



本试卷共6页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x \mid x < 2\}$ ， $B = \{1, 2\}$ ，则 $A \cup B =$

(A) $(-\infty, 2)$

(B) $(-\infty, 2]$

(C) $\{1\}$

(D) $\{1, 2\}$

(2) 若复数 z 满足 $z \cdot i = \frac{2}{1+i}$ ，则 $z =$

(A) $-1-i$

(B) $-1+i$

(C) $1-i$

(D) $1+i$

(3) 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y = \ln x$

(B) $y = x^3$

(C) $y = |\tan x|$

(D) $y = 2^{|x|}$

(4) 已知向量 a, b 满足 $a = (2, 1)$ ， $a - b = (-1, 2)$ ，则 $a \cdot b =$

(A) -5

(B) 0

(C) 5

(D) 7

(5) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_5 = 15$ ，则 $a_2 \cdot a_4$ 的最大值为

(A) $\frac{9}{4}$

(B) 3

(C) 9

(D) 36



(6) 设 $a = \log_4 6$, $b = \log_2 3$, $c = \frac{3}{2}$, 则

(A) $a > b > c$

(B) $c > b > a$

(C) $b > a > c$

(D) $b > c > a$

(7) “ $\sin \theta + \tan \theta > 0$ ” 是 “ θ 为第一或第三象限角” 的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

(8) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B = \sin 2A$, $c = 2a$, 则

(A) $\angle B$ 为直角

(B) $\angle B$ 为钝角

(C) $\angle C$ 为直角

(D) $\angle C$ 为钝角

(9) 古典吉他的示意图如图所示. A_0 , B 分别是上弦枕、下弦枕,

A_i ($i=1, 2, \dots, 19$) 是第 i 品丝. 记 a_i 为 A_i 与 A_{i-1} 的距离, L_i

为 A_i 与 A_0 的距离, 且满足 $a_i = \frac{X_L - L_{i-1}}{M}$, $i=1, 2, \dots, 19$, 其

中 X_L 为弦长 (A_0 与 B 的距离), M 为大于 1 的常数, 并规定

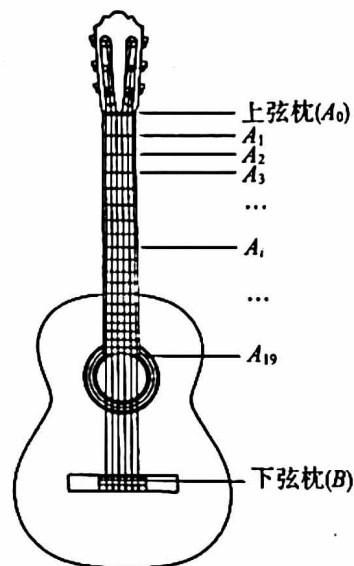
$L_0 = 0$. 则

(A) 数列 a_1, a_2, \dots, a_{19} 是等差数列, 且公差为 $-\frac{X_L}{M^2}$

(B) 数列 a_1, a_2, \dots, a_{19} 是等比数列, 且公比为 $\frac{M-1}{M}$

(C) 数列 L_1, L_2, \dots, L_{19} 是等比数列, 且公比为 $\frac{2M-1}{M}$

(D) 数列 L_1, L_2, \dots, L_{19} 是等差数列, 且公差为 $\frac{(M-1)X_L}{M^2}$



(10) 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB=2$, M 为斜边 BC 的中点, 以 M 为圆心, MA 为半径

作 \widehat{AC} , 点 P 在线段 BC 上, 点 Q 在 \widehat{AC} 上, 则 $|\overline{AP} + \overline{MQ}|$ 的取值范围是

(A) $[0, \sqrt{10}]$

(B) $[0, 2 + \sqrt{2}]$

(C) $[2 - \sqrt{2}, \sqrt{10}]$

(D) $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$



第二部分 (非选择题 共110分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 函数 $f(x) = \lg(x+1) + \frac{1}{x}$ 的定义域是_____.

(12) 在平面直角坐标系 xOy 中, 角 α 以 Ox 为始边, 终边经过点 $P(1, -2)$, 则

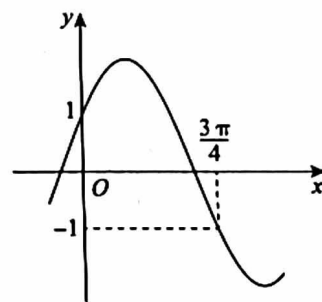
$$\tan 2\alpha = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(13) 已知非零向量 $a = x(e_1 + e_2)$, $b = e_1 + ye_2$, 其中 e_1, e_2 是一组不共线的向量. 能使得 a 与 b 的方向相反的一组实数 x, y 的值为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ 的部分图象如图所示.

①函数 $f(x)$ 的最小正周期为_____;

②将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 t ($t > 0$) 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象. 若函数 $g(x)$ 为奇函数, 则 t 的最小值是_____.



(15) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + a, & x < a, \\ x^2 + 2ax, & x \geq a. \end{cases}$ 给出下列四个结论:

①当 $a = 0$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0;

②当 $a \leq \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 存在最小值;

③记 $f(x)$ 的零点个数为 $g(a)$, 则函数 $g(a)$ 的值域为 $\{0, 1, 2, 3\}$;

④当 $a \geq 1$ 时, 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, $f(x_1) + f(x_2) \geq 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 14 分)

已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的各项均为整数，其前 n 项和为 S_n ， $a_2 = 3$ ， $a_1 + a_3 = 10$ 。

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 证明：对 $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ， $3S_k$ ， $2S_{k+1}$ ， S_{k+2} 这三个数成等差数列。

(17) (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \cos(x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$)，从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个

个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在。

(I) 求 φ 的值；

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上的最大值和最小值。

条件①： $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ ；

条件②： 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上是增函数；

条件③： $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) \geq f(\frac{2\pi}{3})$ 。

注：如果选择的条件不符合要求，得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分。

(18) (本小题 14 分)

已知曲线 $C: y = 4 - x^2$ 与 x 轴交于不同的两点 A, B (点 A 在点 B 的左侧)，点 $P(t, 0)$ 在线段 AB 上 (不与端点重合)，过点 P 作 x 轴的垂线交曲线 C 于点 Q 。

(I) 若 $\triangle APQ$ 为等腰直角三角形，求 $\triangle APQ$ 的面积；

(II) 记 $\triangle APQ$ 的面积为 $S(t)$ ，求 $S(t)$ 的最大值。



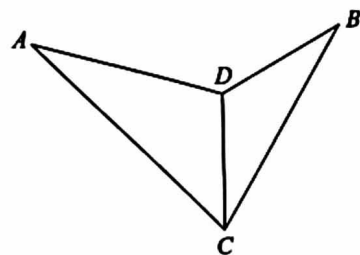
(19)(本小题 14 分)

某景区有一人工湖，湖面有 A, B 两点，湖边架有直线型栈道 CD ，长为 50 m，如图所示. 现要测量 A, B 两点之间的距离，工作人员分别在 C, D 两点进行测量，在 C 点测得 $\angle ACD = 45^\circ$ ， $\angle BCD = 30^\circ$ ；在 D 点测得 $\angle ADB = 135^\circ$ ， $\angle BDC = 120^\circ$.

(A, B, C, D 在同一平面内)

(I) 求 A, B 两点之间的距离；

(II) 判断直线 CD 与直线 AB 是否垂直，并说明理由.



(20)(本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+a}}{x^2+b}$ ，且 $f(1) = \frac{1}{4}$ ， $f(4) = \frac{2}{19}$.

(I) 求 a, b 的值；

(II) 求 $f(x)$ 的单调区间；

(III) 设实数 m 满足：存在 $k \in \mathbf{R}$ ，使直线 $y = kx + m$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线，且 $kx + m \geq f(x)$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立，求 m 的最大值.



(21) (本小题 15 分)

设无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $\{i_n\}$ 为单调递增的无穷正整数数列, 记 $A_n = S_{i_{n+1}} - S_{i_n}$ ($n=1, 2, \dots$), 定义 $\Omega = \{j \in \mathbf{N}^* \mid S_k - S_j \geq 0, k = j+1, j+2, \dots\}$.

(I) 若 $a_n = n$, $i_n = n^2$ ($n=1, 2, \dots$), 写出 A_1, A_2 的值;

(II) 若 $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$ ($n=1, 2, \dots$), 求 Ω ;

(III) 设 $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$ 求证: 对任意的无穷数列 $\{a_n\}$, 存在数列 $\{i_n\}$, 使得 $\{\text{sgn}(A_n)\}$ 为

常数列.