2021 北京东城初三二模

数　　学

2021．6

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项只有一个．

1.下列各数中，小于 $\sqrt{2}$ 的正整数是

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

2. 在下列不等式中，解集为 $x>-1$ 的是

A. $2x>2$　　B. $-2x>-2$　　C. $2x<-2$　　D. $-2x<2$

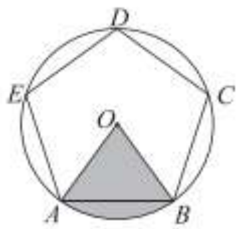
3. 在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 2，点 A（1，$\sqrt{3}$）与⊙O 的位置关系是

A. 在⊙O 上　B. 在⊙O 内　C. 在⊙O 外　　D. 不能确定

4. 下列式子中，运算正确的是

A. $(1+x)^2=1+x^2$　B. $a^2\cdot a^4=a^8$　C. $-(x-y)=-x-y$　D. $a^2+2a^2=3a^2$

5.如图，⊙O 是正五边形 $ABCDE$ 的外接圆.若⊙O 的半径为 5，则半径 OA，OB 与 AB 围成的扇形的面积是

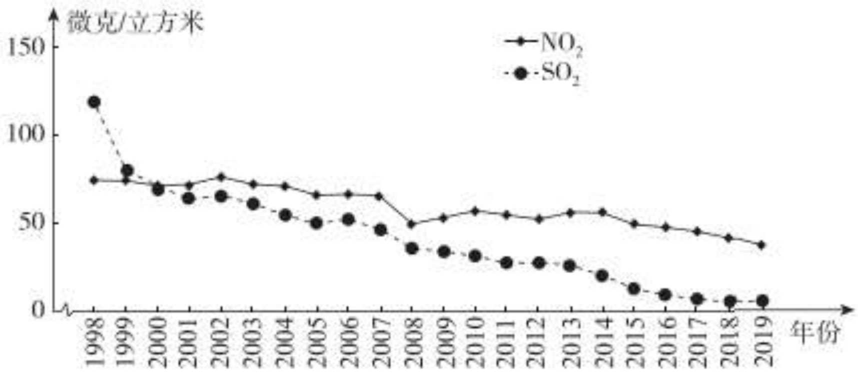


A. 2π　　B. 5π　　C. $\frac{25}{6}\pi$　　D. 10π

6.在平面直角坐标系 xOy 中，点 A,B 是直线 $y=x$ 与双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 的交点, 点 B 在第一象限,点 C 的坐标为（6，-2）. 若直线 BC 交 x 轴于点 D, 则点 D 的横坐标为

A.2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 多年来，北京市以强有力的措施和力度治理大气污染，空气质量持续改善，主要污染物的年平均浓度值全面下降．下图是 1998 年至 2019 年二氧化硫（SO_2）和二氧化氮（NO_2）的年平均浓度值变化趋势图．



A．1998 年至 2019 年，SO_2 的年平均浓度值的平均数小于 NO_2 的年平均浓度值的平均数

B．1998 年至 2019 年，SO_2 的年平均浓度值的中位数小于 NO_2 的年平均浓度值的中位数

C．1998 年至 2019 年，SO_2 的年平均浓度值的方差小于 NO_2 的年平均浓度值的方差

D．1998 年至 2019 年，SO_2 的年平均浓度值比 NO_2 的年平均浓度值下降得更快

8．四位同学在研究函数 $y=-x^2+bx+c$（b，c 是常数）时，甲同学发现当 $x=1$ 时，函数有最大值；乙同学发现函数 $y=-x^2+bx+c$ 的图象与 y 轴的交点为（0,-3）；丙同学发现函数的最大值为 4；丁同学发现当 $x=3$ 时，函数的值为 0.若这四位同学中只有一位同学的结论是错误的，则该同学是

A.甲　　　B. 乙　　　C.丙　　　D.丁

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

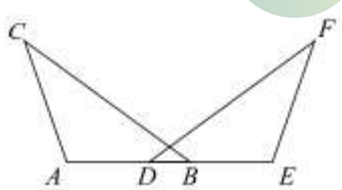
9. 使式子 $\frac{2}{x-1}$ 有意义的 x 的取值范围是________.

10. 分解因式：$mx^2-9m=$__________.

11. 用一个 k 的值推断命题“一次函数 $y=kx+1\left(k\neq 0\right)$ 中，y 随着 x 的增大而增大.”是错误的，这个值可以是 k =_____.

12. 某校九年级（1）班计划开展“讲中国好故事”主题活动. 第一小组的同学推荐了 “北大红楼、脱贫攻坚、全面小康、 南湖红船、抗疫精神、致敬英雄” 六个主题，并将这六个主题分别写在六张完全相同的卡片上，然后将卡片放入不透明的口袋中.组长小东从口袋中随机抽取一张卡片，抽到含“红”字的主题卡片的概率是______.

13. 如图，点 A，D，B，E 在同一条直线上，$AD=BE$, $AC=EF$, 要使△ABC≌△EDF, 只需添加一个条件,这个条件可以是_______ .



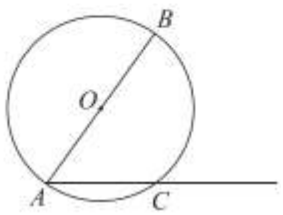
14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 A(2，0),B(5，4). 若四边形 $OABC$ 是平行四边形，则▱$OABC$ 的周长等于______.

15．若点 P 在函数 $y=\begin{cases}x, x\geqslant 0\\ -x, x<0\end{cases}$ 的图象上，且到 x 轴的距离等于 1，则点 P 的坐标是_______.

16. 数学课上，李老师提出如下问题：

已知：如图, AB 是⊙O 的直径,射线 AC 交⊙O 于 C.

求作：弧 BC 的中点 D.



同学们分享了如下四种方案：

①如图 1，连接 BC，作 BC 的垂直平分线，交⊙O 于点 D.

②如图 2，过点 O 作 AC 的平行线，交⊙O 于点 D.

③如图 3，作∠BAC 的平分线，交⊙O 于点 D.

④如图 4，在射线 AC 上截取 AE，使 $AE=AB$，连接 BE，交⊙O 于点 D.

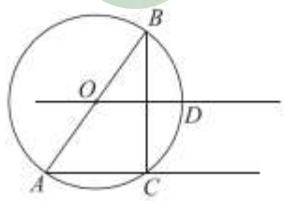


图 1

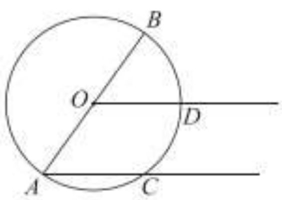


图 2

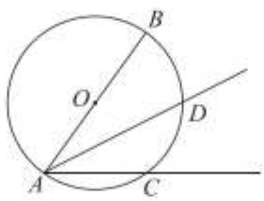


图 3

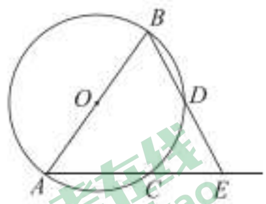


图 4

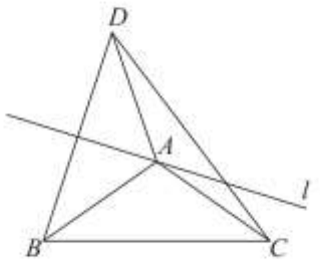
上述四种方案中，正确的方案的序号是___________.

三、解答题（本题共 68 分，第 17-22 每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算：$(-5)^0+\sqrt{27}+2^{-1}-\tan 60°$.

18. 先化简代数式 $\dfrac{a^2+1}{a-1}+1-a$，再求当 a 满足 $a-2=0$ 时，此代数式的值.

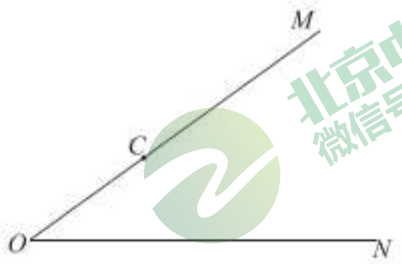
19. 如图，在等腰△ABC 中，$AB=AC$，直线 l 过点 A. 点 B 与点 D 关于直线 l 对称，连接 AD,CD．求证：$\angle ACD=\angle ADC$．



20． 已知：如图，点 C 在∠MON 的边 OM 上．

求作：射线 CD，使 $CD\,/\!/\,ON$，且点 D 在∠MON 的角平分线上.

作法：①以点 O 为圆心，适当长为半径画弧，分别交射线 OM，ON 于点 A，B;



②分别以点 A，B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径画弧，交于点 Q;

③画射线 OQ;

④以点 C 为圆心，CO 长为半径画弧，交射线 OQ 于点 D;

⑤画射线 CD.

射线 CD 就是所求作的射线.

（1）使用直尺和圆规，依作法补全图形（保留作图痕迹）;

（2）完成下面的证明:

∵OD 平分∠MON,

∴∠MOD=________.

∵$OC=CD$,

∴∠MOD=________.

∴∠NOD=∠CDO.

∴$CD\,/\!/\,ON$（________________________________）（填推理的依据）.

21. 已知关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(m+1)x+1=0(m\neq 0)$.

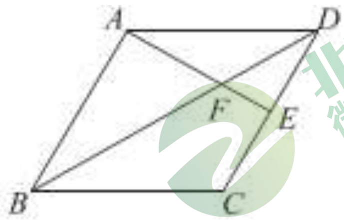
（1）求证：此方程总有实数根；

（2）写出一个 m 的值，使得此该方程的一个实数根大于 1，并求此时方程的根.

22. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E 是 CD 的中点，连接 AE，交 BD 于点 F.

(1)求 BF：DF 的值；

(2)若 $AB=2$，$AE=\sqrt{3}$，求 BD 的长.



23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 的两个交点分别为 A（-3，-1），B（1，m）.

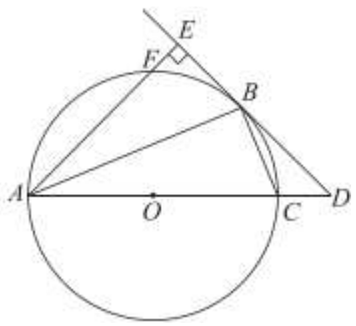
（1）求 k 和 m 的值；

（2）点 P 为直线 l 上的动点，过点 P 作平行于 x 轴的直线，交双曲线 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$ 于点 Q. 当点 Q 位于点 P 的右侧时，求点 P 的纵坐标 n 的取值范围.

24. 如图,⊙O 是△ABC 的外接圆，圆心 O 在 AC 上.过点 B 作直线交 AC 的延长线于点 D，使得∠CBD=∠CAB.过点 A 作 AE⊥BD 于点 E，交⊙O 于点 F.

（1）求证：BD 是⊙O 的切线；

（2）若 AF=4，$\sin D=\dfrac{2}{3}$，求 BE 的长.



25.中国新闻出版研究院组织实施的全国国民阅读调查已持续开展了 18 次,对我国国民阅读总体情况进行了综合分析.2021 年 4 月 23 日，第十八次全国国民阅读调查结果发布.

下面是关于样本及国民图书阅读量的部分统计信息.

a.本次调查有效样本容量为 46083，成年人和未成年人样本容量的占比情况如图 1.

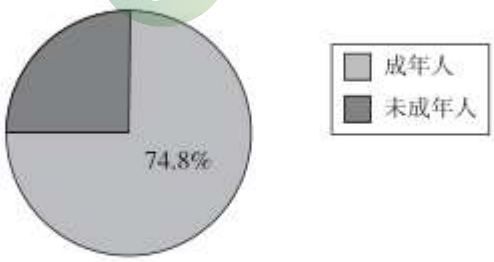


图 1

b. 2020 年，成年人的人均纸质图书阅读量约为 4.70 本，人均电子书阅读量约为 3.29 本；2019 年，成年人的人均纸质图书阅读量约为 4.65 本，人均电子书阅读量约为 2.84 本.

c.2012 年至 2020 年,未成年人的年人均图书阅读量如图 2.

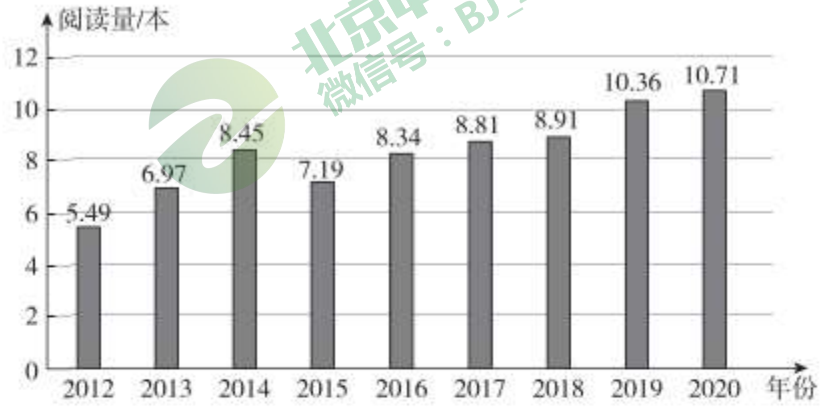


图 2

根据以上信息，回答问题：

（1）第十八次全国国民阅读调查中，未成年人样本容量占有效样本容量的________；

（2）2020 年，成年人的人均图书阅读量约为________本，比 2019 年多________本；

（3）在 2012 年至 2020 年中后一年与前一年相比，________年未成年人的年人均图书阅读量的增长率最大；

（4）2020 年，未成年人的人均图书阅读量比成年人的人均图书阅读量高________%（结果保留整数）.

26. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y=ax^2-3ax+1$ 与 y 轴交于点 A.

（1）求抛物线的对称轴；

（2）点 B 是点 A 关于对称轴的对称点，求点 B 的坐标；

（3）已知点 $P(0,2)$，$Q\left(a+1,1\right)$. 若线段 PQ 与抛物线与恰有一个公共点，结合函数图象，求 a 的取值范围.

27．已知△ADE 和△ABC 都是等腰直角三角形，∠ADE=∠BAC=90°，P 为 AE 的中点，连接 DP.

(1)如图 1，点 A, B , D 在同一条直线上，直接写出 DP 与 AE 的位置关系；

（2）将图 1 中的△ADE 绕点 A 逆时针旋转，当 AD 落在图 2 所示的位置时，点 C，D，P 恰好在同一条直线上.

①在图 2 中，按要求补全图形，并证明∠BAE=∠ACP；

② 连接 BD，交 AE 于点 F. 判断线段 BF 与 DF 的数量关系，并证明.

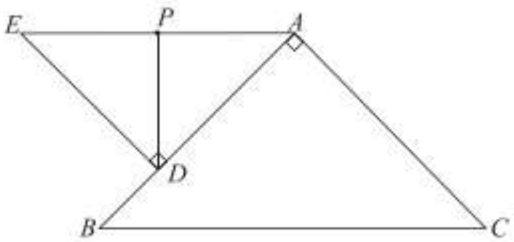


图 1

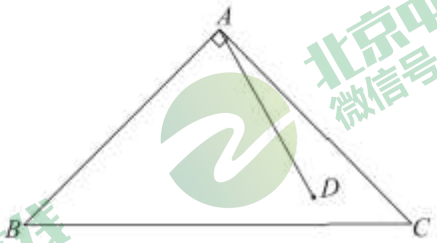


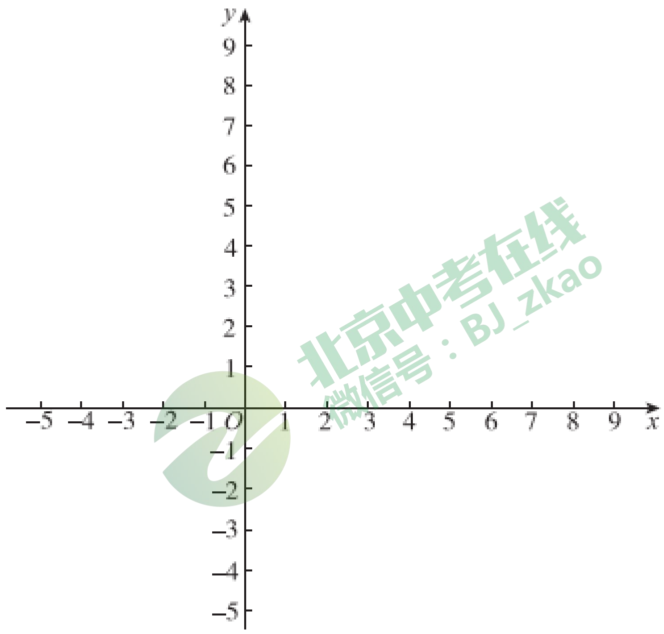
图 2

28.对于平面直角坐标系 xOy 中的图形 W，给出如下定义：点 P 是图形 W 上任意一点，若存在点 Q，使得 $\angle OQP$ 是直角，则称点 Q 是图形 W 的“直角点”.

（1）已知点 $A(6,8)$，在点 $Q_1(0,8)$，$Q_2(-4,2)$，$Q_3(8,4)$ 中，__________是点 A 的“直角点”；

（2）已知点 $B(-3,4)$，$C(4,4)$，若点 Q 是线段 BC 的“直角点”，求点 Q 的横坐标 n 的取值范围；

（3）在（2）的条件下，已知点 $D(t,0)$，$E(t+1,0)$，以线段 DE 为边在 x 轴上方作正方形 $DEFG$.若正方形 $DEFG$ 上的所有点均为线段 BC 的“直角点”，直接写出 t 的取值范围.



2021 北京东城初三二模数学

参考答案

一、选择题（本题共 16 分，每小题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	A	D	B	C	C	B

二、填空题（本题共 16 分，每小题 2 分）

9. $x\neq 1$　10. $m\left(x+3\right)\left(x-3\right)$　11. -1（答案不唯一，$k<0$）　12. $\frac{1}{3}$

13. $\angle A=\angle E$ (答案不唯一，或 $BC=DE$)　14. 14　15.（-1,1）或（1,1）　16. ①②③④

说明：第 15 题，两个答案各 1 分，第 16 题，少答得 1 分

三. 解答题（本题共 68 分，第 17-22 题，每小题 5 分，第 23-26 题，每小题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17.解：　$\left(-5\right)^{0}+\sqrt{27}+2^{-1}-\tan 60°$

$=1+3\sqrt{3}+\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ --4 分

$=\frac{3}{2}+2\sqrt{3}.$　--5 分

说明：第一步化简每个 1 分，结果 1 分

18. 解：原式$=\frac{a^{2}+1}{a-1}-\left(a-1\right)$

$=\frac{a^{2}+1-\left(a-1\right)^{2}}{a-1}$　--1 分

$=\frac{a^{2}+1-\left(a^{2}-2a+1\right)}{a-1}$ --2 分

$=\frac{a^{2}+1-a^{2}+2a-1}{a-1}$

$=\frac{2a}{a-1}.$　--3 分

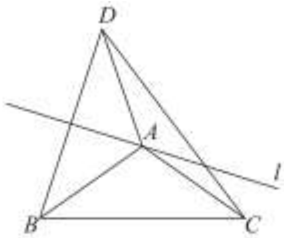
$\because a-2=0$，

$\therefore a=2$.　--4 分

∴原式=4. ---5 分

说明：通分正确 1 分，去括号正确 1 分，化简结果正确 1 分，a 的值正确 1 分，结果 1 分。

19. 解：∵点 B 与点 D 关于直线 l 对称，



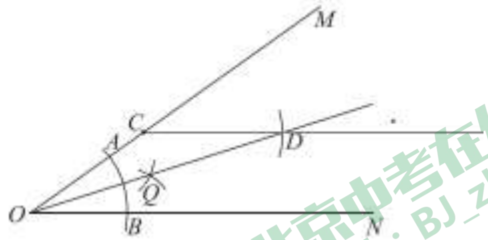
∴$AB=AD$．--------------------------------2 分

∵$AB=AC$，

∴$AD=AC$.--------------------------------4 分

∴$\angle ACD=\angle ADC$．---5 分

20. 解：(1)补全图形，如图：



---2 分

(2) $\angle NOD$；$\angle CDO$；

内错角相等，两直线平行． ---5 分

说明：（1）角分线 1 分，CD 1 分；（2）三个空各 1 分，理由如果写成平行线的性质不得分

21.（1）证明：∵$\Delta=(m+1)^2-4m=(m-1)^2\geqslant 0$，

∴该方程总有实数根. --2 分

说明：判别式正确 1 分，配方并写出大于等于零 1 分，如果丢掉等号扣 1 分

（2）解：取 $m=\dfrac{1}{2}$. ---3 分此时，方程为

$$\frac{1}{2}x^2-\left(\frac{1}{2}+1\right)x+1=0.$$

即 $x^2-3x+2=0$.

解得：$x_1=1, x_2=2$. ---5 分

（注：答案不唯一，$x_1=1, x_2=\dfrac{1}{m}$）

说明：m 满足 $0<m<1$，写对得 1 分，方程的两根各 1 分

22. 解：(1)∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴$AB\,/\!/\,CD$，$AB=CD$.

∴$\triangle ABF\backsim\triangle DEF$．---1 分

∴ BF：DF=AB:ED.

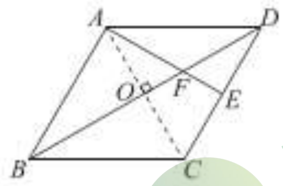
∵点 E 是 CD 的中点，

∴AB=CD=2DE.

∴BF：DF=2：1. ---2 分

(2) ∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴AB=AD.



∵AB=2，

∴AD=2，DE=1.

∵AE=$\sqrt{3}$，

∴$AD^2=AE^2+DE^2$。

∴ $\angle AED$=90°. --3 分

∵ $\sin\angle ADE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

∴ $\angle ADE$=60°. --4 分

在菱形 $ABCD$ 中，BD 为对角线，

∴ $\angle ADB=\dfrac{1}{2}\angle ADE$=30°.

连接 AC,交 BD 于点 O .

∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

∴ $AC\perp BD$，OB=OD.

∴ $AO=\dfrac{1}{2}AD$=1.

在 Rt△AOD 中，由勾股定理，得 $OD=\sqrt{3}$.

∴BD=2OD=2$\sqrt{3}$. --5 分

23. 解：（1）把 $A(-3,-1)$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$ 得 $k=3$.

把 $B(1,m)$ 代入 $y=\dfrac{3}{x}$ 得 $m=3$.

$\therefore k=3, m=3$. --2 分说明：两个字母的值各 1 分

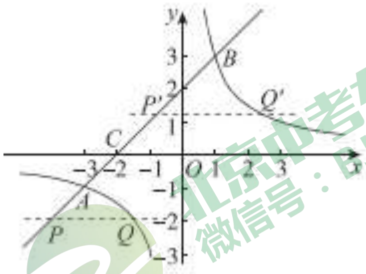
（2）设直线 l 的表达式为 $y=k_1x+b(k_1\neq 0)$ ，

分别把 $A(-3,-1)$， $B(1,3)$ 代入得 $\begin{cases}-3k_1+b=-1,\\ k_1+b=3.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1,\\ b=2.\end{cases}$

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y=x+2$. --3 分

$\therefore$ 直线 l 与 x 轴的交点为 $C(-2,0)$. --4 分

结合图象可知:



当点 P 在线段 BA 的延长线上或在线段 BC（不含端点）上时，点 Q 位于点 P 右侧.

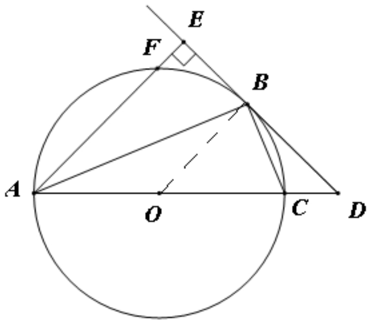
∴点 P 的纵坐标 n 的取值范围是

$n<-1$ 或 $0<n<3$.

---6 分

说明：两种情况各 1 分

24. (1)证明：如图，连接 OB.



∵AC 是直径，

$\therefore \angle ABC=90^{\circ}$.------------------------------1 分

$\therefore \angle ABO+\angle OBC=90^{\circ}$.

$\because OA=OB$,

$\therefore \angle CAB=\angle ABO$.

$\therefore \angle CAB+\angle OBC=90^{\circ}$. --2 分

$\because \angle CBD=\angle CAB$,

$\therefore \angle CBD+\angle OBC=90^{\circ}$.

$\therefore OB\perp BD$.

∴BD 是⊙O 的切线. --3 分

(2) 解：如图，连接 CF 交 OB 于点 G.

∵AC 是直径，

$\therefore \angle AFC=90^{\circ}$.

$\because AE\perp BD$,

$\therefore \angle AED=90^{\circ}$.

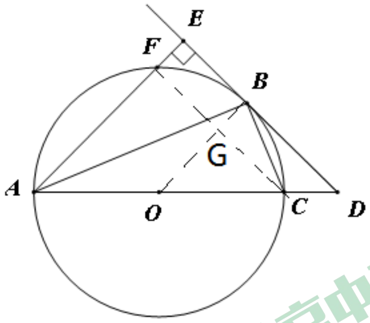
$\therefore \angle AFC=\angle AED$.

$\therefore FC\,//\,ED$.

$\therefore \angle ACF=\angle D$. --4 分

$\because \sin\angle D=\dfrac{2}{3}$.

$\therefore \sin\angle ACF=\sin\angle D=\dfrac{2}{3}$.



在RtΔACF中，$\sin\angle ACF=\dfrac{AF}{AC}$.

$\therefore \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{2}{3}$.

$\because AF=4$,

$\therefore AC=6$.

根据勾股定理，得 $CF=2\sqrt{5}$. --5 分

$\because CF\,//\,BD, OB\perp BD$,

$\therefore OB\perp CF$.

$\therefore FG=\dfrac{1}{2}CF=\sqrt{5}$.

$\because \angle EFG=\angle FEB=\angle EBG=90^\circ$,

$\therefore$四边形 $BEFG$ 是矩形.

$\therefore\ BE=FG=\sqrt{5}$. --6 分

25.解：（1）25.2%. --1 分

（2）7.99,0.5.---3 分

（3）2013. ---4 分

（4）34.--6 分

说明：（2）每个答案各 1 分

26.解：（1）由抛物线 $y=ax^2-3ax+1$，可知 $x=-\dfrac{-3a}{2a}=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$抛物线的对称轴为直线 $x=\dfrac{3}{2}$.--1 分

（2）$\because$抛物线 $y=ax^2-3ax+1$与 y 轴交于点 A，

$\therefore$点 A 的坐标为$(0,1)$.

$\because$点 B 是点 A 关于直线 $x=\dfrac{3}{2}$ 的对称点，

∴点 B 的坐标为 $(3,1)$.--2 分

（3）∵点 $A(0,1)$，点 $B(3,1)$，点 $P(0,2)$，点 $Q(a+1,1)$，

∴点 P 在点 A 的上方，点 Q 在直线 $y=1$ 上.--3 分

①当 $a>0$ 时，$a+1>1$，点 Q 在点 A 的右侧.

（i）如图 1，当 $a+1<3$，即 $a<2$ 时，点 Q 在点 B 的左侧，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线没有公共点；

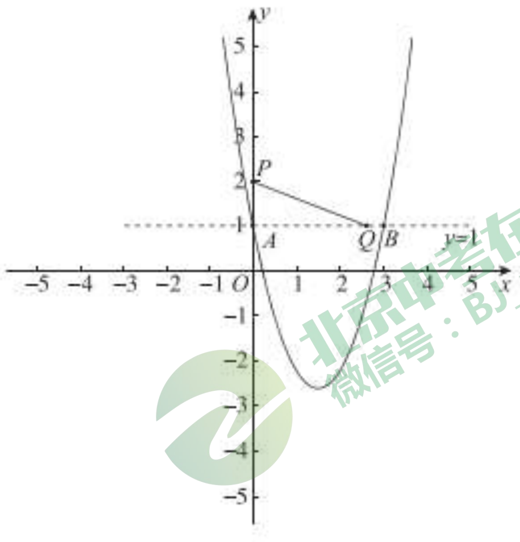


图 1

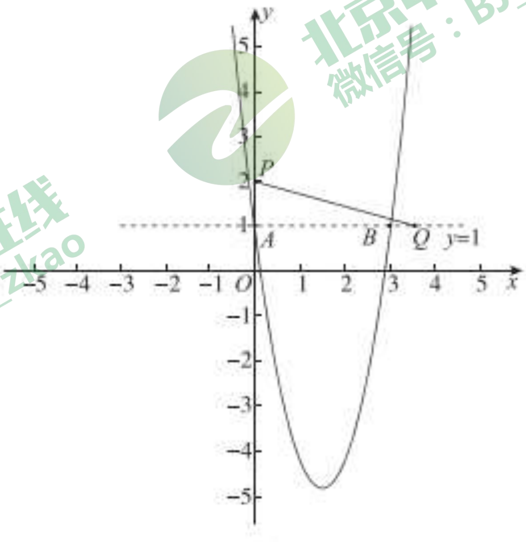


图 2

（ii）如图 2，当 $a+1\geqslant 3$，即 $a\geqslant 2$ 时，点 Q 在点 B 的右侧，或与点 B 重合，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线恰有一个公共点.-----------------------------4 分

②当 $a<0$ 时，$a+1<1$，点 Q 在点 B 的左侧.

（i）如图 3，当 $0\leqslant a+1<1$，即 $-1\leqslant a<0$ 时，点 Q 在点 A 的右侧,或与点 A 重合，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线恰有一个公共点；-----------------------------5 分

（ii）如图 4，当 $a+1<0$，即 $a<-1$ 时，点 Q 在点 A 的左侧，

结合函数图象，可知线段 PQ 与抛物线没有公共点.

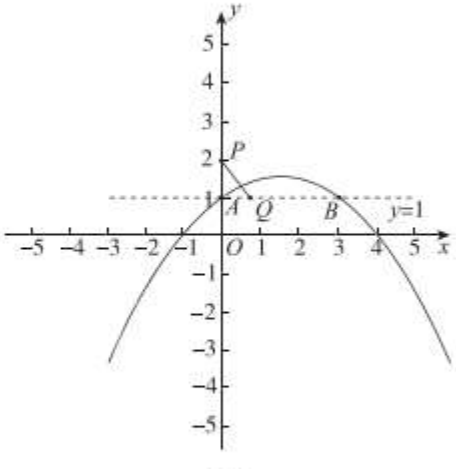


图 3

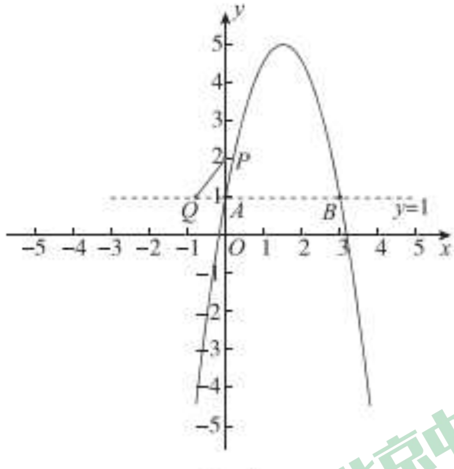
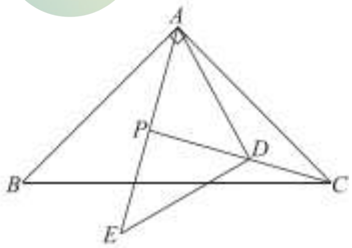


图 4

综上所述，a 的取值范围是 $-1\leqslant a<0$ 或 $a\geqslant 2$． ---6 分

27.解：（1）DP 与 AE 的位置关系：$DP\perp AE$； ----------------------------------1 分

（2）①补全图形，如图：



--------------- ---2 分

证明：∵ $\angle BAC=90°$，

∴ $\angle BAE+\angle CAE=90°$．

∵△ADE 是等腰直角三角形，且 P 为 AE 的中点，

∴$DP\perp AE$，即 $\angle APD=90°$． --3 分

∵点 C，D，P 在同一条直线上，

∴ $\angle ACP+\angle CAE=90°$.

∴ $\angle BAE=\angle ACP$. ---4 分

(3) 线段 BF 与 DF 的数量关系：$BF=DF$. --5 分

证明：如图，过点 B 作 $BH\perp AE$ 于点 H.

∴ $\angle AHB=\angle APD=90°$. ---6 分

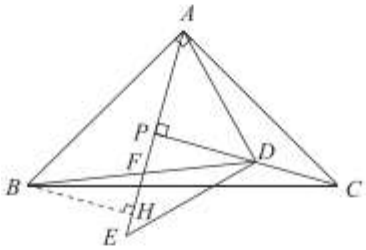
∵ $\angle BAE=\angle ACP, AB=AC$,

∴△BAH≌△ACP(AAS).

∴$BH=AP=DP$.

∵∠BHF=∠DPF，∠BFH=∠DFP，

∴△BFH≌△DFP(AAS).



∴$BF=DF$. --7 分

28.解：（1）Q_1，Q_3. --2 分

(2)∵∠OQP=90°，

∴点 Q 在以 OP 为直径的圆上（O,P 两点除外）

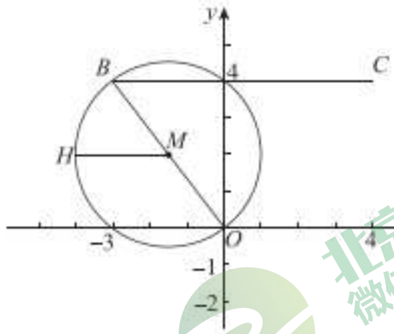


图 1

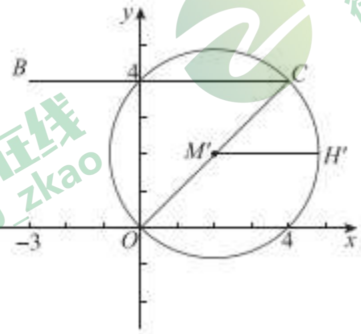


图 2

如图 1，以 OB 为直径作⊙M ,作 MH∥x 轴，交⊙M 于点 H（点 H 在点 M 左侧）.

∵点 B 的坐标为（-3,4），

∴⊙M 的半径为 $\frac{5}{2}$，点 M 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},2\right)$.

∴ $x_H=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}=-4$. --3 分

如图 2，以 OC 为直径作⊙M' ,作 $M'H'$∥x 轴，交⊙M' 于点 H'（点 H' 在点 M' 右侧）.

∵点 C 的坐标为（4,4），

∴⊙M' 的半径为 $2\sqrt{2}$，点 M' 的坐标为（2,2）.

∴ $x_{H'}=2+2\sqrt{2}$. --4 分

∴n 的取值范围是 $-4 \leqslant n \leqslant 2+2\sqrt{2}$.---5 分

（3）$-3 \leqslant t \leqslant 1-\sqrt{7}$ 或 $\frac{\sqrt{21}-3}{2} \leqslant t \leqslant 3$. ---7 分

说明：(3)中部分正确得 1 分.