2022北京海淀高三（上）期中

数　　学

本试卷分为第一部分（选择题）和第二部分（非选择题），满分150分，考试时长120分钟.考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回.

第一部分（选择题　　共40分）

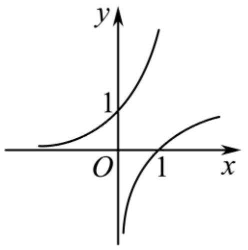
一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

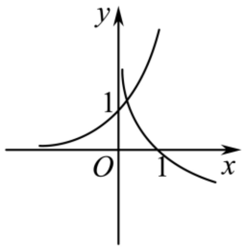
1. 已知全集 $U=\left\{x|x>0\right\}$，集合 $A=\left\{x|2\le x\le 3\right\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

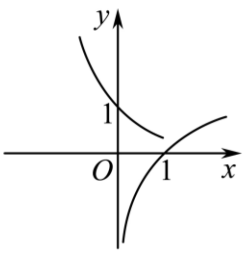
A. $\left(0,2\right]\cup\left[3,+\infty\right)$　　　　B. $\left(0,2\right)\cup\left(3,+\infty\right)$

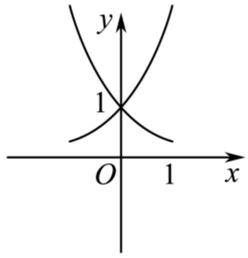
C. $\left(-\infty,2\right]\cup\left[3,+\infty\right)$　　　　D. $\left(-\infty,2\right)\cup\left(3,+\infty\right)$

2. 在同一个坐标系中，函数 $y=\log_a x$ 与 $y=a^x\left(a>0\text{ 且 }a\ne 1\right)$ 的图象可能是（　　）

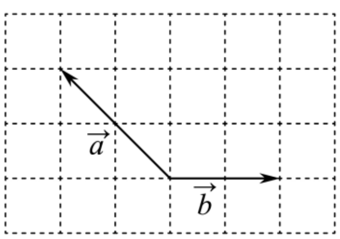
A. 

B. 

C. 

D. 

3. 已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 在正方形网格中的位置如图所示．若网格中每个小正方形的边长均为1，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）



A. 4　　　　B. $4\sqrt{2}$　　　　C. -4　　　　D. $-4\sqrt{2}$

4. 若等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 和等比数列 $\left\{b_n\right\}$ 满足 $a_1=b_1$，$a_2=b_2=2$，$a_4=8$，则 $\left\{b_n\right\}$ 公比为（　　）

A. 2　　　　B. -2　　　　C. 4　　　　D. -4

5. 已知实数 a,b 满足 $a>b$，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $|a|>b$

B. $a>|b|$

C. $a^2>ab$

D. $ab>b^2$

6. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 与角 β 均以 Ox 为始边，它们 终边关于直线 $y=x$ 对称. 若 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\cos\beta=$（　　）

A. $-\frac{4}{5}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{3}{5}$

7. 已知函数 $f(x)$. 甲同学将 $f(x)$ 的图象向上平移1个单位长度，得到图象 C_1；乙同学将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），得到图象 C_2. 若 C_1 与 C_2 恰好重合，则下列给出的 $f(x)$ 中符合题意的是（　　）

A. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$

B. $f(x)=\log_2 x$

C. $f(x)=2^x$

D. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

8. 已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x}\ (ab\neq 0)$，则“$a+b=0$”是“$f(x)$ 为奇函数”的（　　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 若 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的一个动点，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 xy 的最大值是（　　）

A. $\frac{1}{4}$

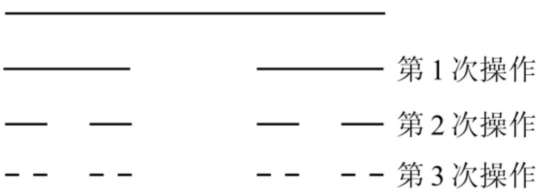
B. $\frac{1}{2}$

C. 1

D. 2

10. 我们可以用下面的方法在线段上构造出一个特殊的点集：如图，取一条长度为1的线段，第1次操作，将该线段三等分，去掉中间一段，留下两段；第2次操作，将留下的两段分别三等分，各去掉中间一段，留下四段；按照这种规律一直操作下去. 若经过 n 次这样的操作后，去掉的所有线段的长度总和大于 $\frac{99}{100}$，则 n 的最小值为（　　）

（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$，$\lg 3\approx 0.477$）



A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

第二部分（非选择题　共110分）

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

11. 若复数 $z=1-2i$，则 $|\bar{z}|=$________.

12. 函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}+\ln x$ 的定义域是__________.

13. 已知向量 $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(x,tx+2)$．若存在实数 x，使得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同，则 t 的一个取值为__________.

14. 若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 和 $g(x)=\cos^2(x+\varphi)-\sin^2(x+\varphi)$ 的图象的对称中心完全重合，则 $\omega=$__________；$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=$__________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1, x\le 1\\ ax, x>1\end{cases}$.

①当 $a=1$ 时，$f(x)$ 极值点个数为__________；

②若 $f(x)$ 恰有两个极值点，则 a 的取值范围是__________.

三、解答题共6小题，共85分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$，且 $a_2=3$，$S_5=25$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）等比数列 $\{b_n\}$ 的首项为1，公比为 q，在下列三个条件中选择一个，使得 $\{b_n\}$ 的每一项都是 $\{a_n\}$ 中的项．若 $b_k=a_m\ (k,m\in\mathbf{N}^*)$，求 m．（用含 k 的式子表示）

条件①：$q=-1$；条件②：$q=2$；条件③：$q=3$.

注：如果选择　条件不符合要求，第（2）问得0分.

17　已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$.

（1）求 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

（2）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（3）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

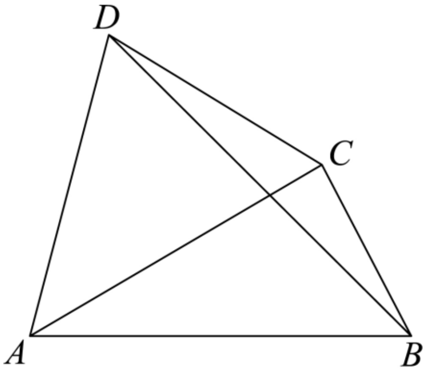
18. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,m]$ 上的取值范围是 $\left[-\frac{4}{3},0\right]$，求 m 的取值范围.

19. 某自然保护区为研究动物种群的生活习性，设立了两个相距12km　的观测站 A 和 B，观测人员分别在 A，B 处观测该动物种群．如图，某一时刻，该动物种群出现在点 C 处，观测人员从两个观测站分别测得

$\angle BAC=30^\circ$，$\angle ABC=60^\circ$，经过一段时间后，该动物种群出现在点 D 处，观测人员从两个观测站分别测得 $\angle BAD=75^\circ$，$\angle ABD=45^\circ$．（注：点 A，B，C，D 在同一平面内）



（1）求 $\triangle ABD$ 的面积；

（2）求点 C，D 之间的距离．

20. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-a\sin x$．

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）当 $a=1$ 时，证明：函数 $y=f\left(x\right)-2$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上有且仅有一个零点；

（3）若对任意 $x\in\left[0,\pi\right]$，不等式 $f\left(x\right)\geq 2-\cos x$ 恒成立，求 a 的取值范围．

21. 对于一个 m 行 n 列的数表 $A_{m\times n}\left(m\geqslant 2,n\geqslant 3\right)$，用 $a_{i,j}$ 表示数表中第 i 行第 j 列的数，$a_{i,j}\in\left\{0,1\right\}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）．对于给定的正整数 t，若数表 $A_{m\times n}$ 满足以下两个条件，则称数表 $A_{m\times n}$ 具有性质 $p\left(t\right)$：

①$a_{1,j}=1$，$a_{m,j}=0\left(j=1,2,\cdots,n\right)$；

②$\left|a_{i,1}-a_{i+1,1}\right|+\left|a_{i,2}-a_{i+1,2}\right|+\cdots+\left|a_{i,n}-a_{i+1,n}\right|=t\left(i=1,2,\cdots,m-1\right)$．

（1）以下给出数表 1 和数表 2．

数表 1

1	1	1
0	1	0
0	0	0

数表 2

1	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
1	1	0	1

0	0	0	0

（i）数表 1 是否具有性质 $p(2)$？说明理由；

（ii）是否存在正整数 t，使得数表 2 具有性质 $p(t)$？若存在，直接写出 t 的值，若不存在，说明理由；

（2）是否存在数表 $A_{m\times 2023}$ 具有性质 $p(6)$？若存在，求出 m 的最小值，若不存在，说明理由；

（3）给定偶数 $n(n>3)$，对每一个 $t\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，将集合 $\{m|A_{m\times n}\text{具有性质}p(t)\}$ 中的最小元素记为 $f(t)$．求 $f(t)$ 的最大值．

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】B

【解析】

【分析】由补集定义可直接求得结果.

【详解】$\because U=(0,+\infty)$，$A=[2,3]$，$\therefore \complement_U A=(0,2)\cup(3,+\infty)$.

故选：B.

2. 【答案】A

【解析】

【分析】根据同底的指数函数和对数函数图象关于 $y=x$ 对称可确定结果.

【详解】由指数函数和对数函数性质可知：$y=\log_a x$ 与 $y=a^x$ 图象关于 $y=x$ 对称，

由选项中图象对称关系可知 A 正确.

故选：A.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】由图形可求得 $|\vec{a}|,|\vec{b}|,<\vec{a},\vec{b}>$，由向量数量积定义可求得结果.

【详解】由图形可知：$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=2$，$<\vec{a},\vec{b}>=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，

$$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos<\vec{a},\vec{b}>=4\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4.$$

故选：C.

4. 【答案】B

【解析】

【分析】根据等差数列的基本量运算可得 $a_1=b_1=-1$，然后利用等比数列的概念结合条件即得.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

则 $a_4=8=a_2+2d=2+2d$，

所以 $d=3$，

$\therefore a_2=b_2=2=a_1+3$，$a_1=b_1=-1$，

所以 $q=\frac{b_2}{b_1}=-2$.

故选：B.

5. 【答案】A

【解析】

【分析】由$|a|\geq a$可知 A 正确；通过反例可知 BCD 错误.

【详解】对于 A，$\because |a|\geq a$（当且仅当$a\geq 0$时取等号），$\therefore |a|>b$，A 正确；

对于 B，当$a=-1$，$b=-2$时，$a<|b|$，B 错误；

对于 C，当$a=-1$，$b=-2$时，$a^2=1$，$ab=2$，则$a^2<ab$，C 错误；

对于 D，当$a=1$，$b=-2$时，$ab=-2$，$b^2=4$，则$ab<b^2$，D 错误.

故选：A.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】根据对称关系可得$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，利用诱导公式可求得结果.

【详解】$\because y=x$的倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$，$\therefore \alpha$与β满足$\alpha+\beta=2\times\dfrac{\pi}{4}+2k\pi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathbf{Z}\right)$，

$\therefore \cos\beta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi-\alpha\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

故选：D.

7. 【答案】B

【解析】

【分析】根据函数平移和伸缩变换原则，依次验证选项中的函数变换后的解析式是否相同即可.

【详解】对于 A，$C_1:f\left(x\right)+1=\log_{\frac{1}{2}}x+1$，$C_2:f\left(2x\right)=\log_{\frac{1}{2}}2x=\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}2=\log_{\frac{1}{2}}x-1$，A 错误；

对于 B，$C_1:f\left(x\right)+1=\log_2 x+1$，$C_2:f\left(2x\right)=\log_2 2x=\log_2 x+\log_2 2=\log_2 x+1$，B 正确；

对于 C，$C_1:f\left(x\right)+1=2^x+1$，$C_2:f\left(2x\right)=2^{2x}=4^x$，C 错误；

对于 D，$C_1:f\left(x\right)+1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1$，$C_2:f\left(2x\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$，D 错误.

故选：B.

8. 【答案】C

【解析】

【分析】根据$a+b=0$可得$f\left(x\right)$，由奇偶性定义可知充分性成立；由$f\left(x\right)$为奇函数可知$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，由此可构造方程求得$a+b=0$，知必要性成立，由此可得结论.

【详解】当$a+b=0$时，$f\left(x\right)=ae^x-ae^{-x}$，$\therefore f\left(-x\right)=ae^{-x}-ae^x=-f\left(x\right)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 为奇函数，充分性成立；

当 $f\left(x\right)$ 为奇函数时，由 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ 得：$a\mathrm{e}^{-x}+b\mathrm{e}^{x}=-a\mathrm{e}^{x}-b\mathrm{e}^{-x}$，

$\therefore a=-b$，即 $a+b=0$，必要性成立；

$\therefore$ “$a+b=0$”是“$f\left(x\right)$为奇函数”的充分必要条件.

故选：C.

9. 【答案】A

【解析】

【分析】由题设及向量的线性关系知 $x+y\le 1$，且 $0\le x,y\le 1$，再应用基本不等式求最大值，注意取值条件.

【详解】由 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的一个动点，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，

所以 $x+y\le 1$，且 $0\le x,y\le 1$，

由 $xy\le \dfrac{(x+y)^2}{4}\le \dfrac{1}{4}$，当且仅当 $x=y=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立.

故选：A

10. 【答案】D

【解析】

【分析】根据变化规律可知每次去掉的线段长度成等比数列，利用等比数列求和公式可求得第 n 次后，去掉的线段长度总和为 $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，由 $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n>\dfrac{99}{100}$，结合对数运算可解不等式求得 $n>11.4$，由此可得结果.

【详解】第 1 次操作，去掉的线段长度为 $\dfrac{1}{3}$；第 2 次操作，去掉的线段长度为 $\dfrac{2}{9}$；第 3 次操作，去掉的线段长度为 $\dfrac{4}{27}$，依次类推，可知第 n 次操作去掉的线段长度为 $\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，

即每次去掉的线段长度成等比数列，

$\therefore$ 第 n 次后，去掉的线段长度总和为 $\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)}{1-\dfrac{2}{3}}=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，

由 $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n>\dfrac{99}{100}$ 得：$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<\dfrac{1}{100}$，

$\therefore n>\log_{\frac{2}{3}}\dfrac{1}{100}=-\dfrac{\lg 100}{\lg\dfrac{2}{3}}=-\dfrac{2}{\lg 2-\lg 3}\approx-\dfrac{2}{0.301-0.477}\approx 11.4$，

$\therefore n$ 的最小值为 12.

故选：D.

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 【答案】$\sqrt{5}$

【解析】

【分析】由共轭复数概念写出 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$，再求其模长.

【详解】由题设 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$，则 $|\bar{z}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$

12. 【答案】$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【解析】

【分析】

根据分母不为零、真数大于零列不等式组，解得结果.

【详解】由题意得，$\begin{cases}x-1\neq 0\\ x>0\end{cases}$

故答案为：$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

【点睛】本题考查函数定义域，考查基本分析求解能力，属基础题.

13. 【答案】0（答案不唯一，小于1的实数均可）

【解析】

【分析】由两向量同向可知 $\vec{b}=\lambda\vec{a}(\lambda>0)$，由此可构造方程组求得 $x=\lambda=\dfrac{2}{1-t}$，由 $\lambda>0$ 可求得满足题意的 t 的范围，进而得到结果.

【详解】$\because\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同，$\therefore\vec{b}=\lambda\vec{a}(\lambda>0)$，$\therefore\begin{cases}x=\lambda\\ tx+2=\lambda\end{cases}$，$\therefore x=\lambda=\dfrac{2}{1-t}$，

由 $\dfrac{2}{1-t}>0$ 得：$t<1$，

$\therefore$ 存在实数 $t=0$，$x=2$，使得 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 方向相同.

故答案为：0（答案不唯一，小于1的实数均可）.

14. 【答案】　①. 2　②. －1 或 1

【解析】

【分析】由题设 $g(x)=\cos 2(x+\varphi)$，由对称中心完全重合知两函数最小正周期相同即可确定 ω，进而求 $f(x)$ 的对称中心代入 $g(x)$ 求 φ，注意讨论参数，最后求出对应 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$.

【详解】由 $g(x)=\cos^2(x+\varphi)-\sin^2(x+\varphi)=\cos 2(x+\varphi)$，与 $f(x)$ 的对称中心完全重合，

所以两函数的最小正周期相同，故 $\omega=2$ ，则 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

令 $2x+\frac{\pi}{6}=k\pi$ 且 $k\in Z$，故 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$ 且 $k\in Z$，则对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0)$ 且 $k\in Z$，

所以 $\cos 2(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}+\varphi)=\cos(k\pi-\frac{\pi}{6}+2\varphi)=0$，故 $k\pi-\frac{\pi}{6}+2\varphi=k_1\pi+\frac{\pi}{2}$ 且 $k_1\in Z$ ，则

$\varphi=\frac{(k_1-k)\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$， $k_1-k\in Z$，

令 $k_1-k=0$，此时 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，所以 $g(x)=\cos 2(x+\frac{\pi}{3})$，故 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi=-1$；

令 $k_1-k=1$，此时 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$，所以 $g(x)=\cos 2(x+\frac{5\pi}{6})$，故 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2\pi=1$；

由余弦函数的周期性、对称性知： $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pm 1$.

故答案为：2，－1 或 1

15. 【答案】 ①. 2 ②. $(0,2)$

【解析】

【分析】①验证分段处函数值可知 $f(x)$ 为连续函数，由单调性可确定 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点，由此可得极值点个数；

②验证分段处函数值可知 $f(x)$ 为连续函数，根据一次函数和二次函数单调性可确定 $x=1$ 和 $x=\frac{a}{2}$ 必为 $f(x)$ 的两个极值点，得到 $\frac{a}{2}<1$；根据二次函数的单调性，结合极值点定义可知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，即 $a>0$；由此可得 a 的范围.

【详解】①当 $a=1$ 时， $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1,x\le 1\\ x,x>1\end{cases}$；

$\because f(1)=1$，$\therefore f\quad x$ 连续函数；

$\because f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right),(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极值点，即 $f(x)$ 的极值点个数为 2；

②$\because f(1)=a$，$\therefore f\quad x$ 为连续函数，

$\because f(x)=ax(x>1)$ 为单调函数，$\therefore f\quad x$ 在 $(1,+\infty)$ 上无极值点；

又 $f(x)=-x^2+ax+1$ 在 $(-\infty,1)$ 上至多有一个极值点，

$\therefore x=1$和$x=\dfrac{a}{2}$必为$f\left(x\right)$的两个极值点，$\therefore \dfrac{a}{2}<1$，解得：$a<2$，

又$f\left(x\right)$在$\left(\dfrac{a}{2},1\right)$上单调递减，$\therefore f\quad x$ 在$\left(1,+\infty\right)$上单调递增，$\therefore a>0$；

综上所述：实数a的取值范围为$\left(0,2\right)$.

故答案　：$\left(0,2\right)$.

【点睛】易错点睛：本题考查函数极值点的定义、根据极值点个数求解参数范围的问题；本题易错的点在于根据极值点个数求解参数范围时，确定$x=1$和$x=\dfrac{a}{2}$为$f\left(x\right)$的两个极值点后，忽略在极值点左右两侧函数单调性需发生改变，导致丢失$a>0$的范围.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 【答案】(1) $a_n=2n-1$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 利用等差数列求和公式和通项公式可求得公差d，进而得到a_n；

(2) 利用等比数列通项公式可得b_n，由$b_k=a_m$可得m与k之间关系；若选条件①，可知当k为偶数时，$m=0$，不合题意；若选条件②，可知$m\notin \mathbf{N}^*$，不合题意；若选条件③，可知$m=\dfrac{3^{k-1}+1}{2}$，并知$m\in \mathbf{N}^*$，由此可得结果.

【小问 1 详解】

设等差数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，

$\because S_5=\dfrac{5\left(a_1+a_5\right)}{2}=5a_3=25$，解得：$a_3=5$，$\therefore d=a_3-a_2=2$，

$\therefore a_n=a_2+\left(n-2\right)d=3+2\left(n-2\right)=2n-1$.

【小问 2 详解】

若选条件①，$b_n=\left(-1\right)^{n-1}$，$\therefore b_k=\left(-1\right)^{k-1}$，又$a_m=2m-1$，

由$b_k=a_m$得：$2m-1=\left(-1\right)^{k-1}$，$\therefore m=\dfrac{\left(-1\right)^{k-1}+1}{2}$；

当k为偶数时，$m=\dfrac{-1+1}{2}=0$，不符合$m\in \mathbf{N}^*$，则不能选择条件①；

若选条件②，$b_n=2^{n-1}$，$\therefore b_k=2^{k-1}$，又$a_m=2m-1$，

由$b_k=a_m$得：$2m-1=2^{k-1}$，$\therefore m=\dfrac{2^{k-1}+1}{2}$；

当 $k>1$ 且 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，$2^{k-1}+1$ 为奇数，则 $m\notin\mathbf{N}^*$，不合题意，则不能选择条件②；

若选条件③，$b_n=3^{n-1}$，$\therefore b_k=3^{k-1}$，又 $a_m=2m-1$，

由 $b_k=a_m$ 得：$2m-1=3^{k-1}$，$\therefore m=\dfrac{3^{k-1}+1}{2}$；

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，$3^{k-1}+1$ 为偶数，$\therefore m\in\mathbf{N}^*$，满足题意；

综上所述：$m=\dfrac{3^{k-1}+1}{2}$.

17. 【答案】（1）-1；　　（2）π；

（3）最大值为 $\sqrt{2}$，最小值为 -1.

【解析】

【分析】（1）自变量直接代入求值；

（2）应用倍角正余弦公式、辅助角公式化简函数式，由正弦型函数性质求最小正周期；

（3）利用正弦型函数性质求区间最值即可

【小问 1 详解】

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1=-1.$$

【小问 2 详解】

由题设 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.

【小问 3 详解】

因为 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{4}\le 2x+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{5\pi}{4}$，

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$；

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值为 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$.

18. 【答案】（1）单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$；单调递减区间为 $(0,2)$

（2）$[2,3]$

【解析】

【分析】（1）求导后，根据 $f'(x)$ 的正负即可确定 $f(x)$ 的单调区间；

（2）分别令 $f(x)=-\frac{4}{3}$， $f(x)=0$ 可求得 x 的临界值，分别在 $m\in(-1,2)$ 、 $m\in[2,3]$ 和 $m\in(3,+\infty)$ 的情况下，根据值域确定满足题意的范围.

【小问 1 详解】

由题意知： $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$， $f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$；当 $x\in(0,2)$ 时， $f'(x)<0$；

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(2,+\infty)$；单调递减区间为 $(0,2)$.

【小问 2 详解】

由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2=-\frac{4}{3}$ 得： $x^3-3x^2+4=(x+1)(x-2)^2=0$，

解得： $x=-1$ 或 $x=2$；

由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2=0$ 得： $x=0$ 或 $x=3$； $f(1)=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$；

①当 $m\in(-1,2)$ 时， $f(x)>f(2)=-\frac{4}{3}$，不合题意；

②当 $m\in[2,3]$ 时， $f(2)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$，即 $f(x)$ 值域为 $\left[-\frac{4}{3},0\right]$，满足题意；

③当 $m\in(3,+\infty)$ 时， $f(m)>f(3)=0$，不合题意；

综上所述：实数 m 的取值范围为 $[2,3]$.

19. 【答案】（1） $36+12\sqrt{3}\left(\mathrm{km}^2\right)$；

（2） $2\sqrt{15}\mathrm{km}$.

【解析】

【分析】（1）由正弦定理求得 AD 的长，利用三角形面积公式，即可求得答案；

（2）求出 AC 和 $\angle CAD$，由余弦定理即可求得答案.

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABD$ 中， $\angle BAD=75^\circ$， $\angle ABD=45^\circ$，所以 $\angle ADB=60^\circ$.

由正弦定理： $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，得 $\frac{AD}{\sin 45^\circ}=\frac{AB}{\sin 60^\circ}$，

所以 $AD=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}\cdot AB=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 12=4\sqrt{6}(\mathrm{km})$,

$\sin\angle BAD=\sin 75°=\sin\left(45°+30°\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，

所以$\triangle ABD$ 的面积为$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD=\frac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=36+12\sqrt{3}\left(\mathrm{km}^2\right)$.

【小问 2 详解】

由$\angle BAC=30°$，$\angle ABC=60°$，得$\angle CAD=45°$，且$\angle ACB=90°$，

$\therefore AC=12\cos 30^\circ=6\sqrt{3}$.

在$\triangle ACD$ 中由余弦定理，得

$$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cdot\cos\angle CAD=36\times 3+16\times 6-2\times 6\sqrt{3}\times 4\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=60,$$

所以$CD=2\sqrt{15}\left(\mathrm{km}\right)$.

即点 C，D 之间的距离为$2\sqrt{15}\mathrm{km}$.

20. 【答案】（1）$x+y-1=0$；

（2）证明见解析；　　（3）$\left(-\infty,1\right]$.

【解析】

【分析】（1）根据导数几何意义可求得切线斜率 $f'\left(0\right)$，结合 $f\left(0\right)=1$可得切线方程；

（2）令$g\left(x\right)=f\left(x\right)-2$，求导后可知$g'\left(x\right)>0$，由此确定$g\left(x\right)$在$\left(0,\pi\right)$上单调递增，结合零点存在定理可得结论；

（3）$h\left(x\right)=f\left(x\right)-2+\cos x$，将问题转化为$h\left(x\right)\geq 0$恒成立；求导后，分析可知当$a\geq 0$时，$h'(x)$单调递增；当$a>1$时，利用零点存在定理可说明$h\left(x\right)$在$\left(0,x_0\right)$上单调递减，由此可得$h(x)<h(0)=0$，知不合题意；当$a=1$时，可得$h'\left(x\right)>h'\left(0\right)=0$，知$h\left(x\right)$单调递增，满足题意；当$a<1$时，采用放缩法得$h\left(x\right)>\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x-2$，结合$a=1$时的结论可知其满足题意；综合三种情况可得结果.

【小问 1 详解】

当$a=2$时，$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2\sin x$，则 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2\cos x$，

$\therefore f'\left(0\right)=1-2=-1$，又 $f\left(0\right)=1$，

$\therefore f\ \ x$ 在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程为：$y=-x+1$，即$x+y-1=0$.

【小问 2 详解】

当$a=1$时，令$g\left(x\right)=f\left(x\right)-2=\mathrm{e}^x-\sin x-2$，则$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\cos x$；

当$x\in\left(0,\pi\right)$时，$\mathrm{e}^x>\mathrm{e}^0=1$，$\cos x<1$，即$g'\left(x\right)>0$，

$\therefore g(x)$　$\left(0,\pi\right)$上单调递增，又$g\left(0\right)=1-2=-1<0$，$g\left(\pi\right)=\mathrm{e}^\pi-2>0$，

$\therefore g(x)$在$(0,\pi)$上有唯一零点，即 $f(x)-2$在$(0,\pi)$上有且仅有一个零点.

【小问 3 详解】

令$h(x)=f(x)-2+\cos x=\mathrm{e}^x-a\sin x+\cos x-2$，

则对任意$x\in[0,\pi]$，$h(x)\ge 0$恒成立；又$h'(x)=\mathrm{e}^x-a\cos x-\sin x$，

令$t(x)=h'(x)$，则$t'(x)=\mathrm{e}^x+a\sin x-\cos x$；

当$a\ge 0$时，若$x\in[0,\pi]$，则$\mathrm{e}^x\ge \mathrm{e}^0=1$，$\cos x\le 1$，$\sin x\ge 0$，

$\therefore t'(x)\ge 0$在$[0,\pi]$上恒成立，则$h'(x)$在$[0,\pi]$上单调递增；

①当$a>1$时，$h'(0)=1-a<0$，$h'(\pi)=\mathrm{e}^\pi+a>0$，

$\therefore \exists x_0\in(0,\pi)$，使得$h'(x_0)=0$，且当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，此时$h(x)<h(0)=0$，不合题意；

②当$a=1$时，$h(x)=\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x-2$；

当$x\in(0,\pi)$时，$h'(x)>h'(0)=0$，则$h(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，

$\therefore h(x)\ge h(0)=0$恒成立，满足题意；

③当$a<1$时，$h(x)=\mathrm{e}^x-a\sin x+\cos x-2>\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x-2$，

由②知：对任意$x\in[0,\pi]$，$h(x)>\mathrm{e}^x-\sin x+\cos x-2\ge 0$，满足题意；

综上所述：实数a的取值范围为$(-\infty,1]$.

【点睛】关键点点睛：利用导数几何意义求解切线方程、函数零点个数问题、恒成立问题的求解；本题求解恒成立问题的关键是能够通过构造函数的方式，将问题转化为含参数函数单调性的讨论问题，进而由单调性和函数最值确定满足题意的参数范围.

21.【答案】(1)（i）数表 1 不具有性质$p(2)$，理由见解析；（ii）存在．$t=3$.

（2）不存在，理由见解析

（3）$n+1$.

【解析】

【分析】(1) 根据数表$A_{m\times n}$具有性质$p(t)$的定义，可判断（i）中数表 1 不具有性质$p(2)$，（ii）中数表当$t=3$时满足条件，即得答案；

（2）假设存在 m 使得数表$A_{m\times 2023}$具有性质$p(6)$，根据题意可推出任意两行中，1 的个数的奇偶性相同，与数表$A_{m\times 2023}$第一行有 2023 个 1，最后一行有 0 个 1 矛盾，可得结论；

（3)定义$m-1$行 n 列的数表$B_{(m-1)\times n}$，满足设定的条件其第 i 行第 j 列为$b_{i,j}=\left|a_{i,j}-a_{i+1,j}\right|$，$i=1,2,\cdots,m-1$

（$j=1,2,\cdots,n$），在其条件下先证明 $f(t)\leqslant n+1$，再证 $t=n-1$ 时，$f(t)\geqslant n+1$，综合可得，$f(n-1)=n+1$，从而得 $f(t)$ 的最大值的为 $n+1$.

【小问 1 详解】

（i）数表 1 不具有性质 $p(2)$.

理由：$|a_{2,1}-a_{3,1}|+|a_{2,2}-a_{3,2}|+|a_{2,3}-a_{3,3}|=1\neq 2$.

（ii）存在.

由图表可知 $|a_{i,1}-a_{i+1,1}|+|a_{i,2}-a_{i+1,2}|+\cdots+|a_{i,4}-a_{i+1,4}|=3(i=1,2,3,4)$，

故 $t=3$ 时，数表 2 具有性质 $p(t)$.

【小问 2 详解】

不存在数表 $A_{m\times 2023}$ 具有性质 $p(6)$.

假设存在 m 使得数表 $A_{m\times 2023}$ 具有性质 $p(6)$，

则 $|a_{i,1}-a_{i+1,1}|+|a_{i,2}-a_{i+1,2}|+\cdots+|a_{i,n}-a_{i+1,n}|=6(i=1,2,\cdots,m-1)$.

即在这两行中，有 6 列的数不同，设其中有 k 列是第 i 行的数为 1，第 $i+1$ 行的数为 0，

则有 $6-k$ 列是第 i 行的数为 0，第 $i+1$ 行的数为 1，

所以，从第 i 行到第 $i+1$ 行，一共增加了 $6-2k$ 个 1，1 的个数的奇偶性不变.

所以，任意两行中，1 的个数的奇偶性相同，

与数表 $A_{m\times 2023}$ 第一行有 2023 个 1，最后一行有 0 个 1 矛盾，

所以，不存在具有性质 $p(6)$ 的数表 $A_{m\times 2023}$.

【小问 3 详解】

$f(t)$ 的最大值的为 $n+1$.

定义 $m-1$ 行 n 列的数表 $B_{(m-1)\times n}$：

其第 i 行第 j 列为 $b_{i,j}=|a_{i,j}-a_{i+1,j}|$，$i=1,2,\cdots,m-1$（$j=1,2,\cdots,n$），

则 $b_{i,j}\in\{0,1\}$，且 $b_{i,j}=0$ 表示 $a_{i,j}$，$a_{i+1,j}$ 两数相同，$b_{i,j}=1$ 表示 $a_{i,j}$，$a_{i+1,j}$ 两数不同.

因为数表 $A_{m\times n}$ 的第 1 行确定，所以给定数表 $B_{(m-1)\times n}$ 后，数表 $A_{m\times n}$ 唯一确定.

①先证 $f(t)\leqslant n+1$.

按照如下方式，构造数表 $B_{n\times n}$：对于第 $2s-1$ 行和第 $2s$ 行，$s=1,2,\cdots,\dfrac{n}{2}$，

令 $b_{2s-1,2s-1}=1$，$b_{2s-1,2s}=0$，$b_{2s,2s-1}=0$，$b_{2s,2s}=1$，

且在这两行其余的 $n-2$ 列中，任选相同的 $t-1$ 列都为 1，其他列都为 0，

于是可得到具有性质 $p(t)$ 的数表 $A_{(n+1)\times n}$ 如下：

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列		第 $n-1$ 列	第 n 列
第 1 行	1	1	1	1	…	1	1
…							
第 3 行	0	0	1	1	…	1	1
…							
第 5 行	0	0	0	0	…	1	1
…							
第 $n+1$ 行	0	0	0	0	…	0	0

即对于每个 $t\in\{2,3,\cdots,n-1\}$，当 $m=n+1$ 时，都存在数表 $A_{m\times n}$ 具有性质 $p(t)$.

所以 $f(t)\leqslant n+1$.

②再证 $t=n-1$ 时，$f(t)\geqslant n+1$.

记 $S_i=a_{i,1}+a_{i,2}+\cdots+a_{i,n}$（$i=1,2,\cdots,m$）.

因为 $t=n-1$ 是奇数，所以 S_i 与 S_{i+1} 的奇偶性不相同（$i=1,2,\cdots,m-1$）.

因为 $S_1=n$，$S_m=0$，所以 m 是奇数.

考虑 $B_{(m-1)\times n}$ 的第 i 行和 $i+1$ 行，

因为 $t=n-1$，所以这两行中都有 $\mathrm{n}-1$ 列为 1，1 列为 0.

若这两行相同，则数表 $A_{m\times n}$ 的第 i 行和第 $i+2$ 行相同，$S_i=S_{i+2}$.

若这两行不同，设其分别在第 p，q 列为 $0(p\neq q)$，则数表 $A_{m\times n}$ 的第 i 行和第 $i+2$ 行只在第 p，q 列上不同，其他列都相同，$|S_i-S_{i+2}|\leqslant 2$.

因为 $S_1=n$，$S_m=0$，其中 n 是偶数.

所以 $n=|S_m-S_1|=|S_m-S_{m-2}+S_{m-2}-S_{m-4}+\cdots+S_3-S_1|\leqslant\frac{m-1}{2}\times 2$，

所以 $m\geq n+1$，即 $f(n-1)\geqslant n+1$.

结合①，$f(n-1)=n+1$.

综上所述，$f(t)$ 的最大值为 $n+1$.

【点睛】本题考查了关于数表新定义的问题，涉及到归纳推理的思想方法，对学生的思维能力要求较高，综合性强，能很好地考查学生的综合素养，解答的关键是要理解新定义，根据其定义解决问题.