



初三数学

一、选择题 (本题共 20 分, 每小题 2 分)

1. 如果 $3x = 4y$ ($y \neq 0$), 那么下列比例式中正确的是 ()

- A. $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ B. $\frac{x}{3} = \frac{4}{y}$ C. $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ D. $\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$

2. 下列关于二次函数 $y = 2x^2$ 的说法正确的是 ()

- A. 它的图象经过点 $(-1, -2)$ B. 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小
C. 当 $x = 0$ 时, y 有最大值为 0 D. 它的图象的对称轴是直线 $x = 2$

3. 一元二次方程 $x^2 - 8x - 1 = 0$ 配方后可变形为 ()

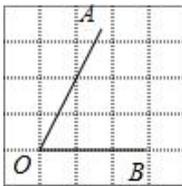
- A. $(x+4)^2 = 17$ B. $(x+4)^2 = 15$ C. $(x-4)^2 = 15$ D. $(x-4)^2 = 17$

4. 抛物线 $y = 3(x-1)^2 + 5$ 的顶点坐标是 ()

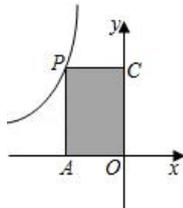
- A. $(3, 5)$ B. $(3, 1)$ C. $(1, 5)$ D. $(-1, 5)$

5. 正方形网格中, $\angle AOB$ 如图放置, 则 $\sin \angle AOB =$ ()

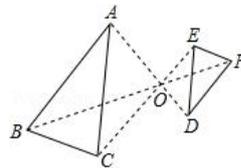
- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2



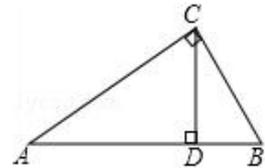
第 5 题图



第 6 题图



第 8 题图



第 10 题图

6. 如图, 点 P 是反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 图象上的一个点, 过 P 作 $PA \perp x$ 轴, 垂足为 A , $PC \perp y$ 轴, 垂足为 C , 则矩形 $OAPC$ 的面积是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 4 D. $\frac{1}{4}$

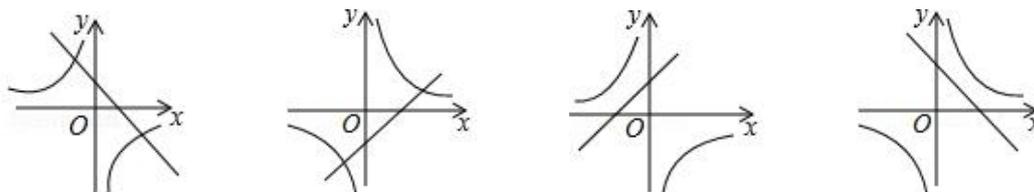
7. 若关于 x 的一元二次方程 $(a-2)x^2 + 2x + a^2 - 4 = 0$ 有一个根为 0, 则 a 的值为 ()

- A. ± 2 B. $\pm \sqrt{2}$ C. -2 D. 2

8. 如图, $\triangle ABC$ 与 $\triangle DFE$ 是位似图形, 且位似中心为 O , $OB:OF = 2:1$, 若线段 $AC = 6$, 则线段 DE 为 ()

- A. 2 B. 4 C. 6 D. 3

9. 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = kx + 1$ 与 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象可能是 ()

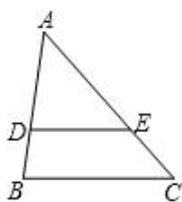


- A. B. C. D.

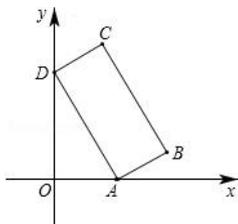
10. 如图, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 AB 边上的高, 若 $AD = 24$, $BD = 6$, 则 CD 的长是 ()
A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

二、填空题 (本题共 16 分, 每小题 2 分)

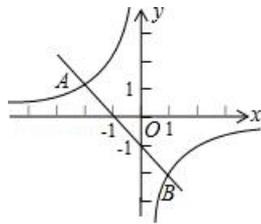
11. 二次函数 $y = -2x^2 + 1$ 图象的开口方向是向_____.
12. 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 图象过点 $(2, y_1)$ 、 $(3, y_2)$, 则 y_1 _____ y_2 . (填“>”, “=”或“<”)
13. $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$, 则 $\tan A$ 的值为_____.
14. 如图, 点 D, E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上, 且 $DE \parallel BC$. 若 $AD : AB = 2 : 3$, 则 $\triangle ADE$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为_____.



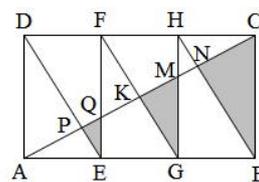
第 14 题图



第 15 题图



第 16 题图

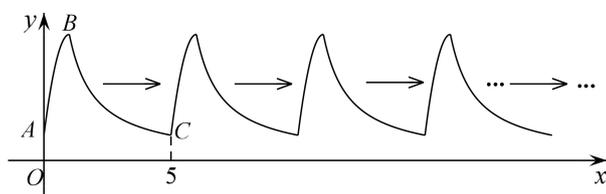


第 17 题图

15. 如图, 矩形 $ABCD$ 顶点 A, D 分别落在 x 轴、 y 轴上, $OD = 2OA = 6$, $AD : AB = 3 : 1$. 则点 B 的坐标是_____.
16. 如图, 平面直角坐标系 xOy 中, 一次函数 $y_1 = ax + b$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{m}{x}$ 图象交于点 $A(-2, 1)$ 、 $B(1, -2)$. 结合图象, 则关于 x 的不等式 $ax + b > \frac{m}{x}$ 的解集是_____.
17. 如图, 矩形 $ABCD$ 由三个全等矩形拼成, AC 与 DE 、 EF 、 FG 、 HG 、 HB 分别交于点 P 、 Q 、 K 、 M 、 N , 设 $\triangle EPQ$ 、 $\triangle GKM$ 、 $\triangle BNC$ 的面积依次为 S_1 、 S_2 、 S_3 . 若 $S_1 + S_3 = 40$, 则 S_2 的值为_____.



18. 如图，曲线 AB 是抛物线 $y = -4x^2 + 8x + 1$ 的一部分（其中 A 是抛物线与 y 轴的交点， B 是顶点），曲线 BC 是双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的一部分. 曲线 AB 与 BC 组成图形 W . 由点 C 开始不断重复图形 W 形成一组“波浪线”. 若点 $P(2020, m)$, $Q(x, n)$, 在该“波浪线”上，则 m 的值为_____， n 的最大值为_____.



三、解答题（本题共 64 分）

19. (5 分) 计算: $4\sin 30^\circ - \sqrt{2}\cos 45^\circ + \tan^2 60^\circ$.

20. (10 分) 解下列方程:

(1) $(x-3)^2 = 25$

(2) $x^2 - 10x = 5$

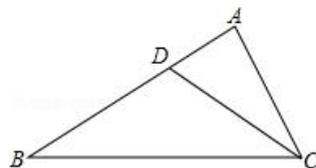
21. (6 分) 列方程或方程组解应用题:

随着生活水平的提高，人们越来越关注健康的生活环境，家庭及办公场所对空气净化器的需求量逐月增多. 经调查，某品牌的空气净化器今年三月份的销售量为 8 万台，五月份的销售量为 9.68 万台，求销售量的月平均增长率.

22. (6 分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在 AB 边上， $\angle ABC = \angle ACD$,

(1) 求证: $\triangle ABC \sim \triangle ACD$;

(2) 若 $AD=2$, $AB=5$. 求 AC 的长.



23. (6 分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + x + k - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

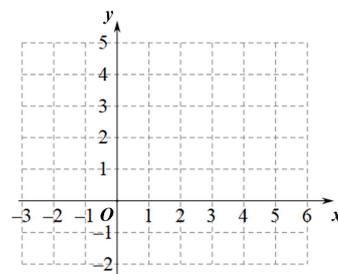
(2) 若方程的两个实数根都是整数，求正整数 k 的值.



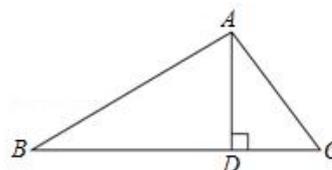


24. (6分) 已知二次函数 $y = x^2 - 4x + 4$.

- (1) 将 $y = x^2 - 4x + 4$ 化成 $y = a(x-h)^2 + k$ 的形式, 并写出顶点坐标;
- (2) 在所给的平面直角坐标系 xOy 中, 画出它的示意图;
- (3) 当 $1 < x < 4$ 时, 直接写出 y 的取值范围.



25. (6分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 30^\circ$, $\tan C = \frac{4}{3}$, $AD \perp BC$ 于点 D . 若 $AB = 8$, 求 BC 的长.



26. (5分) 有这样一个问题: 探究函数 $y = \frac{x-1}{x-3}$ 的图象与性质. 小彤根据学习函数的经验, 对函数 $y = \frac{x-1}{x-3}$ 的图象与性质进行了探究. 下面是小彤探究的过程, 请补充完整:

对函数 $y = \frac{x-1}{x-3}$ 的图象与性质进行了探究. 下面是小彤探究的过程, 请补充完整:

(1) 函数 $y = \frac{x-1}{x-3}$ 的自变量 x 的取值范围是_____;

(2) 下表是 y 与 x 的几组对应值:

x	...	-2	-1	0	1	2	4	5	6	7	8	...
y	...	$\frac{3}{5}$	m	$\frac{1}{3}$	0	-1	3	2	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$...

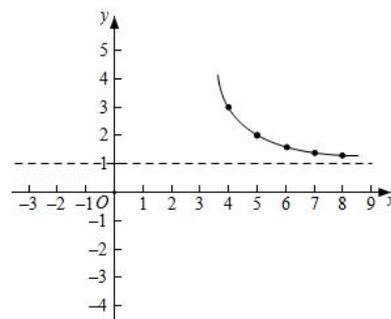
则 m 的值为_____;

(3) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 描出了以上表中各对应值为坐标的点, 根据描出的点, 画出了图象的一部分, 请根据剩余的点补全此函数的图象;

(4) 观察图象, 写出该函数的一条性质_____;

(5) 若函数 $y = \frac{x-1}{x-3}$ 的图象上有三个点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、

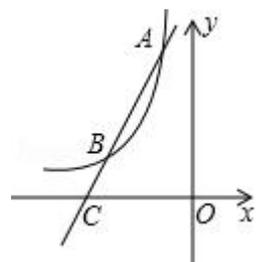
$C(x_3, y_3)$, 且 $x_1 < 3 < x_2 < x_3$, 则 y_1 、 y_2 、 y_3 之间的大小关系为_____.



27. (7分) 已知反比例函数 $y = \frac{m-8}{x}$ (m 为常数) 的图象经过点 $A(-1, 6)$.

(1) 求 m 的值;

(2) 如图, 过点 A 作直线 AC 与函数 $y = \frac{m-8}{x}$ 的图象交于点 B , 与 x 轴交于点 C , 且 $AB=2BC$, 求点 B 和点 C 的坐标.



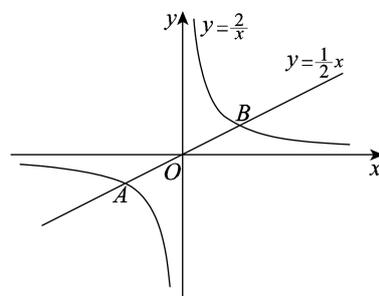
28. (7分) 当 k 值相同时, 我们把正比例函数 $y = \frac{1}{k}x$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 叫做“关联函数”,

可以通过图象研究“关联函数”的性质. 小明根据学习函数的经验, 先以 $y = \frac{1}{2}x$ 与 $y = \frac{2}{x}$ 为例对“关联函数”进行了探究.

下面是小明的探究过程, 请你将它补充完整:

(1) 如图, 在同一坐标系中画出这两个函数的图象.

设这两个函数图象的交点分别为 A, B , 则点 A 的坐标为 $(-2, -1)$, 点 B 的坐标为_____;



(2) 点 P 是函数 $y = \frac{2}{x}$ 在第一象限内的图象上一个动点 (点 P 不与点 B 重合), 设点 P 的坐标为 $(t, \frac{2}{t})$, 其中 $t > 0$ 且 $t \neq 2$.

①结论 1: 作直线 PA, PB 分别与 x 轴交于点 C, D , 则在点 P 运动的过程中, 总有 $PC=PD$.

证明: 设直线 PA 的解析式为 $y = ax + b$, 将点 A 和点 P 的坐标代入,

$$\text{得} \begin{cases} -1 = -2a + b, \\ \underline{\hspace{2cm}} \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{t}, \\ b = \frac{2-t}{t}. \end{cases} \text{则直线 } PA \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{t}x + \frac{2-t}{t}.$$

令 $y = 0$, 可得 $x = t - 2$, 则点 C 的坐标为 $(t - 2, 0)$.

同理可求, 直线 PB 的解析式为 $y = -\frac{1}{t}x + \frac{t+2}{t}$, 点 D 的坐标为_____.

请你继续完成证明 $PC=PD$ 的后续过程:

②结论 2: 设 $\triangle ABP$ 的面积为 S , 则 S 是 t 的函数. 请你直接写出 S 与 t 的函数表达式.

