$BC=AD=AE+ED$，

∴$\angle AEB=\angle CBE$，

∵BE 是∠ABC 的角平分线，

∴∠ABE=∠CBE，

∴∠AEB=∠ABE，

∴AB=AE，

∴BC=AB+ED；

【小问 2 详解】

解：过点 F 作 $FG\perp BC$，那么

∵BE 是∠ABC 的角平分线，$AB\perp AC$，AF=3，

∴GF =AF=3，AB=BG

又∵AC＝8，

∴FC=AC=AF=8-3=5，

在 Rt△CFG 中，$GC=\sqrt{FC^2-GF^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，

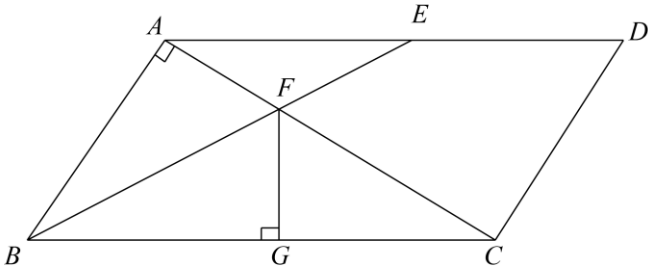
由（1）知，AE=AB，设 AE=AB=BG=x，

在 Rt△ABC 中，$AB^2+AC^2=BC^2$，

即 $x^2+8^2=(x+4)^2$，

解得：x=6，

即 AE 的长为 6.



【点睛】此题考查了平行四边形的性质、角平分线的性质、勾股定理等知识，解题的关键是熟练运用上述知识，通过数形结合来求证求解.

四、解答题：（26 题 6 分，27 题，28 题每题 7 分，共 20 分）

26. 在二次根式的计算和比较大小中，有时候用“平方法”会取得很好的效果，例如，比较 $a＝2\sqrt{3}$ 和 $b＝3\sqrt{2}$ 的大小，我们可以把 a 和 b 分别平方，∵$a^2＝12$，$b^2＝18$，则 $a^2＜b^2$，∴$a＜b$.

请利用“平方法”解决下面问题：

（1）比较 $c＝4\sqrt{2}$，$d＝2\sqrt{7}$ 大小，c___d（填写＞，＜或者＝）.

（2）猜想 $m＝2\sqrt{5}+\sqrt{6}$，$n＝2\sqrt{3}+\sqrt{14}$ 之间的大小，并证明.

（3）化简：$\sqrt{4p-8\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}$＝______（直接写出答案）.

【答案】（1）$c>d$　（2）$m<n$，证明过程见解析

（3）4 或 $4\sqrt{p-1}$

【解析】

【分析】（1）根据题干中“平方法”比较实数大小；

（2）根据题干中“平方法”比较二次根式的大小；

（3）根据题干中“平方法”找出$(\sqrt{p-1}-1)^2=p-2\sqrt{p-1}$，$(\sqrt{p-1}+1)^2=p+2\sqrt{p-1}$，再利用二次根式的性质结合完全平方公式进而开平方分类讨论得出答案．

【小问 1 详解】

解：∵$c^2=32$，$d^2=28$，

则 $c^2>d^2$，

∴$c>d$；

故答案为：>．

【小问 2 详解】

解：猜想：$m<n$，

证明：∵$m=2\sqrt{5}+\sqrt{6}$，$n=2\sqrt{3}+\sqrt{14}$，

∴$m^2=(2\sqrt{5}+\sqrt{6})^2=26+4\sqrt{30}$， $n^2=(2\sqrt{3}+\sqrt{14})^2=26+4\sqrt{42}$，

∵ $\sqrt{30}<\sqrt{42}$，

∴$m^2<n^2$，

∴$m<n$；

【小问 3 详解】

解：∵$(\sqrt{p-1}-1)^2=p-2\sqrt{p-1}$，$(\sqrt{p-1}+1)^2=p+2\sqrt{p-1}$，

∴ $\sqrt{4p-8\sqrt{p-1}}+\sqrt{4p+8\sqrt{p-1}}$

$=2\sqrt{p-2\sqrt{p-1}}+2\sqrt{p+2\sqrt{p-1}}$

$=2\left|\sqrt{p-1}-1\right|+2\left|\sqrt{p-1}+1\right|$

∵ $\sqrt{p-1}\geq0$

∴$p\geq1$，

分情况讨论：

①若 $\sqrt{p-1}-1\leq0$，即 $1\leq p\leq2$ 时，

原式$=2(1-\sqrt{p-1})+2(\sqrt{p-1}+1)$，

$=4$；

②若 $\sqrt{p-1}-1>0$，即 $p>2$ 时，

原式$=2(\sqrt{p-1}-1)+2(\sqrt{p-1}+1)$，

$=4\sqrt{p-1}$

综合①②得：

当 $1\leq p\leq2$ 时，原式=4；

当 $p>2$ 时，原式$=4\sqrt{p-1}$；

故答案为：4 或 $4\sqrt{p-1}$.

【点睛】此题考查了实数的大小比较，二次根式的大小比较和化简二次根式，解题的关键是熟练运用题中"平方法"，第（3）题注意分情况讨论.

27. 如图，直线 $l_1 // l_2$，点 A，B 为直线 l_1 的两点，点 C，D 为直线 l_2 的两点，且满足 $AB \perp AC$，点 E 为直线 l_1，l_2 之间的一点，满足 $\angle AEC = 90°$.

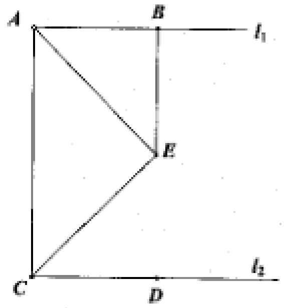


图 1

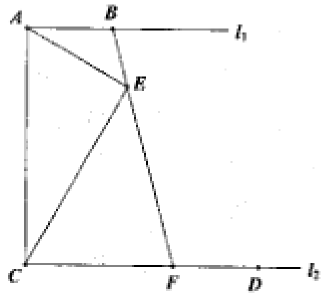


图 2

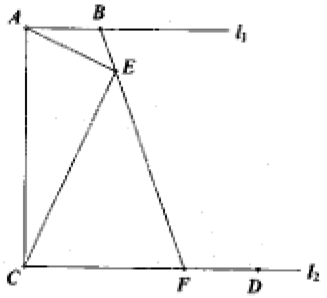


图 3

（1）如图 1，当 $\angle CAE = 45°$，$AB \perp BE$ 时，线段 AB 与 AC 的数量关系为 ____（直接写出答案）.

（2）直线 BE 交线段 CD 于点 F，且满足 $\angle CEF = 45°$；

①如图 2，若 $\angle ACE = 30°$，$AB = 2$，求 AC 的长；

②如图 3，若 $AC = CD$，用等式表示线段 AB，CF，AD 之间的数量关系，并证明.

【答案】（1）$AB=\frac{1}{2}AC$；

（2）① $2\sqrt{3}+2$，过程见解析；② $AB+CF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，理由见解析.

【解析】

【分析】（1）由题目中所给的角的度数，可证明△ABE 是等腰直角三角形，再由 $\angle CAE=45°$ 证明△ACE 是等腰直角三角形，就可以证明 AC 与 AB 之间的熟练关系；

（2）①过点 B 作 $BM \perp AE$，由各角的度数关系可得到 $\angle AEB=45°$，$\angle BAE=30°$，已知 $AB=2$，可求出 AE 的长，再由 $\angle ACE=30°$，得到 AC 的长；

②令 AD 与 BF 的交点为 P，由 $AB // CD$，$AB \perp AC$ 可知△ACD 是等腰直角三角形，就可以得到 A、E、P、C 四点共圆，再利用△BAP≌△FDP，得到 $AB=DF$，就可以得到线段 AB，CF，AD 之间的数量关系.

【小问 1 详解】

∵ $AB \perp BE$，

∴ $\angle ABE=90°$，

又∵ $AB \perp AC$，

∴ $\angle BAC=90°$，

又∵ $\angle CAE=45°$，

∴ $\angle BAE=90°-45°=45°$ 故△ABE 是等腰直角三角形，

∴ $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}AE$，

又∵$\angle AEC=90°$，$\angle CAE=45°$，

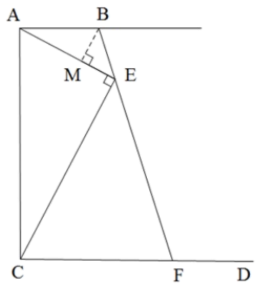
∴$\triangle ACE$是等腰直角三角形，

∴$AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$，

∴$AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}AE=\dfrac{1}{2}AC$；

【小问 2 详解】

过点 B 作 $BM\perp AE$，垂足为点 M，如下图所示，



∵$\angle AEC=90°$，$\angle CEF=45°$，

∴$\angle AEB=180°-\angle AEC-\angle CEF$

$=180°-90°-45°$

$=45°$，

又∵$BM\perp AE$，

∴$\angle BME=90°$，

∴$\angle MBE=180°-\angle BME-\angle AEB$

$=180°-90°-45°$

$=45°$，

∴$\angle AEB=\angle MBE$，

∴$BM=EM$，

又∵$ACE=30°$，$\angle AEC=90°$，

∴$\angle CAE=60°$，

又∵$AB\perp AC$，

∴$\angle BAC=90°$，$\angle BAE=30°$，

又∵$BM\perp AE$，$AB=2$，

∴$BM=\dfrac{1}{2}AB=1$，

∴$EM=1$，

在 Rt$\triangle AMB$ 中，根据勾股定理得：

$AM=\sqrt{AB^2-BM^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}$

$=\sqrt{3}$，

∴$AE=AM+EM$

$=\sqrt{3}+1$，

∵$\angle ACE=30°$，$\angle AEC=90°$，

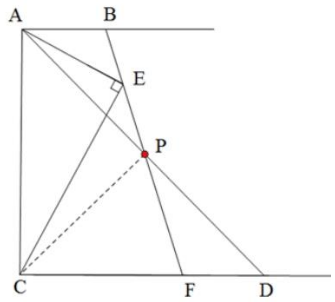
∴△AEC 是含 30°锐角的直角三角形，

∴$AE=\frac{1}{2}AC$，

故 $AC=2\cdot AE=2\sqrt{3}+2$；

②线段 AB、CF、AD 之间满足的数量关系：$AB+CF=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，理由如下：

设 AD 与 BF 的交点为 P，如下图所示，



∵$AB // CD$，$AB\perp AC$，

∴$CD\perp AC$，

∴$\angle ACD=90°$，

∵$AC=CD$，

∴△ACD 是等腰直角三角形，

∴$\angle CAD=45°$，

∵$\angle CEF=45°$，

∴$\angle CAD=\angle CEF$，

∴A、E、P、C 四点共圆，

∴$\angle AEC=\angle APC=90°$，

∴CP 是等腰直角三角形 ACD 的斜边的高和中点，

∴$AP=DP$，

∵$AB // CD$，

∴$\angle BAP=\angle FDP$，

在△BAP 和△FDP 中$\begin{cases}\angle BAP=\angle FDP\\ AP=DP\\ \angle APB=\angle DPE\end{cases}$，

∴△BAP≌△FDP，

∴$AB=DF$，

又∵△ACD 是等腰直角三角形，

$\therefore CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$，

$\therefore AB+CF=DF+CF=CD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$，

即 $AB+CF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD$.

【点睛】本题考查含三角形的综合应用，包括含30°角的直角三角形、等腰直角三角形、平行线、全等三角形和勾股定理的应用；关键在于牢记含30°角的直角三角形和等腰直角三角形的性质是解决本题的关键.

28. 对于平面内的两个点 M，N 和图形 Ω，若在图形 Ω 上存在两个点 P，Q（P 和 Q 点可以重合），使得 $PM+QN=k$（k 为大于 0 的常数），则称点 M 和点 N 为图形 Ω 的 k 系距离点．在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，M（m，0），N（0，n）．

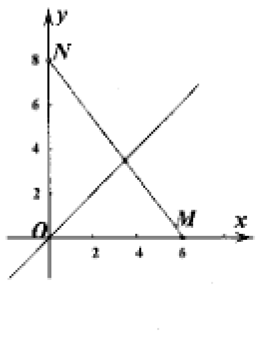


图 1

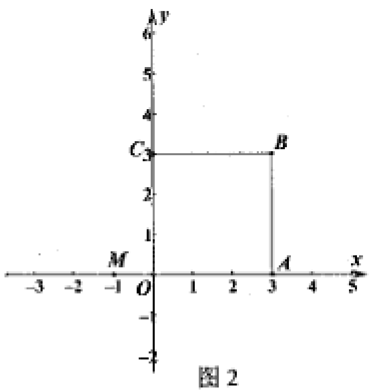


图 2

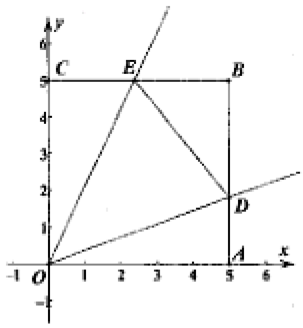


图 3

（1）如图 1，当 $m=6$，$n=8$ 时，图形 Ω 为一三象限的角平分线，点 M 和点 N 为图形 Ω 的 k 系距离点，在下列数值：①10；②8；③$7\sqrt{2}$ 中，实数 k 可能是___（填写正确的序号）．

（2）已知正方形 $OABC$ 的顶点 A，C 分别在 x 轴和 y 轴的正半轴上，A（a，0），

①如图 2，当 $a=3$，$m=-1$ 时，图形 Ω 为正方形 $OABC$，若点 M 和点 N 为图形 Ω 的 10 系距离点，求 n 的取值范围.

②如图 3，当 $a=m=5$，$n=3\sqrt{2}$ 时，点 D，点 E 分别为线段 AB 和 BC 上的动点，且满足 $AD+CE=DE$，图形 Ω 为 $\angle DOE$，点 M 和点 N 为图形 Ω 的 k 系距离点，则 k 的最大值为___（直接写出答案）．

【答案】（1）①③　（2）①$7\le n\le 12$ 或 $-9\le n\le -1$；②不存在

【解析】

【分析】（1）设 M,N 到 Ω 的距离分别为 d_1,d_2，根据等腰直角三角形的性质，勾股定理求得 k 的最小值，即可求解；

（2）①同理设 M,N 到 Ω 的距离分别为 d_1,d_2，求得 d_1 的范围，进而求得 d_2 的范围，即可求得 n 的取值范围；

②根据的 k 系距离点以及角的定义可知，不存在 k 的最大值.

【小问 1 详解】

当 $m=6$，$n=8$ 时，则 $M\left(6,0\right),N\left(0,8\right)$，

$\therefore ON=8,OM=6$

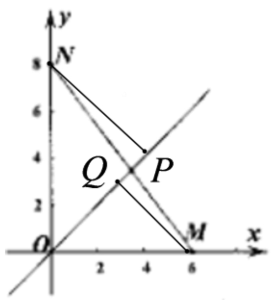
$\because \Omega$ 是一三象限的平分线，则 Ω 与 x,y 轴的正半轴的夹角为 $45°$

$\therefore \triangle MQO,\triangle NPO$ 是等腰直角三角形，

设 M,N 到 Ω 的距离分别为 d_1,d_2

则 $d_1+d_1\le k$

即 $NP+MQ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}ON+\dfrac{\sqrt{2}}{2}OM=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\left(6+8\right)=7\sqrt{2}$



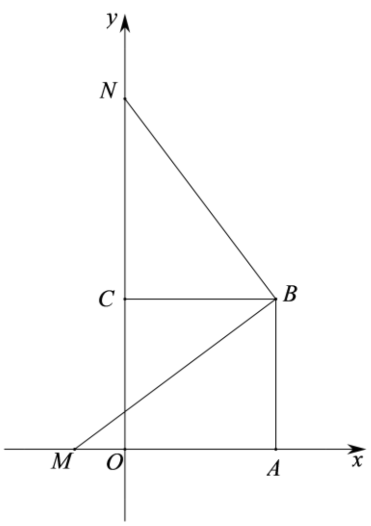
根据定义可知，$k\ge 7\sqrt{2}$，

$\therefore$实数 k 可能是 $7\sqrt{2}$ 或 10；

故答案为：①③

【小问 2 详解】

解：①如图，连接 BM，



设 M 到正方形上的点距离为 d_1，设 N 到正方形上的点距离为 d_2，

∵A（a，0），a＝3，m＝－1，

∴AM=4，AB=OC=3，

∵$\angle BAM$=90°，

∴BM=5，

∴M 到正方形 $OABC$ 上的点的距离范围为 $1\le d_1\le 5$

∵点 M 和点 N 为图形 Ω 的 10 系距离点，

$\therefore k=d_1+d_2=10$

∴ N 到正方形 $OABC$ 上的点的距离范围为 $5\le d_2\le 9$

当 $NB=5$ 时，$\because BC=AO=3$

$\therefore NC=\sqrt{NB^2-BC^2}=4$

$\therefore N(7,0)$ 或 $(-1,0)$

当 $NC=9$ 或 $NO=9$ 时，

$\therefore N(12,0)$ 或 $N(-9,0)$

$\therefore 7\le n\le 12$ 或 $-9\le n\le -1$

②根据的 k 系距离点以及角的定义可知，不存在 k 的最大值．

故答案为：不存在

【点睛】本题考查了勾股定理，坐标与图形，角平分线的定义，正方形的性质，不等式的性质，理解新定义是解题的关键．