



北京十一学校 2023~2024 学年第 2 学段高一年级数学 1 教与学诊断 (2024.1)

考试时间: 120 分钟 满分: 150 分

诊断设计者: 贾红梅 李鹏飞 宋偕偕

一、选择题 (共 12 道小题, 每题 5 分, 共 60 分), 请将答案填写到答题卡规定的位置

1. 已知幂函数  $y=f(x)$  的图象经过点  $(2, \frac{1}{4})$ , 则此幂函数的解析式为 ( )

- A.  $f(x)=x^{-2}$       B.  $f(x)=x^2$       C.  $f(x)=2^x$       D.  $f(x)=2^{-x}$

2. 已知点  $P(\cos \frac{\pi}{3}, -1)$  是角  $\alpha$  终边上一点, 则  $\sin \alpha =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. 函数  $y=(\frac{1}{2})^{2x-x^2}$  的值域为 ( )

- A.  $[\frac{1}{2}, +\infty)$       B.  $(-\infty, \frac{1}{2}]$       C.  $(0, \frac{1}{2}]$       D.  $(0, 2]$

4. 已知  $a=4^{0.5}$ ,  $b=\log_{0.5} 4$ ,  $c=0.5^4$ , 那么  $a, b, c$  的大小关系为 ( )

- A.  $b < c < a$       B.  $c < b < a$       C.  $b < a < c$       D.  $c < a < b$

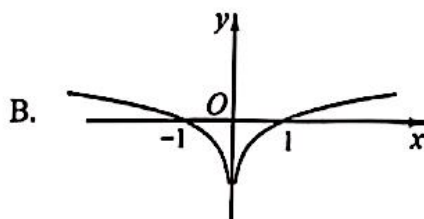
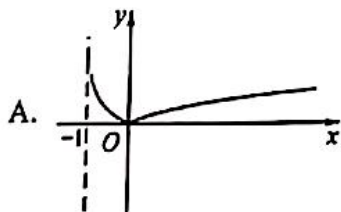
5. 已知  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ , 且  $\alpha$  为第二象限角, 那么  $\tan \alpha =$  ( )

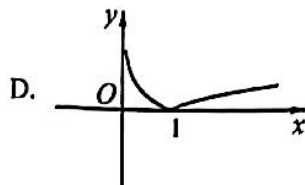
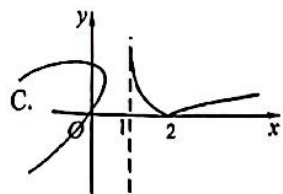
- A.  $\frac{4}{3}$       B.  $-\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{3}{4}$

6. 若数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$ , 且  $a_1 = 9$ ,  $a_8 = -5$ , 则当  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和最大值为 ( )

- A. 5      B. 6      C. 7      D. 8

7. 函数  $y=|\lg(x-1)|$  的图象是 ( )





8. 在等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1=2$ , 公比  $q=\frac{2}{3}$ , 记其前  $n$  项的和为  $S_n$ , 则对于  $n \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $S_n < m$  都成立的最小整数  $m$  等于 ( )

- A. 6                      B. 3                      C. 4                      D. 2

9. 已知扇形的圆心角为  $8 \text{ rad}$ , 其面积是  $4 \text{ cm}^2$ , 则该扇形的弧长是 ( )

- A.  $10 \text{ cm}$               B.  $8 \text{ cm}$               C.  $8\sqrt{2} \text{ cm}$               D.  $4\sqrt{2} \text{ cm}$

10. 已知无穷等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d \neq 0$ , 则 “ $d > 0$ ” 是 “存在无限项  $a_n$  满足  $a_n > 2023$ ” 的 ( )

- A. 充分不必要条件    B. 必要不充分条件    C. 充要条件            D. 既不充分也不必要条件

11. 函数  $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - ax + 3)$  在  $[1, 2]$  上恒为正数, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{3}$                       B.  $2\sqrt{2} < a < \frac{7}{2}$   
C.  $3 \leq a < \frac{7}{2}$                                       D.  $3 < a < 2\sqrt{3}$

2. 形如  $2^{2^n} + 1$  ( $n$  是非负整数) 的数称为费马数, 记为  $F_n$ . 数学家费马根据  $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4$  都是质数提出了猜想: 费马数都是质数. 多年之后, 数学家欧拉计算出  $F_5$  不是质数, 那  $F_5$  的位数是 ( )

参考数据:  $\lg 2 \approx 0.3010$

- A. 9                      B. 10                      C. 11                      D. 12

∴ 填空题 (共 6 个小题, 每题 5 分, 共 30 分), 请将答案填写到答题卡规定的位置

计算:  $(\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} + \lg 5^2 + \lg 40 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

已知等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_7 = 19$ ,  $a_2 + a_8 = 26$ , 则数列  $\{a_n\}$  的前 5 项和为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

在各项均为正数的等比数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2$ , 且  $a_2, a_3$  的等差中项为  $a_1 + 2$ , 则  $a_6 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

在平面直角坐标系中, 动点  $M$  在单位圆上按逆时针方向做匀速圆周运动, 每 12 分钟转动一周. 若



点  $M$  的初始位置坐标为  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ , 则运动到 3 分钟时, 动点  $M$  所处位置的坐标是 \_\_\_\_\_.

17. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & x \leq 1 \\ \log_3 x, & x > 1 \end{cases}$ , 若函数  $y = f(x) - 2$  有且仅有两个不同的零点, 则实数  $a$  的取值

范围是 \_\_\_\_\_.

18. 已知数列  $\{a_n\} (n \leq 9)$  各项均为正整数, 对任意的  $k \in N^* (2 \leq k \leq 8)$ ,  $a_k = a_{k-1} + 1$  和  $a_{k+1} = a_k + 1$  中有且仅有一个成立, 且  $a_1 = 6$ ,  $a_9 = 14$ . 记  $S_9 = a_1 + a_2 + \dots + a_9$ , 给出下列四个结论:

①  $\{a_n\}$  可能为等差数列;                      ②  $\{a_n\}$  中最大的项为  $a_9$ ;

③  $S_9$  不存在最大值;                              ④  $S_9$  的最小值为 36.

其中正确结论的序号是 \_\_\_\_\_.

三、解答题 (五个大题, 一共 60 分), 请将答案填写到答题卡规定的位置

19. (本题 10 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n = n^2$ .

(1) (5 分) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) (5 分) 求数列  $\left\{ \frac{1}{a_n a_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

20. (本题 13 分) 已知函数  $f(x) = \lg(1-x) - \lg(1+x)$ .

(1) (4 分) 求函数的  $f(x)$  定义域;

(2) (5 分) 判断函数  $f(x)$  的奇偶性, 并用定义证明你的结论;

(3) (4 分) 若函数  $f(x) < 0$ , 求实数  $x$  的取值范围.



21. (本题 12 分)

(1) (6 分)  $P$  是角  $\alpha$  的终边上一点, 已知点  $P$  的坐标为  $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ . 求  $\tan \alpha$  和

$\frac{3\sin(\pi-\alpha)+5\sin(\alpha+\frac{\pi}{2})}{2\cos(-\alpha)} - \tan(\pi+\alpha)$  的值;

(2) (6 分) 若  $\sin \theta, \cos \theta$  是方程  $4x^2 + 2mx + m = 0$  的两根, 求  $m$  的值.

22. (本题 11 分) 已知首项为 0 的无穷等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_2, a_3, a_4 + 1$  成等比数列.

(1) (5 分) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) (6 分) 记  $b_n = \begin{cases} a_n + 1, n \text{ 为奇数} \\ 2^{a_n}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $2n$  项和  $T_{2n}$ .

23. (本题 14 分) 若在定义域内存在实数  $x_0$ , 使得  $f(x_0 + 1) = f(x_0) + f(1)$  成立, 则称函数有“飘移点” $x_0$ .

(1) (3 分) 函数  $f(x) = \frac{1}{x}$  是否有“飘移点”? 请说明理由;

(2) (5 分) 证明函数  $f(x) = x^2 + 2^x$  在  $(0, 1)$  上有“飘移点”;

(3) (6 分) 若函数  $f(x) = \lg\left(\frac{a}{x^2 + 1}\right)$  在  $(0, +\infty)$  上有“飘移点”, 求实数  $a$  的取值范围.