2020年10月人大附中中考模拟几何压轴题解析

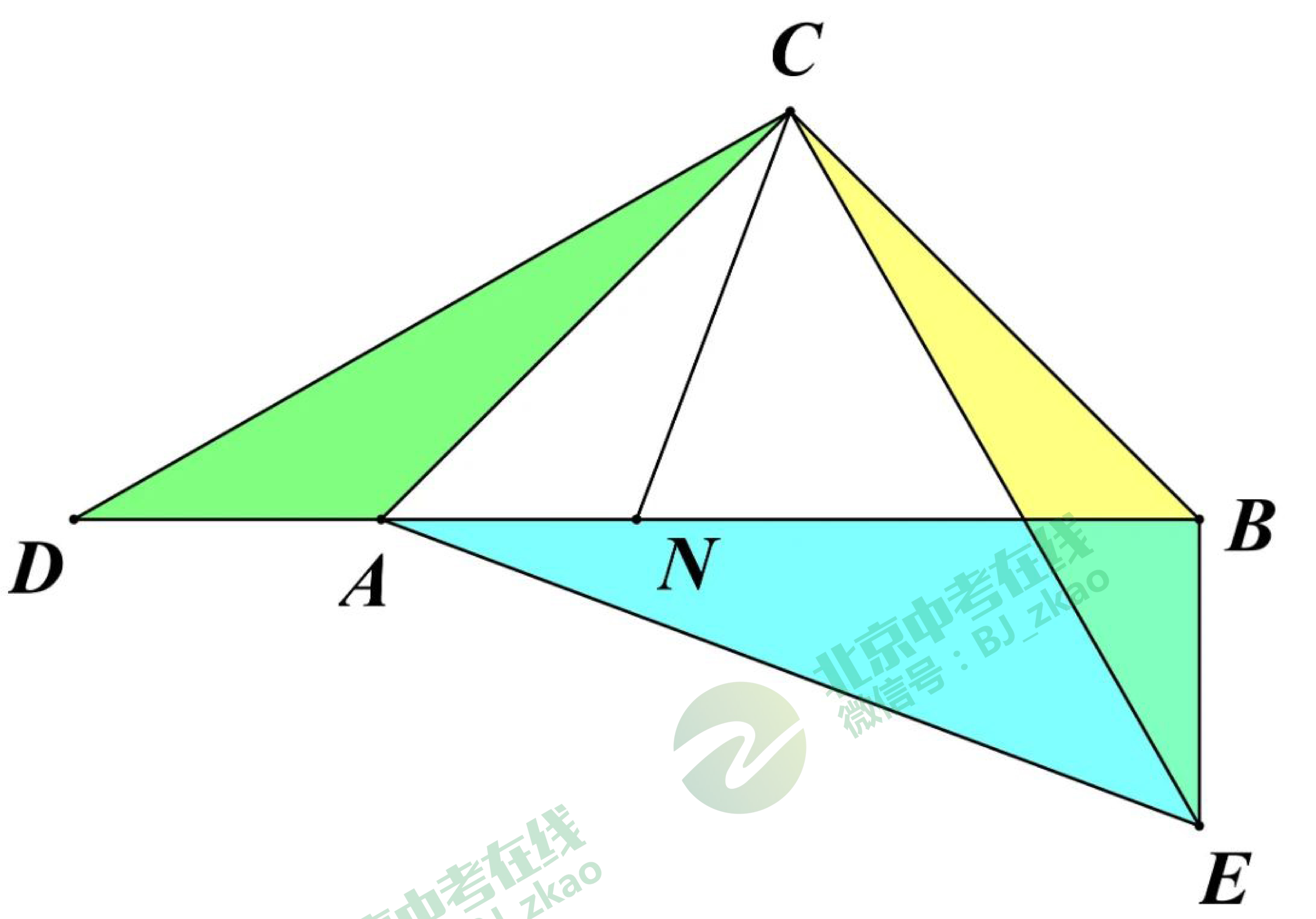
【题目】

如图，△ABC 中，∠ACB=90°，AC=BC，点 D 在 BA 的延长线上，连接 CD，以 C 为中心，将线段 CD 逆时针旋转 90°，得到线段 CE，连接 AE、BE.

（1）①依题意补全图形；

②求证：$AB^2+AD^2=AE^2$；

（2）取 BD 的中点 N，连接 CN，用等式表示线段 AE 与 CN 的数量关系，并证明.



【读题】

本题是等腰直角三角形背景的几何综合题，题干中的关键词是“中点”，因此，在读题过程中就要迅速检索自己总结的关于中点的几何模型，以及等腰直角三角形背景下的相关的题目类型。

【分析】

（1）比较简单，下面重点分析（2）。

几何直观可得 2CN=AE，下面采取不同的方法进行证明。

思路一：构造 CN 的两倍——倍长中线

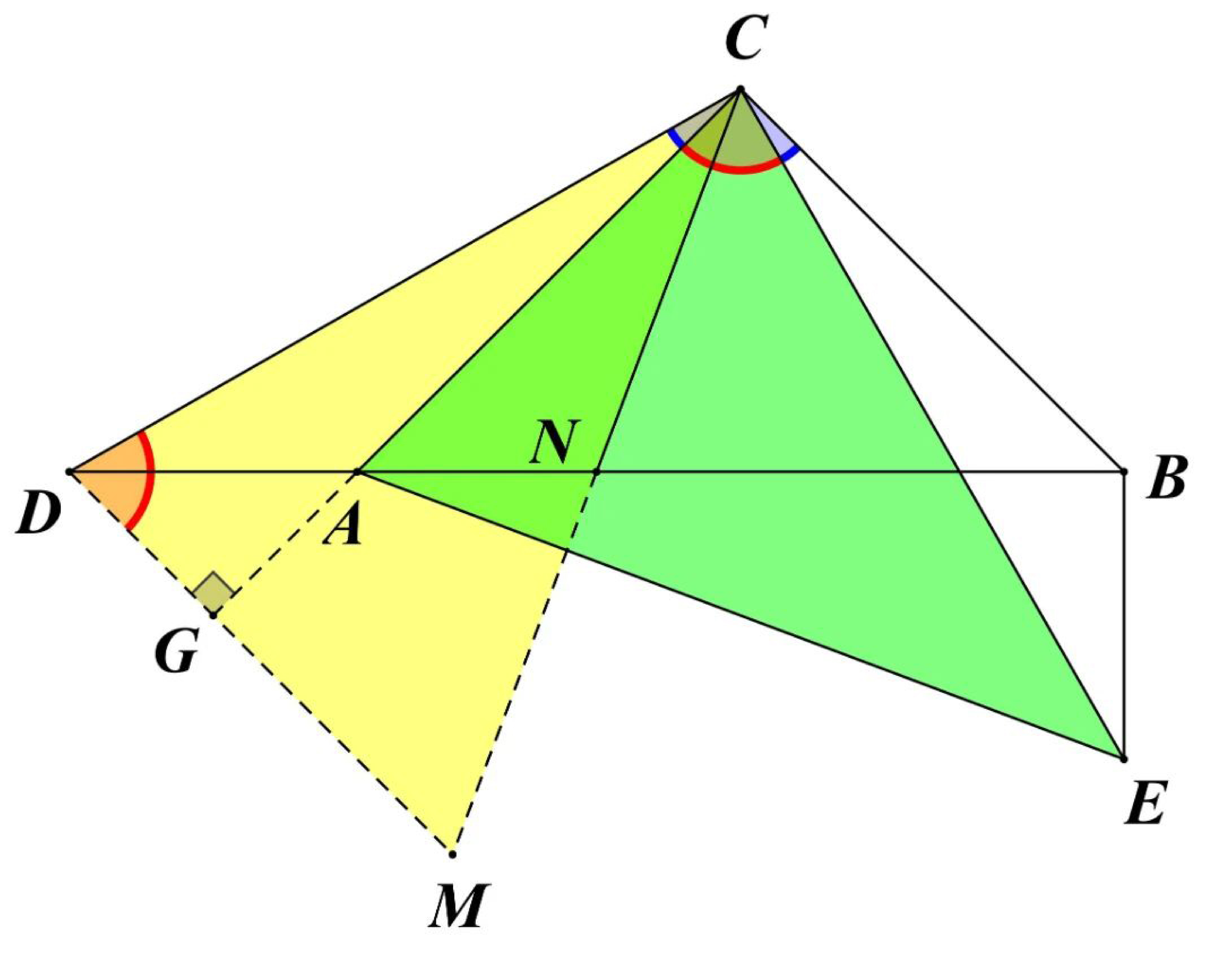
方法一：

如下图所示，延长 CN 至点 M，使得 MN=CN，

可证△CDM≌△ECA（SAS），

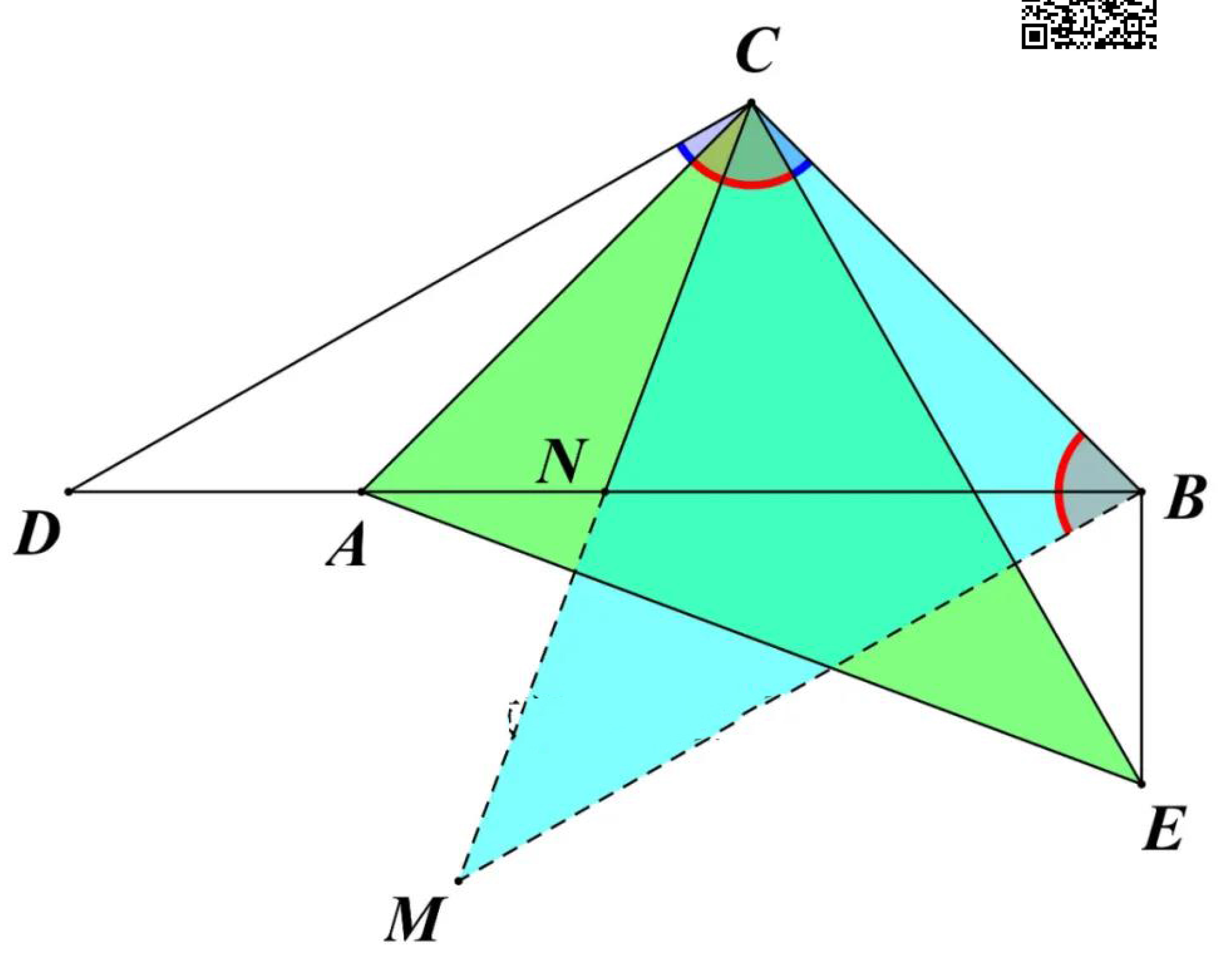
其中∠CDM=∠ECA 是一个难点，

这两个角是等角∠DCG 和∠BCE 的余角。



方法二：

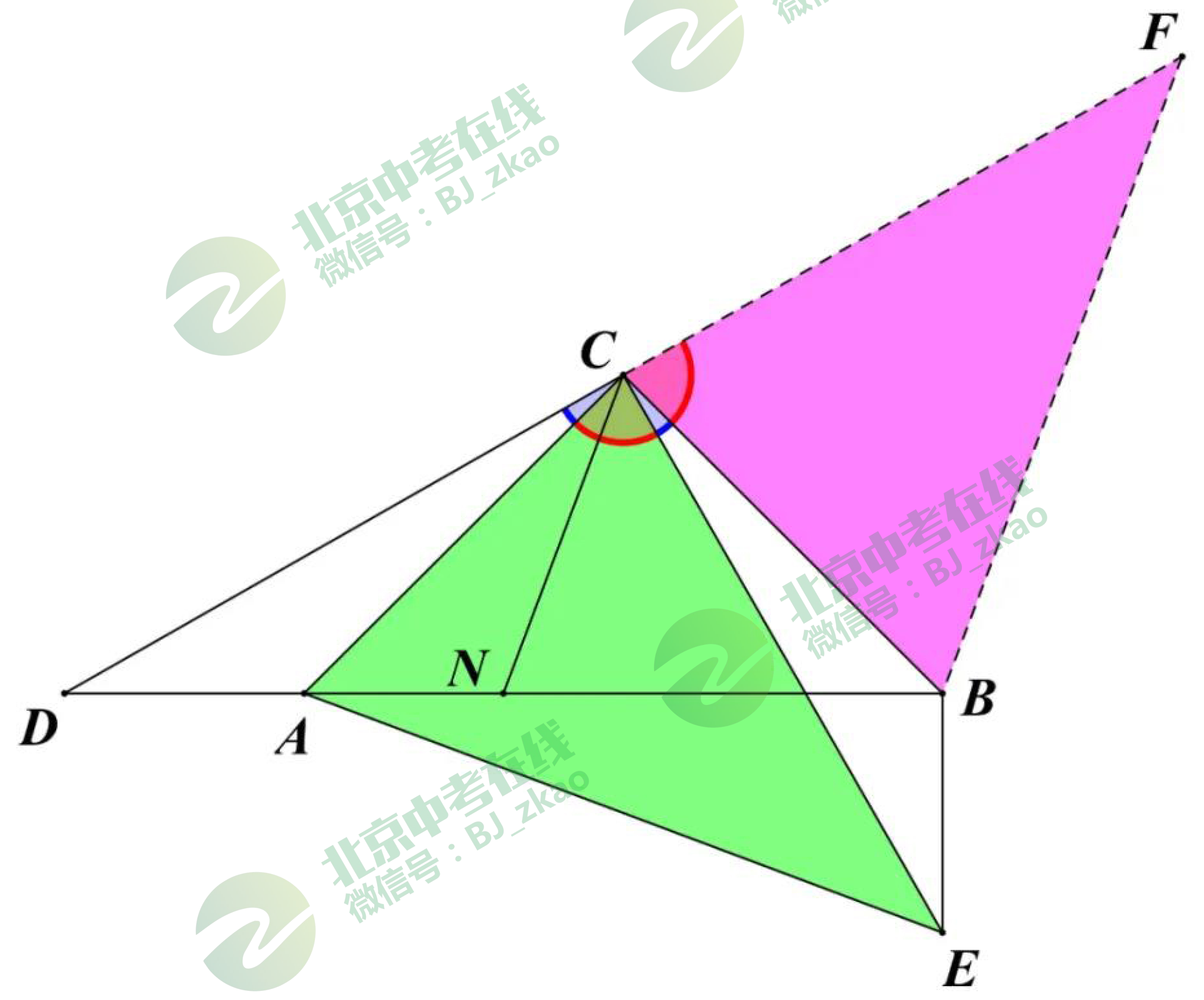
如下图所示，延长 CN 至点 M，使得 MN=CN，证△ MBC≌△ECA（SAS），也可证得结论成立。



思路二：构造 CN 的两倍——中位线

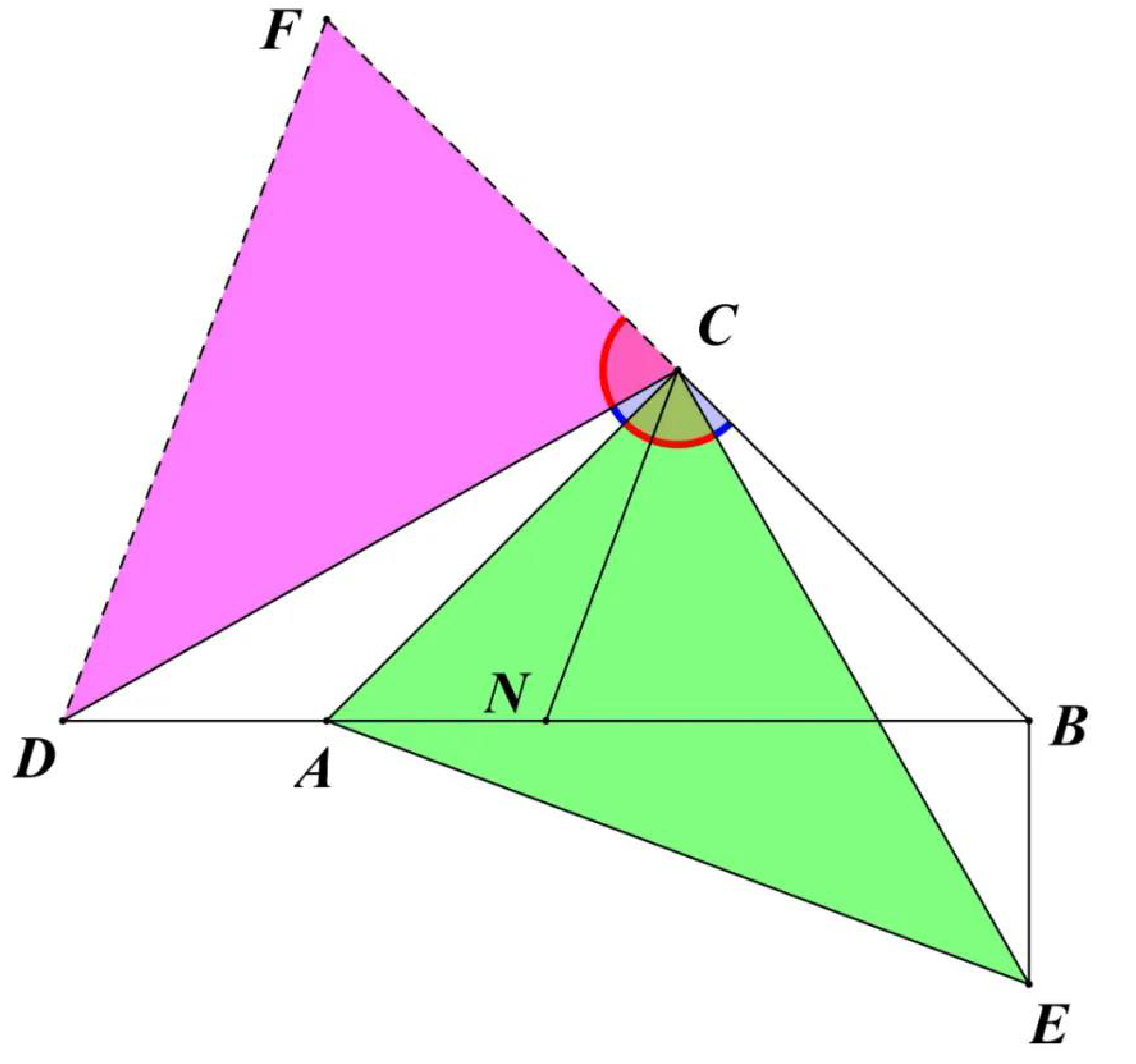
方法三：

如下图，延长 DC 至点 F，使得 CF=CD，则 BF=2CN，下面证 BF=AE 即可。可证△CBF≌△CAE（SAS），这里证明∠BCF=∠ACE 难度较小。



方法四：

如下图，延长 BC 至点 E，使得 CF=BC，则 FD=2CN，下面证 FD=AE 即可。可证△CFD≌△CAE（SAS），这里证明∠FCD=∠ACE 也比较容易。



思路三：构造 AE 的一半——取 AE 的中点

取 AE 的中点 F，证明 AF=CN 或 EF=CN，为此可得两种不同的方法。

方法五：证明 AF=CN

取 AB 的中点 H，连接 CH，FH。证明 AF=CN 即可。

为此构造全等的三角形，即证△CNH≌△AFH（SAS），

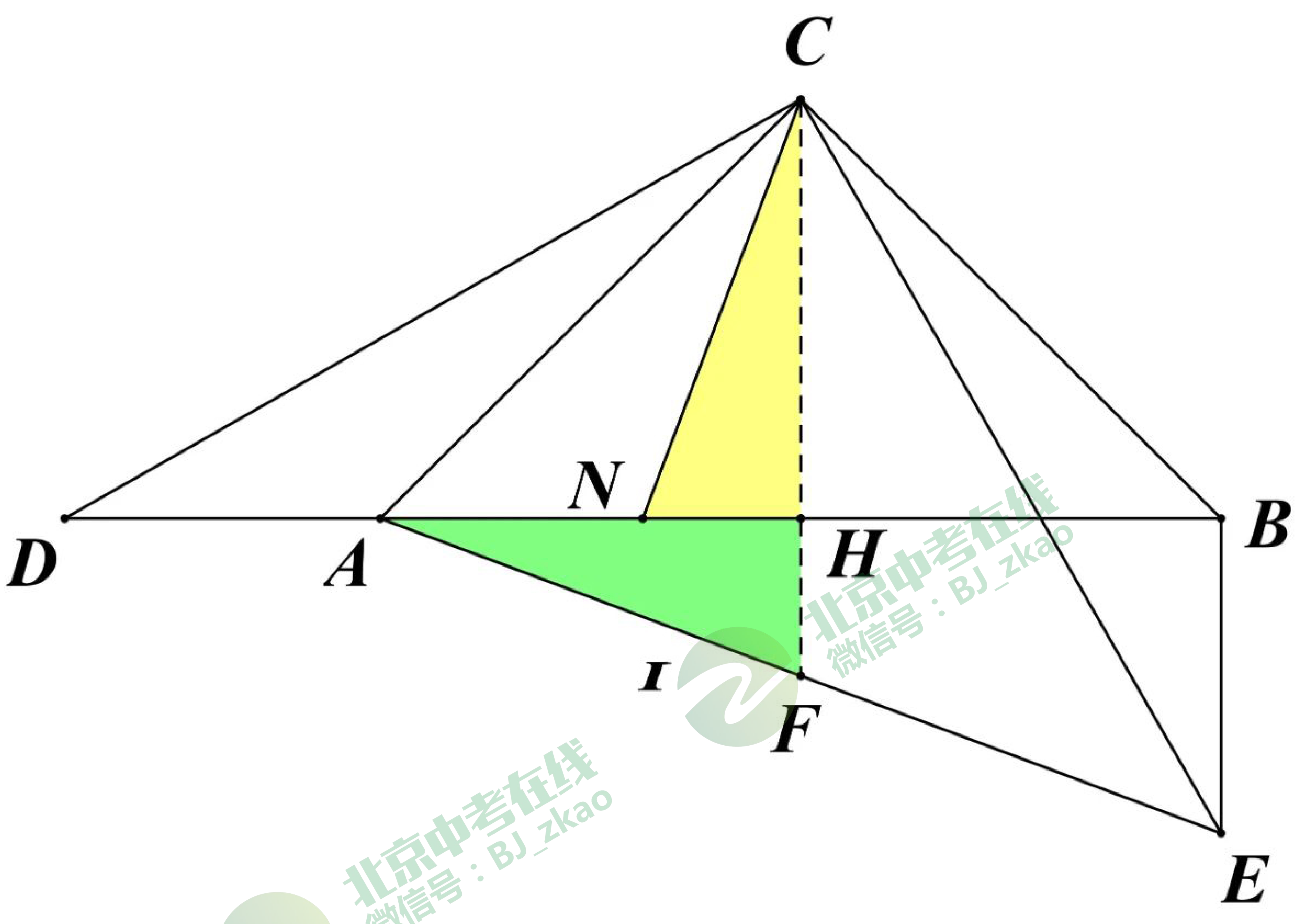
这里的难点是证明 NH=FH，

又 BE=2FH，AD=BE，可证 AD=2NH。

设 NH=a，BH=b，则 AN=a-b，BN=AN=a+b，

于是可得 AD=DN-AN=BN-AN=2a，

即得 AD=2NH，则 NH=FH。

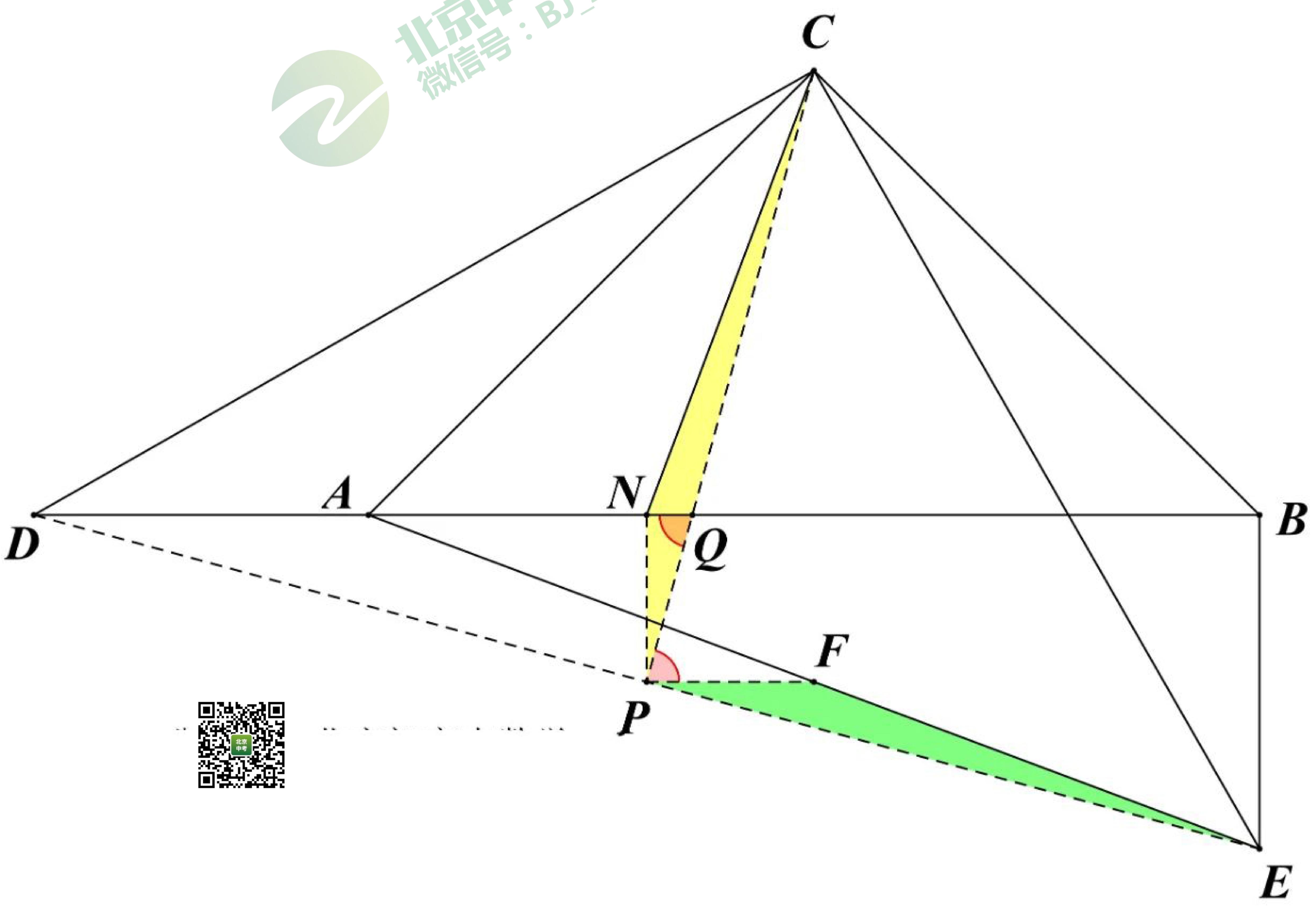


方法六：证明 EF=CN

连接 DE，取 DE 中点 P，连接 PF，PN，证明△CNP≌△EFP（SAS），

这里证明∠NPC=∠FPE 是一个难点，

这两个角分别是等角∠PQN 和∠CPF 的余角。



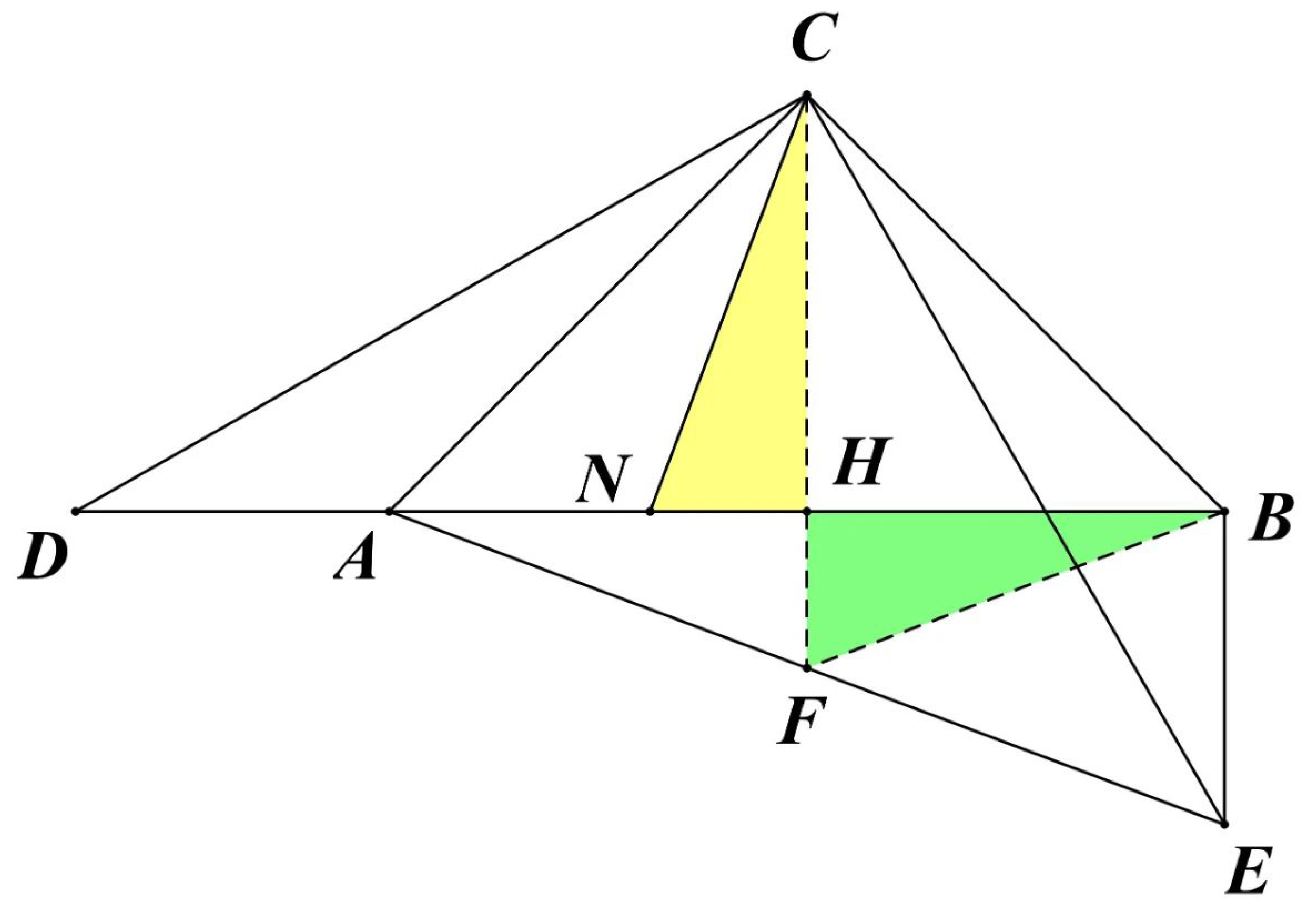
思路四：构造 AE 的一半——直角三角形斜边中线

考虑到 AE 为 Rt△ABE 的斜边，为此，取 AE 的中点 F，

则 BF 为 Rt△斜边中线。

方法七：证明 BF=CN

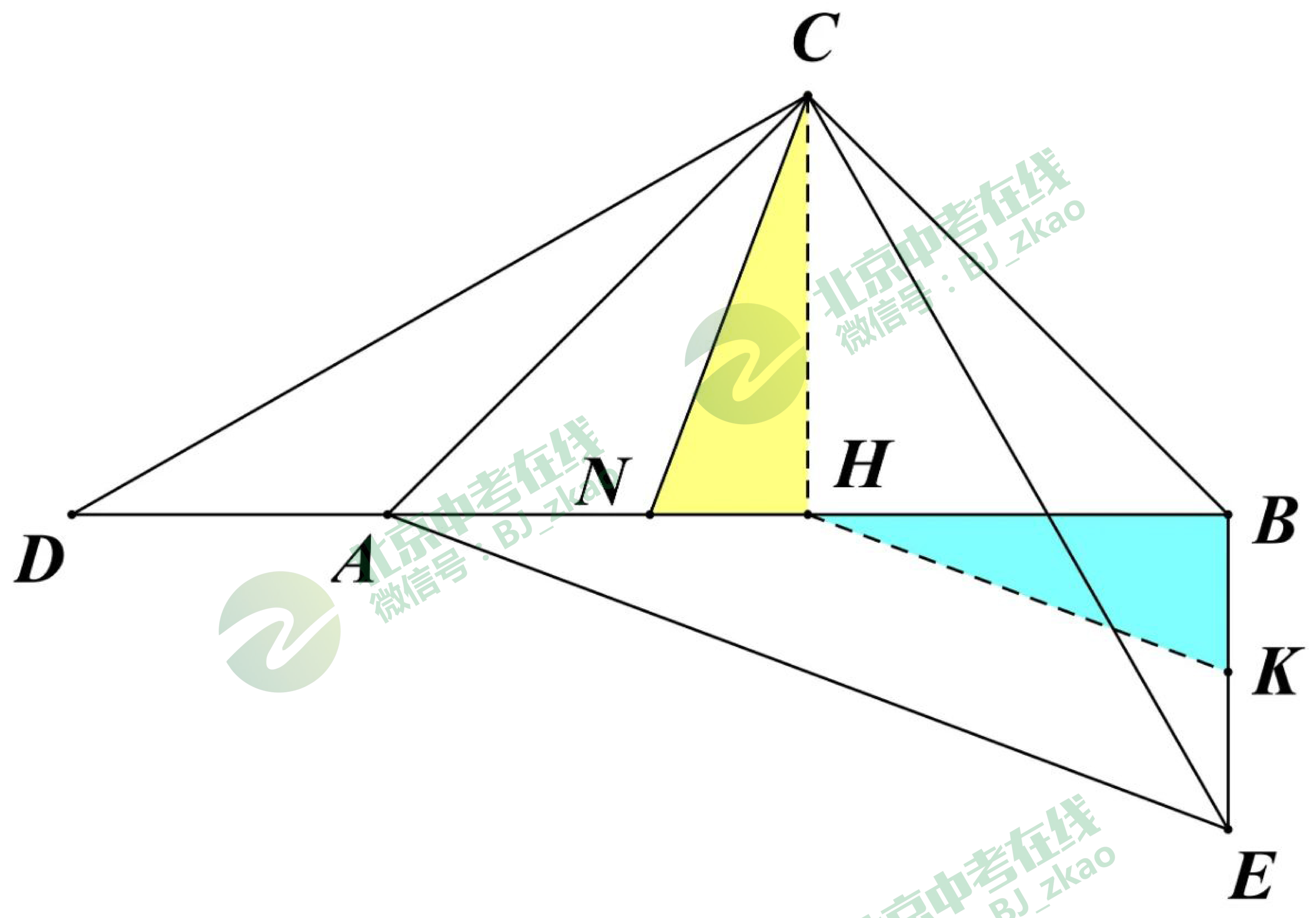
如下图所示，证明△CNH≌△BFH，与前法类似，从略。



思路五：构造 AE 的一半——中位线

方法八：

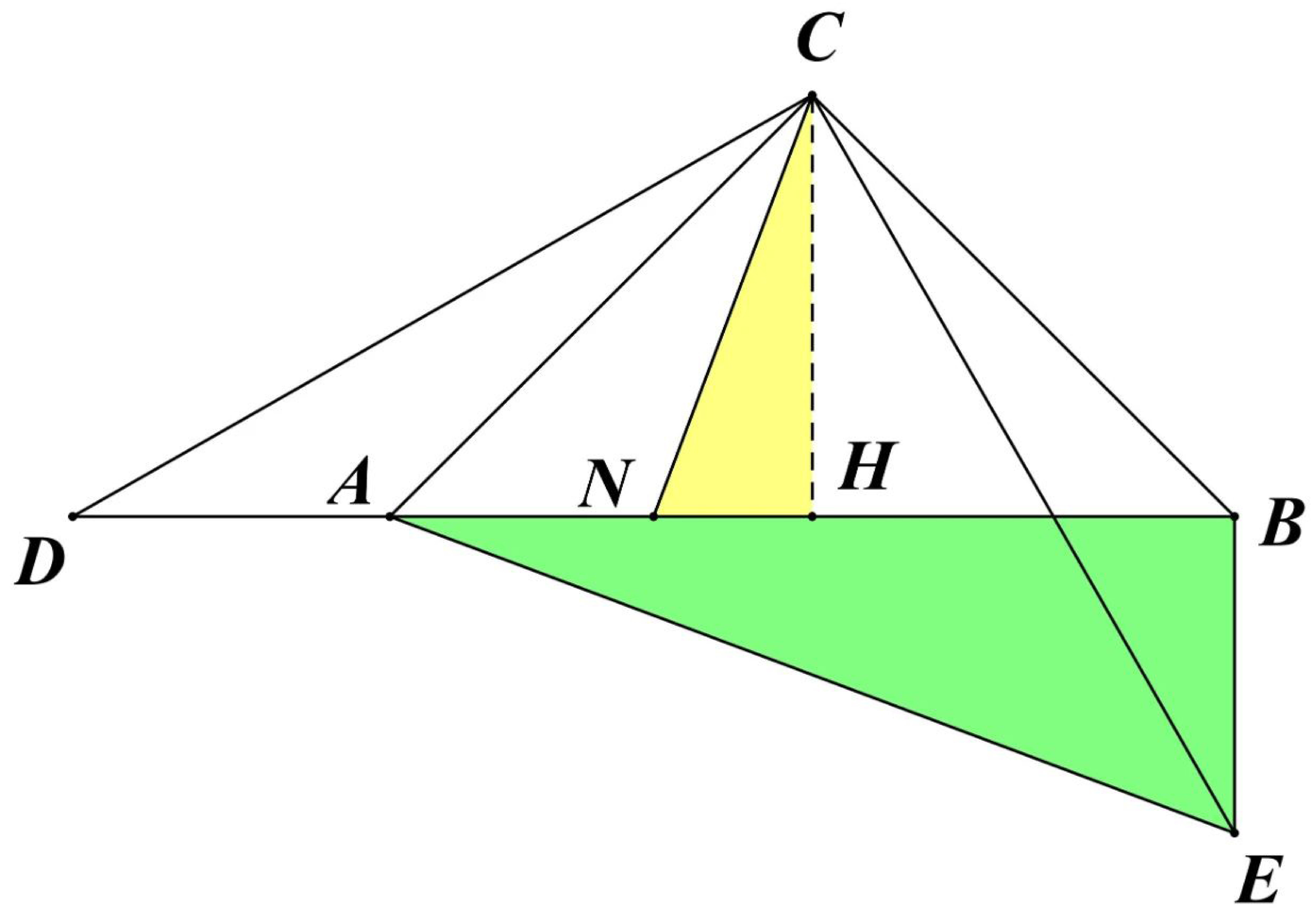
如下图所示，取 BE 的中点 K，连接 HK，可证△CNH≌△HKB（SAS）。



思路六：相似

方法九：

如下图所示，取 AB 中点 H，可证△CNH∽△AEB。



除此之外，本题还可以采用计算的方法进行。

方法十：计算

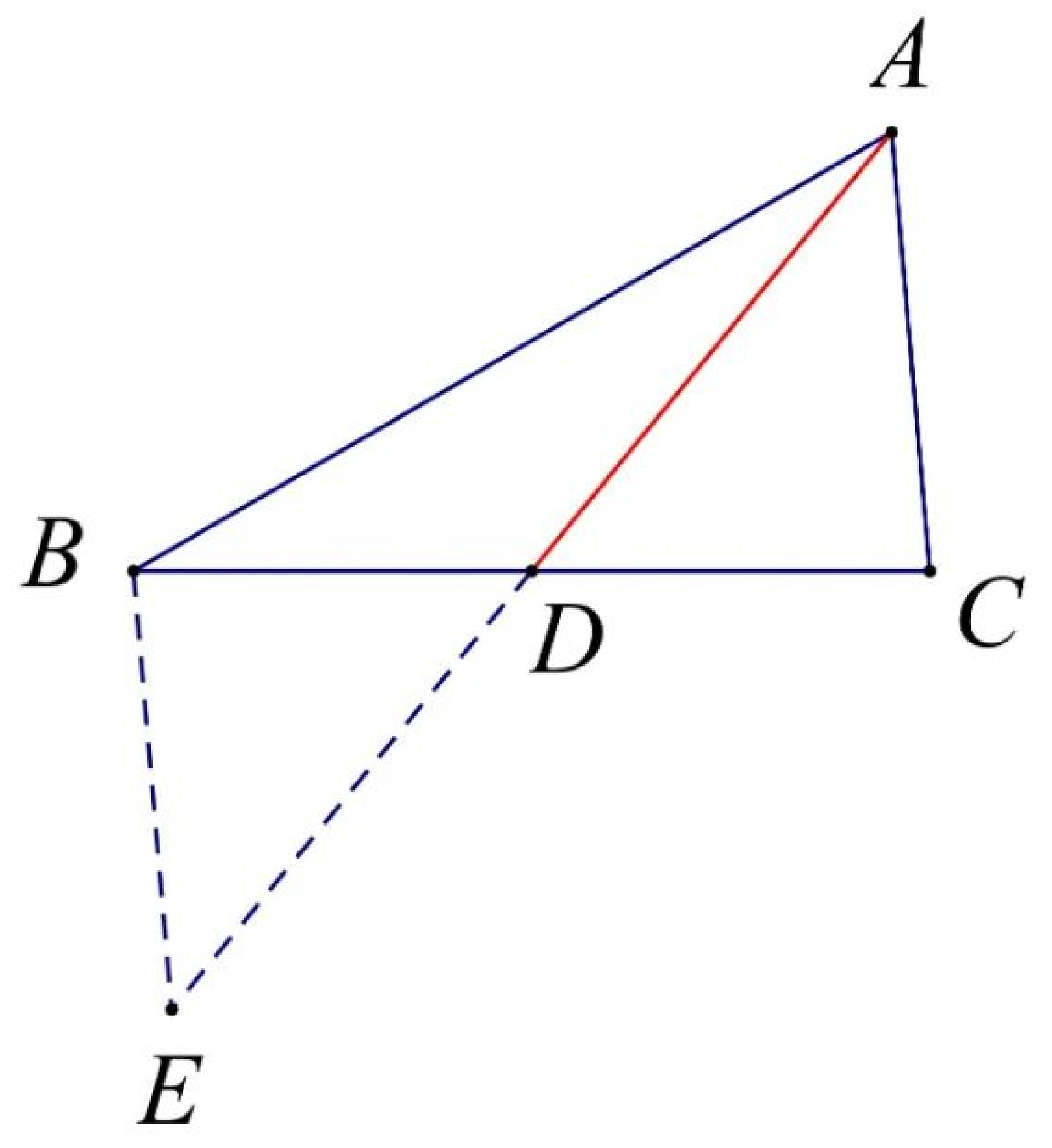
设 NH=a，BH=b，则 AN=a-b，BN=AN=a+b，

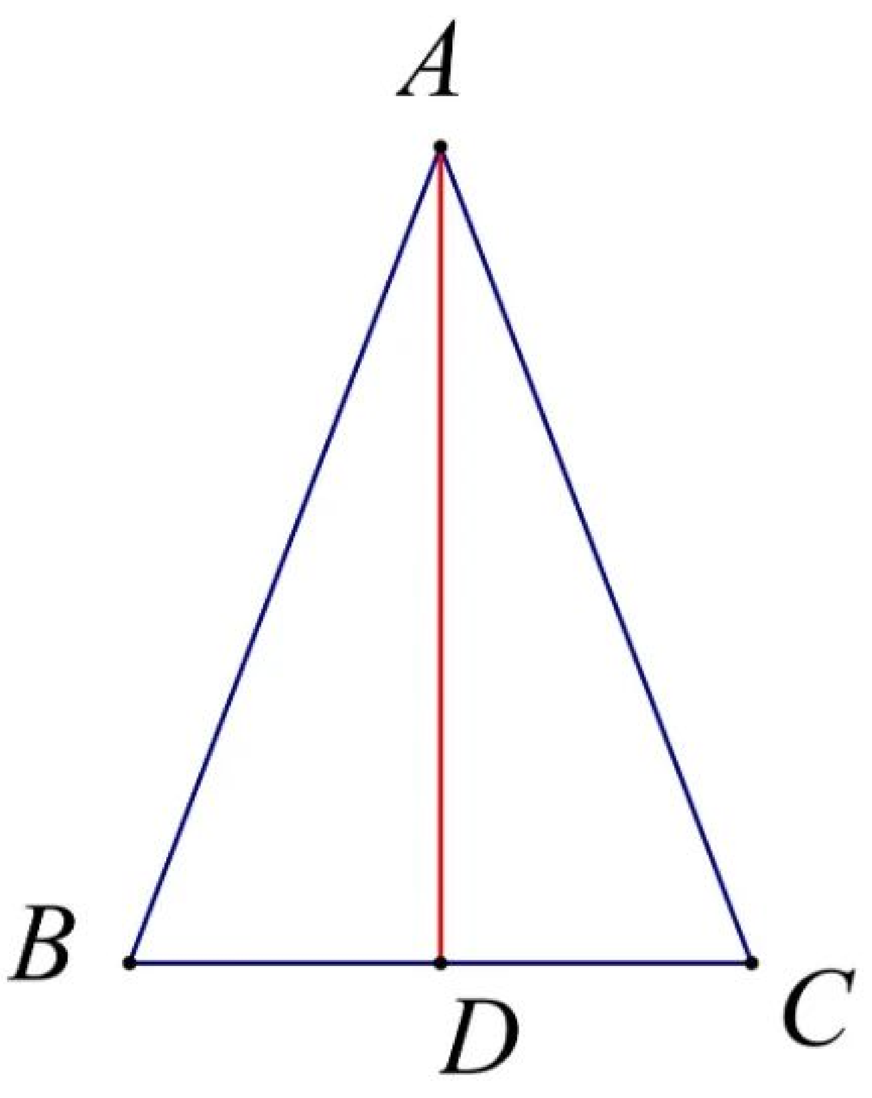
于是可得 AD=DN-AN=BN-AN=2a，BE=AD=2a，

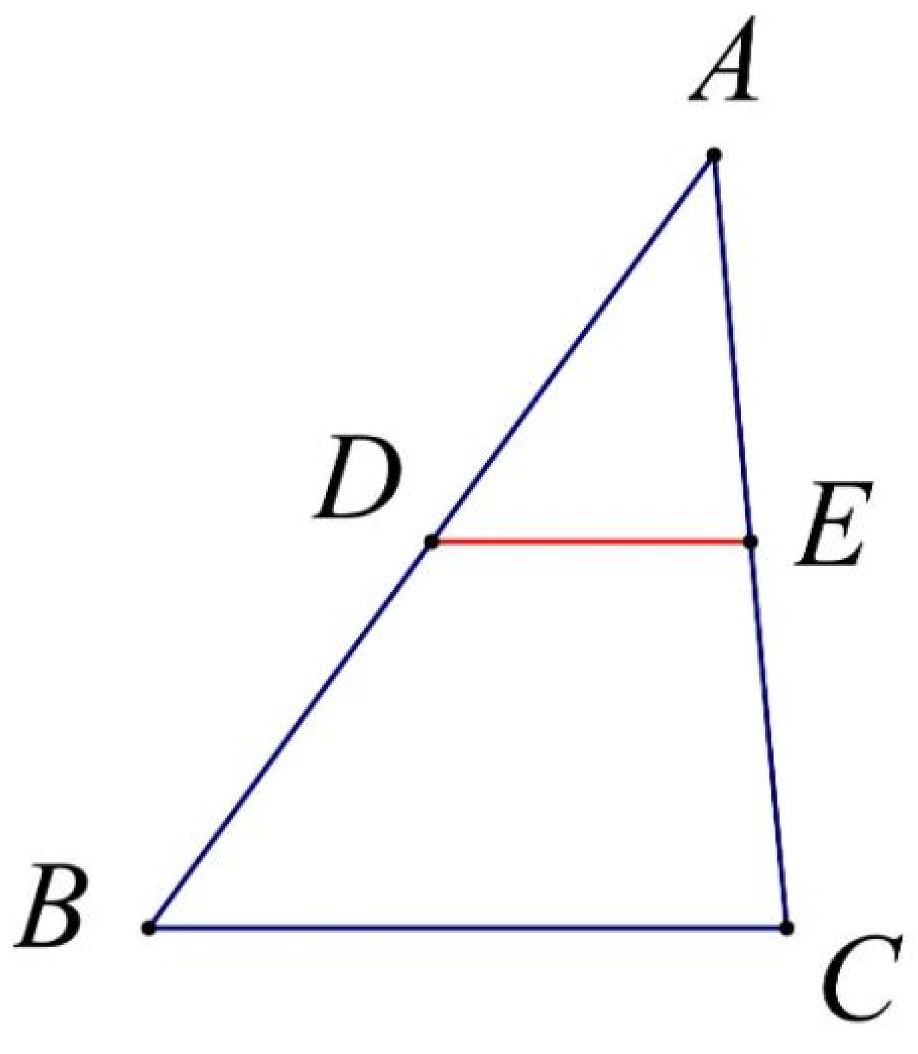
结合勾股定理可得结论成立。

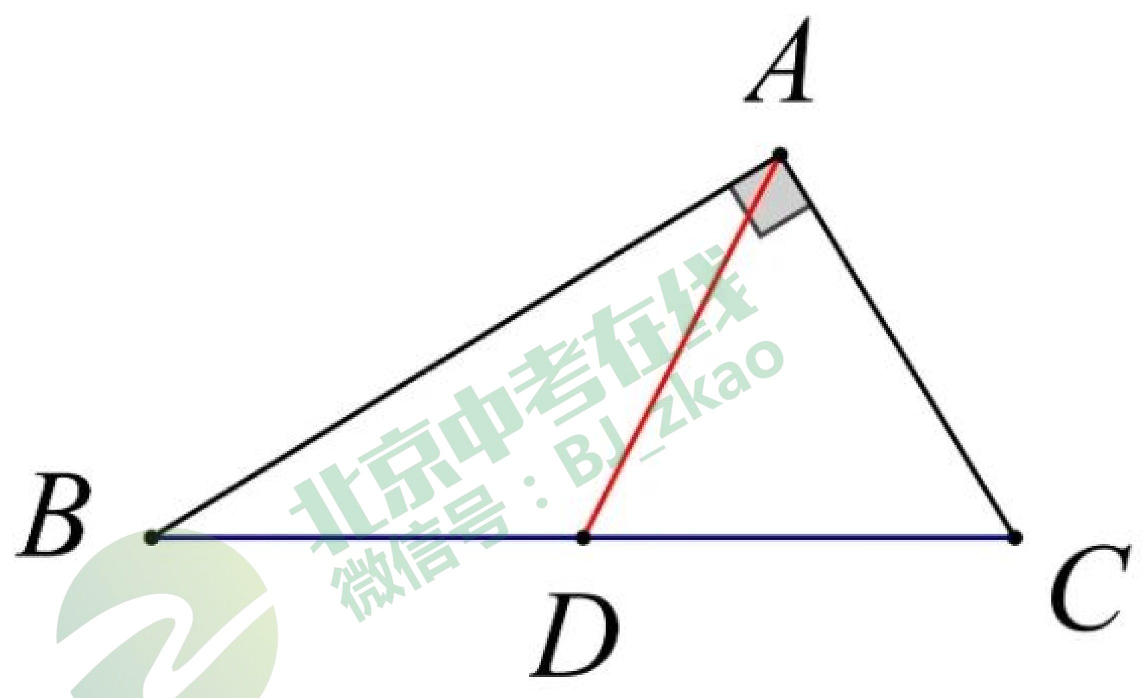
【反思】

1. 总结与中点相关的核心模型如下图所示，一般来讲，涉及到中点的题目，在构造辅助图形时，基本上都是下列图形的构造与应用。









2. 线段二倍关系的证明，总的来讲，需要构造短边的两倍，或者取长边的一半，为此可以采取不同的思路，上面的各种方法基本上都是在这两种大的思路下展开的。

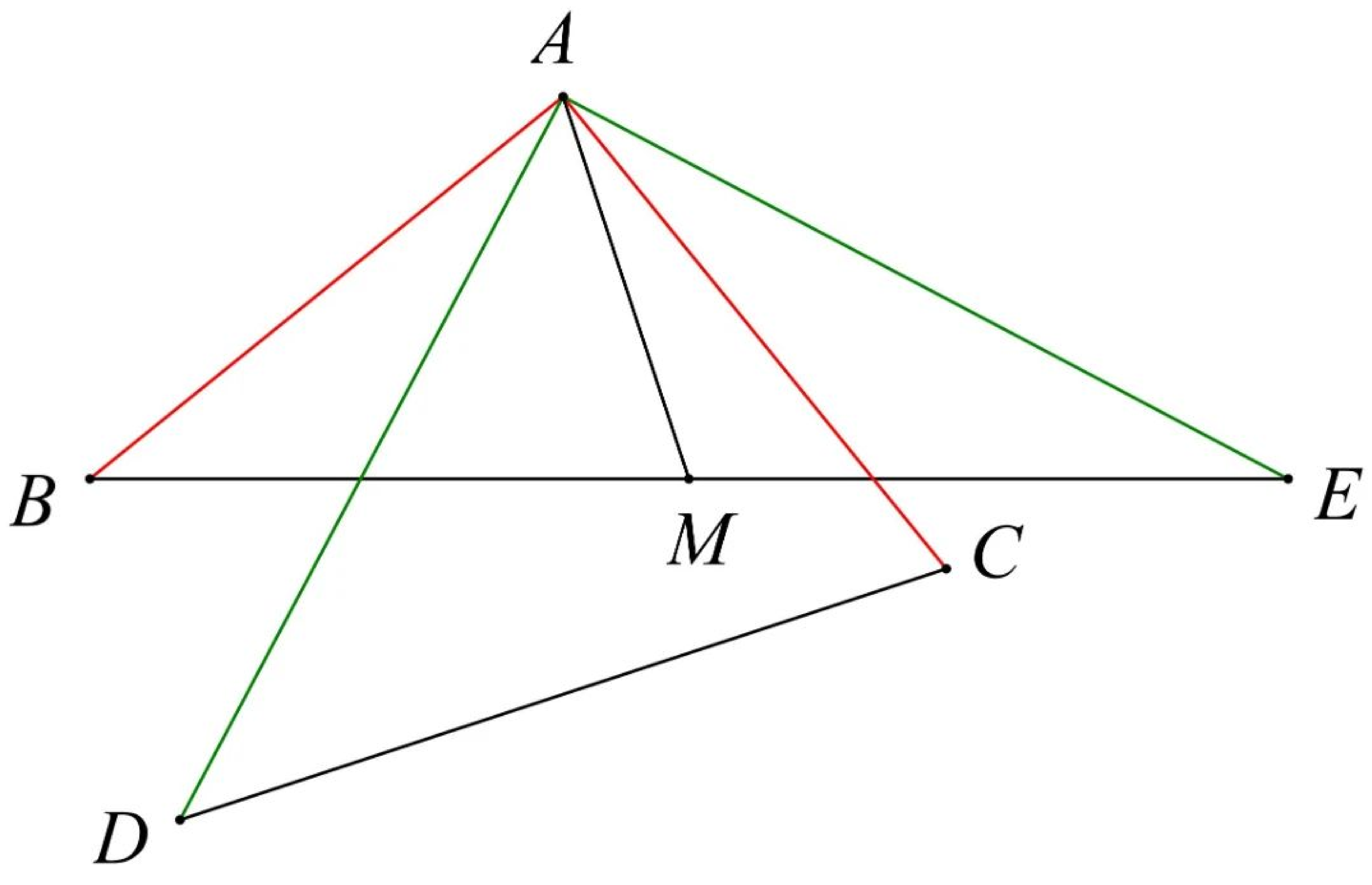
3. 本题可以进一步思考 CN 和 AE 的位置关系。

4. 在本题的基础上，可以进一步进行拓展分析，补充一道练习题。下面这道题目难度比原题大一些，在图形的构造上，却是神似的，感兴趣的读者可以挑战一下。

【拓展题目】

如图，∠BAC=∠DAE=90°，M 是 BE 的中点，AB=AC，AD=AE，试探究线段 AM 和 CD 的数量关系和位置关系，并证明。

提示：AM⊥CD，2AM=CD.



知识与能力有限，错误之处在所难免，欢迎热心读者批评指正。